

- рах тиосульфата натрия за фронтом ударных волн.— В кн.: Горение и взрыв. Материалы III Всесоюз. симпоз. по горению и взрыву. М.: Наука, 1972.
13. Альтшулер Л. В. Применение ударных волн в физике высоких давлений.— УФН, 1965, т. 85, вып. 2.
 14. Bett K. E., Cappel J. B. Effect of pressure on the viscosity of water.— Nature, 1965, v. 207.
 15. Рид Р. С., Праусниц Д. М., Шервуд Т. К. Свойства газов и жидкостей.— Л.: Химия, 1982.
 16. Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П. Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений.— М.: Наука, 1966.
 17. Гумеров Н. А. Обтекание цилиндра неустановившимся потоком вязкой несжимаемой жидкости при малых числах Рейнольдса.— Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика, 1983, № 2.
 18. Tritton D. J. Experiments on the flow past a circular cylinder at low Reynolds numbers.— J. Fluid Mech., 1959, v. 6.
 19. Шариджанов И. И., Альтшулер Л. В., Брусникин С. Е. Аномалии ударной и изэнтропической сжимаемости воды.— ФГВ, 1983, № 5.
 20. Афанасенков А. Н., Богомолов В. М., Воскобойников И. М. Обобщенная ударная адиабата органических жидкостей.— ФГВ, 1967, № 4.
 21. Cowperthwaite M., Shaw R. Equation of state for liquids calculation of the shock temperature of carbon tetrachloride, nitromethane and water in the 100-kbar region.— J. Chem. Phys., 1976, v. 53.
 22. Корнер С. Б. Оптические исследования свойств ударно-сжатых диэлектриков.— УФН, 1963, т. 94, вып. 4.
 23. Lyzenga G. A., Ahrens T. J. The temperature of shock-compressed water.— J. Chem. Phys., 1982, v. 76.
 24. Impey R. W., Klein M. L., McDonald I. R. Molecular dynamics studies of the structure of water at high temperatures and density.— J. Chem. Phys., 1981, v. 74.
 25. Stlinger F. H., Rahman A. Molecular dynamics study of liquid water under high compression.— J. Chem. Phys., 1974, v. 61.

Поступила 28/III 1985 г.

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К ИЗУЧЕНИЮ МЕХАНИЗМА ЗАРОЖДЕНИЯ И РАСПРОСТРАНЕНИЯ ТРЕЩИН

В. В. Стружанов
(Свердловск)

С увеличением нагрузки твердое тело переходит из одного устойчивого положения равновесия в другое. Динамическое же раскрытие трещин можно трактовать как потерю устойчивости с последующим скачкообразным переходом в новое устойчивое положение. Поэтому для анализа несущей способности, образования и распространения трещин, разрушения можно использовать математические методы исследования равновесия, устойчивости и потери устойчивости механических систем, в частности аппарат теории катастроф. При этом, как отмечено в [1], существенное значение имеют нисходящие ветви законов взаимодействия элементов системы, поскольку они позволяют определить все возможные положения равновесия.

В данной работе подход, основанный на изучении положений равновесия методами теории катастроф, применен для анализа поведения под нагрузкой некоторых простейших дискретных моделей твердого тела в виде атомных решеток. Наглядно представлен процесс образования и раскрытия трещины вплоть до разрушения.

1. Рассмотрим сначала модель, представляющую несколько параллельных рядов атомов (рис. 1, а). Сила взаимодействия между двумя первыми рядами, отнесенная к единице длины этих рядов, задана функцией [1]

$$\Phi = Ex \exp(-x/x_c),$$

где x — величина изменения расстояния между рядами; x_c — значение x , соответствующее максимальной силе; E — модуль Юнга. В отличие от [1] полагаем, что при снятии нагрузки сила взаимодействия изменяется по линейному закону $E(x - x_n)$ для фиксированного x_n . Здесь x_n — неуругая составляющая смещения x , $x_n = x[1 - \exp(-x/x_c)]$. Сила взаимодействия между рядами b и d , отнесенная к единице длины, определяется выражением $\Phi' = Ec^{-1}y$, где y — величина изменения расстояния,

c — числовой параметр, учитывающий податливость системы атомных рядов, расположенных между b и d . Чем больше таких рядов, тем больше значение c .

Закрепив ряд a , будем квазистатически растягивать систему посредством задания перемещения u ряду d (жесткое нагружение). Потенциальная энергия деформаций при этом

$$\Pi = \int_0^x \Phi dx + (u - x)^2 E/2c.$$

Переменную x естественно называть параметром состояния, а u, c — параметрами управления. Тогда функцию Π можно рассматривать как двухпараметрическое семейство функций $\Pi: S \times C$, где $S = R$ — пространство состояний ($x \in S$), $C = R \times R = R^2$ — пространство управления ($(u, c) \in C$), R — множество вещественных чисел.

Критические точки функции Π определяются уравнением

$$(1.1) \quad \partial \Pi / \partial x = E x \exp(-x/x_c) - (u - x)E/c = 0.$$

Очевидно, что для данных значений (u, c) все положения равновесия системы получаются решением уравнения (1.1). Множество этих решений — точки (x, u, c) образуют в трехмерном пространстве многообразие катастрофы M [2]. Оно имеет вид поверхности со сборкой и показано на рис. 1, б. Здесь и ниже $x_c = 0,4$.

Дважды и трижды вырожденные критические точки определяются из совместного решения уравнений (1.1) и [3]

$$(1.2) \quad \partial^2 \Pi / \partial x^2 = E(1 - x/x_c) \exp(-x/x_c) + E/c = 0$$

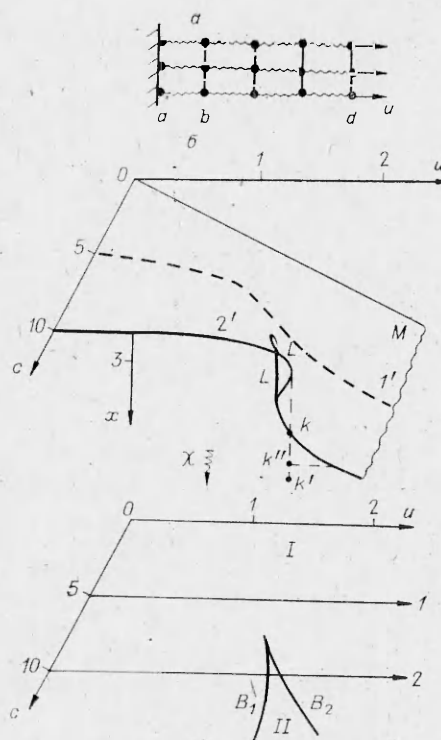
(равенство нулю гессиана функции Π);

$$(1.3) \quad \partial^3 \Pi / \partial x^3 = (E/x_c)(x/x_c - 2) \exp(-x/x_c) \neq 0.$$

Решая уравнения (1.1)–(1.3), находим трижды вырожденную критическую точку ($x = 2x_c, u = 4x_c, c = c^2$) — начало сборки, а из уравнений (1.1), (1.2) — особое множество многообразия M , состоящее из дважды вырожденных точек $[x, u = x^2(x - x_c)^{-1}, c = x_c(x - x_c)^{-1} \exp(-x/x_c)]$, которые образуют кривые складок L (рис. 1, б).

Образ особого множества при отображении катастрофы M в пространство управления $\chi: M \rightarrow C$, проецирующем точки M на плоскость uc по правилу $(x, u, c) \rightarrow (u, c)$, называется бифуркационным множеством B и представляет собой место, где меняется число и природа критических точек [2]. В данном случае оно состоит из кривых B_1 и B_2 (рис. 1, б).

Положим $c = 5$. Тогда путь нагружения в C целиком расположен в области I , внешней по отношению к множеству B (рис. 1, б, прямая I). Над точками области I лежит лишь один лист поверхности M , который составляют невырожденные критические точки, соответствующие устойчивым положениям равновесия системы. Поэтому при нагружении система плавно переходит из одного устойчивого положения в другое (кривая I') вплоть до разрушения — разведения атомных рядов a и b на такое расстояние, что сила взаимодействия между ними пренебрежительно мала.



Р и с. 1

Пусть теперь $c = 10$. В этом случае путь в C (прямая 2, рис. 1, б) сначала проходит по области I , а путь, проходимый положением равновесия в M и лежащий над путем в C (кривая 2', рис. 1, б), располагается на верхнем листе поверхности M . Затем попадаем в область II , над которой находятся уже три листа и соответственно имеются три положения равновесия: неустойчивые отвечают точкам поверхности M , лежащим на среднем листе, внутри кривой складок, устойчивые — точкам снаружи кривой складок. Однако, согласно принципу промедления [2], путь в M находится на верхнем листе до тех пор, пока не пройдет через складку, т. е. не попадет в вырожденную критическую точку, и лист, на котором он находился, не «исчезнет». Это случится при $u_* = 1,94$. Если далее возмутить u_* , добавив член γu_* , то для сколь угодно малых $\gamma > 0$ появится невырожденная критическая точка, лежащая уже на нижнем листе поверхности M . Тогда путь в M прыгает с одного листа поверхности на другой. Такие прыжки называются катастрофическими [2]. Они происходят, когда путь в C покидает область II (пересекает кривую B_2) и гладкие изменения в управлении вызывают разрывные изменения состояния.

В процессе скачка в системе падает энергия. Поэтому она по инерции проскакивает положение равновесия, лежащее на M (точка k с координатами $x = 1,696$, $u = 1,94$, рис. 1, б), и останавливается там, где уровень энергии восстанавливается (точка k' с координатами $x = 2,244$, $u = 1,94$). Причем движется только ряд b . Затем система опять устремляется к положению равновесия. Однако теперь сила взаимодействия между атомами a и b изменяется уже по линейному закону разгрузки. Тогда уравнение (1.1) принимает вид

$$E(x - x_n) - E/c(u - x) = 0, \quad x_n = 2,236.$$

Отсюда положение равновесия, которое стремится занять система, определяется точкой k'' ($x = 2,209$, $u = 1,94$), не лежащей на многообразии M . Около этого положения произойдут колебания, затухающие из-за внутреннего трения в системе. Подсчитав теперь усилия, находим, что в результате скачка усилия растяжения сменились на усилия сжатия $0,0268 E$.

Так как после скачка ряды a и b взаимодействуют уже по закону нисходящей ветви кривой Φ , то можно считать, что произошло внезапное нарушение сплошности [1], образовалась трещина, между берегами которой, однако, сохраняется слабое взаимодействие.

Если продолжать нагружение, то от u_* до $u = x_n$ система разгружается. Затем происходит нагружение, в процессе которого силы взаимодействия линейны, и при $u = 2,326$ опять выходим на многообразие M . Далее деформирование идет плавно вплоть до окончательного разрушения.

Примечание 1. Трещина спонтанно распространяется, если количество высвобождающейся упругой энергии превосходит энергию, расходуемую на ее рост, и остановится, когда величины этих энергий будут равными (отсчет ведется с момента старта). Например, в точке k упругая энергия уменьшалась на $0,088El^3$ (l — единица длины), а затраты на образование трещины составляют $0,0785El^3$, т. е. трещина продолжает расти. Остановка происходит в точке k' , где указанные величины сравниваются.

Примечание 2. Аналогичное исследование возможно провести и для мягкого нагружения. В этом случае поведение системы описывается функцией полной потенциальной энергии, где управляющие параметры c и P — равнодействующая равномерно распределенных сил, приложенных к атомам ряда d , а параметры состояния u и x . Разрушение происходит всегда при $P > \max \Phi$, причем для $c > e^2$ в процессе разрушения параметр u обязательно достигнет такой величины, при которой в системе происходит резкое падение потенциальной энергии деформаций. Отсюда

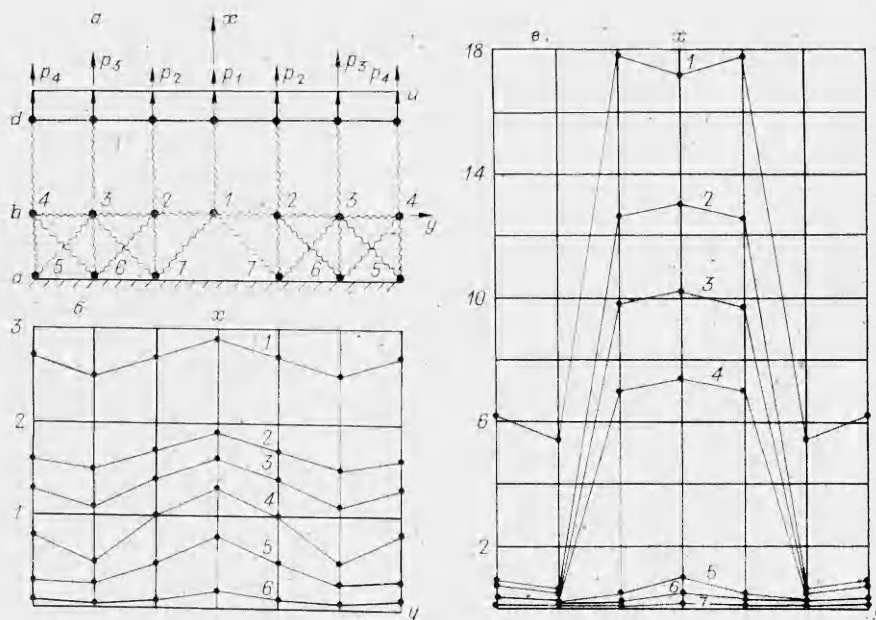


Рис. 2

полная и, следовательно, кинетическая энергия возрастают взрывообразно — разрушение резко ускоряется.

2. В качестве второй модели рассмотрим упрощенную атомную решетку, в которой имеется дефект — отсутствует центральный атом в ряду a (рис. 2, a). Между рядами b и d располагается еще n одинаковых атомных рядов. Полагаем, что сила, необходимая для разведения атомов, находящихся в рядах b и d напротив друг друга на расстоянии v (считая от исходного состояния), и отнесенная к единице длины,

$$\Phi_1 = 0,72(n + 1)^{-1}E(v - v_n), \quad v_n = v[1 - \exp(-v/(n + 1))].$$

Силы взаимодействия между атомами $1-2$, $2-3$, $3-4$, $4-5$, $3-6$, $2-7$ зададим выражением

$$\Phi_2 = E(w - w_n), \quad w_n = w[1 - \exp(-2,5w)].$$

Взаимодействие же между атомами $1-7$, $2-6$, $3-7$, $3-5$, $4-6$ будет слабее, так как расстояние между ними в первоначальном положении равновесия больше, чем между атомами $1-2$, $2-7$ и т. п. Определим его функцией

$$\Phi_3 = E(z - z_n), \quad z_n = z[1 - \exp(-5z)].$$

Здесь w , z — удлинения соответствующих межатомных расстояний; v_n , w_n , z_n — неупругие составляющие удлинений.

Закрепив ряд a , будем растягивать решетку, задавая одинаковые перемещения u атомам, находящимся в ряду d . Для простоты вычислений, не искажая качественной картины поведения системы, предположим, что атомы могут перемещаться лишь в вертикальном направлении. Тогда выражение для потенциальной энергии деформаций имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_1 = & 2 \left(\int_0^{m_1} + \int_0^{m_2} + 2 \int_0^{m_3} + \int_0^{m_4} \right) \Phi_3 dz + \left(\int_0^{u-x_1} + 2 \int_0^{u-x_2} + 2 \int_0^{u-x_3} + \right. \\ & \left. + 2 \int_0^{u-x_4} \right) \Phi_1 dv + 2 \left(\int_0^{x_2} + \int_0^{x_3} + \int_0^{x_4} + \int_0^{m_5} + \int_0^{m_6} + \int_0^{m_7} \right) \Phi_2 dw, \end{aligned}$$

где x_i — перемещения соответствующих атомов;

$$m_i = \sqrt{(1 + x_i)^2 + 1} - \sqrt{2} \quad (i = 1, 2, 3, 4);$$

$$m_j = \sqrt{(x_{j-4} - x_{j-3})^2 + 1} - 1 \quad (j = 5, 6, 7).$$

Параметры управления здесь u и n , параметры состояния x_i .

Многообразие катастрофы M_1 определяется системой четырех алгебраических, нелинейных уравнений, получаемых приравнением нулю частных производных функции Π_1 по x_i . Решение для каждого предварительно зафиксированного n и изменяющихся значений u ищем методом последовательных приближений. Сгруппировав все нелинейные члены в правых частях и обозначив их через f_i , находим решение x_i^0 при $f_i = 0$. Затем вычисляем значение $f_i = f_i^0(x_i^0)$ и решаем линейную систему, когда $f_i = f_i^0$. Опять вычисляем величину $f_i(x_i^1)$ для полученных значений x_i^1 и т. д. Последовательность x_i^k ($k = 0, 1, 2, \dots$) сходится к искомому решению. В заключение определяем удлинения всех межатомных расстояний.

Аналогичная процедура реализуется для всех значений u . Причем каждый раз удлинения межатомных расстояний сравниваются с соответствующими величинами, полученными из предыдущего решения. Если окажется, что расстояние между какими-либо атомами уменьшается, то сила взаимодействия между ними далее характеризуется уже прямой разгрузки. Поэтому необходимо найти конкретную величину неупругой составляющей, соответствующей удлинению расстояния между этими атомами, подставить ее в выражения для f_i и после этого приступить уже к решению системы для следующего значения u .

В результате вычислений определяются положения равновесия атомов, по изменению которых можно проследить процесс раскрытия трещины. На рис. 2, б, в он показан соответственно для $n = 1, u = 3; 2; 1,75; 1,5; 1,17; 0,5$ (линии 1—6) и для $n = 31, u = 14,8; 14,78; 12; 9,26; 9,24; 8; 4$ (линии 1—7).

Многообразие M_1 , построенное в трехмерном пространстве nuP , представляет собой поверхность с двумя сборками. Здесь P — равнодействующая растягивающих сил p_i , приложенных к атомам ряда d при перемещении его на расстояние u . На рис. 3 изображены кривые равновесия системы для $n = 1; 7; 15; 31$ (линии 1—4), полученные сечением многообразия M_1 соответствующими плоскостями.

3. Исходя из полученных результатов, можно заключить, что трещина зарождается в месте дефекта. В том случае, когда внутренний дефект отсутствует, она возникает на поверхности, так как поверхностный слой ослаблен по своей природе [4] (отсутствует ряд связей). Характер раскрытия трещины зависит от податливости системы, передающей нагрузку

в зону дефекта. Если она мала (например, при $n = 1$), то трещина раскрывается постепенно (рис. 2, б), если же велика ($n = 31$), то равновесное раскрытие сменяется скачкообразным (рис. 2, в). Данный вывод согласуется с результатами экспериментальных исследований влияния податливости системы нагружения (соответственно запаса упругой энергии) на кинетику процесса деформации и разрушения [5, 6].

Заметим, что в первом случае ($n = 1$) путь нагружения в M_1 не пересекает складку,

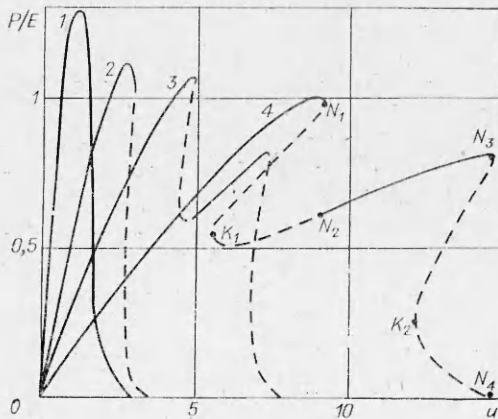


Рис. 3

а во втором ($n = 31$) пересекает и происходит скачок с верхнего листа поверхности на нижний (из точки N_1 в точку N_2 , рис. 3). В этот момент трещина внезапно раскрывается и выделяется некоторое количество энергии ($0,91El^3$). Происходит так называемый хлопок [7]. В дальнейшем равновесный характер раскрытия опять сменяется скачком, когда путь нагружения пересекает вторую складку (прыжок из точки N_3 и N_4). В этот момент разрушается вся система.

Аналогичный характер поведения трещины исходя из других соображений отмечен в [8].

Примечание 3. Штрихами на рис. 3 показаны части кривых, которые построены приближенно. Использовалось равенство величины падения энергии в системе при скачке и площади, ограниченной соответствующей кривой $N_1K_1N_2$ и прямой N_1N_2 , кривой $N_3K_2N_4$ и прямой N_3N_4 (рис. 3, $n = 31$). Также проводилось построение и для других значений параметра n .

В процессе скачка система проскакивает положение равновесия на M_1 и останавливается, когда восстановится уровень энергии. Другими словами, трещина спонтанно распространяется до тех пор, пока количество высвобождающейся упругой энергии не компенсируется энергией, расходуемой на ее рост (критерий Гриффитса). При этом величины координат достигают значений $x_1 = 12,56$, $x_2 = 12,2$ ($n = 31$), связи 1—7, 2—6 обрываются, а 2—3, 2—7 существенно ослабляются.

Очевидно, что после скачка система стремится обратно к положению равновесия (трещина начинает закрываться). В результате в сжатое состояние переходят связи 3—7, 3—6, 3—5, 2—7, 2—3. Следовательно, происходит процесс, подобный возникновению при перегрузке в ходе циклического нагружения сжимающих остаточных напряжений в окрестности вершины трещины, которые и стремятся закрыть ее [7]. Дальнейшее нагружение не приводит к раскрытию трещины до тех пор, пока соответствующие усилия сжатия опять не сменяются на усилия растяжения.

Отметим также, что по мере раскрытия трещины максимум усилий переходит на неповрежденную зону. После скачкообразного раскрытия по берегам трещины возникают сжимающие напряжения, так как в сжатом состоянии оказывается связь 1—2 (после второго скачка еще и связь 2—3). И наконец, расчеты показывают падение несущей способности системы с увеличением ее размеров и податливости (см. рис. 3).

Автор благодарит О. А. Волкову за участие в расчетах.

ЛИТЕРАТУРА

1. Новожилов В. В. К основам теории равновесных трещин в упругих телах.— ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
2. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения.— М.: Мир, 1980.
3. Гилмор Р. Прикладная теория катастроф. Кн. I.— М.: Мир, 1984.
4. Гликман Л. А., Санфирова Т. П., Степанов В. А. О возникновении остаточных напряжений первого рода при растяжении. II (К вопросу о наличии ослабленного поверхностного слоя).— ЖТФ, 1949, т. 29, вып. 3.
5. Зилова Т. К., Новосильцева Н. И., Фридман Я. Б. Методы испытания с переменным запасом упругой энергии и его влияние на механические свойства.— Завод. лаборатория, 1969, № 10.
6. Зилова Т. К., Фридман Я. Б. Замедленное разрушение материалов и влияние запаса упругой энергии.— В кн.: Вопросы прочности материалов и конструкций. М.: Изд-во АН СССР, 1959.
7. Брок Д. Основы механики разрушения.— М.: Высш. шк., 1980.
8. Баренблатт Г. И. Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении.— ПМТФ, 1961, № 4.

Поступила 9/X 1985 г.