

2. Ляхов Г. М., Полякова Н. И. Волны в плотных средах и нагрузки на сооружения. М., «Недра», 1967.
3. Нарожная З. В. Об экспериментальном определении скорости разгрузки в грунте при динамических процессах. — ФГВ, 1965, № 1.
4. Ляхов Г. М. Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1974.

УДК 534. 24

## МИНИМИЗАЦИЯ МОДУЛЯ КОЭФФИЦИЕНТА ОТРАЖЕНИЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКОЙ ВОЛНЫ ОТ НЕОДНОРОДНОГО ПОГЛОЩАЮЩЕГО СЛОЯ

И. Л. Дорот, М. М. Мачевариани

(Ленинград)

Рассматривается синтез оптимального неоднородного поглощающего слоя заданной толщины при падении на него плоской полигармонической волны известного дискретного спектра частот. Задача синтеза формулируется как задача оптимального управления. С помощью аппроксимации управления ступенчатой функцией задача сводится к минимизации функции многих переменных.

Получены формулы для точного вычисления градиента критерия качества, необходимого при реализации алгоритма поиска оптимального решения. При их выводе использовалась запись основных и сопряженных переменных, а также гамильтониана в комплексной форме, что позволило значительно упростить промежуточные преобразования. Для поиска оптимального решения использовался метод сопряженных градиентов [1, 2] при наличии ограничений на управление. Приведены результаты вычислений оптимального управления с помощью ЭВМ, иллюстрирующие задачу.

**1. Постановка задачи.** Пусть на неоднородный поглощающий слой, отделяющий однородное полупространство от границы, характеризуемой произвольным комплексным адмитансом, нормально падает плоская полигармоническая волна известного частотного спектра  $\kappa_j = f_j/f_1$  ( $f_1$  — значение низшей частоты спектра,  $f_2, f_3, \dots, f_s$  — значения остальных его частот).

Система дифференциальных уравнений для безразмерных входных адмитансов  $G_j$  неоднородного слоя имеет вид [3]

$$(1.1) \quad dG_j/d\tau = -i\kappa_j(n_0^2 - G_j^2), \quad j = 1, \dots, s; \quad n_0^2 = 1 + (1 + i\eta)Q(\tau),$$

где  $G_j$  — входной адмитанс слоя, отнесенный к волновому адмитансу ( $1/\rho_0 c_0$ ) среды, из которой приходит волна;  $\rho_0, c_0$  — плотность среды и скорость продольной волны в этой среде;  $n_0 = c_0/c(\tau)$ ,  $c(\tau)$  — скорость в неоднородном поглощающем слое;  $\tau = (2\pi f_1/c_0)x$  — приведенная толщина слоя, ограниченного плоскостями  $x = 0$  и  $x = l$ ;  $x$  — координата;  $\eta$  — заданная положительная константа;  $Q(\tau)$  — неотрицательная функция, подлежащая определению

$$(1.2) \quad 0 \leq Q(\tau) \leq M.$$

Согласно принятой в теории оптимального управления терминологии,  $Q(\tau)$  в дальнейшем будем называть функцией управления.

Значения входных адмитансов на границе  $\tau = 0$  полагаются равными

$$(1.3) \quad G_j(0) = p_0 + iq_0, \quad j = 1, \dots, s.$$

Коэффициент отражения монохроматической звуковой волны зависит от частоты и определяется значением безразмерного входного адмитанса  $G_j = p_j + iq_j$  на границе  $\tau = \tau_l$  [4]

$$\beta_j = (G_j^{(l)} - 1)/(G_j^{(l)} + 1), \quad j = 1, \dots, s.$$

Для полигармонической волны характеристикой отражения может служить, например, коэффициент отражения по энергии

$$(1.4) \quad \gamma = \sum_{j=1}^s e_j |\beta_j|^2 = \sum_{j=1}^s e_j \frac{(p_j^{(l)} - 1)^2 + (q_j^{(l)})^2}{(p_j^{(l)} + 1)^2 + (q_j^{(l)})^2},$$

где  $e_j$  — энергетический спектр волны;  $p_j$  и  $q_j$  — вещественная и мнимая части акустического адмитанса  $G_j$ .

Таким образом, задача оптимального синтеза состоит в том, чтобы найти функцию управления  $Q(\tau)$ , удовлетворяющую условию (1.2) и минимизирующую функционал (1.4).

**2. Построение приближенной модели задачи оптимального синтеза.** Используя, как это предложено в [5], вспомогательную комплексную форму записи сопряженных переменных (функций Лагранжа)  $\lambda_j^* = \lambda_p^j - i\lambda_q^j$ , можно записать в такой же форме и гамильтониан

$$(2.1) \quad \bar{H}_\lambda = \sum_{j=1}^s \lambda_j^* \frac{\partial G_j}{\partial \tau} = -i \sum_{j=1}^s \kappa_j \lambda_j^* [1 + (1 + i\eta) \overline{Q(\tau)} - G_j^2],$$

на основе реальной части его строится принцип максимума Л. С. Понтрягина в теории оптимальных систем. В соответствии с этим принципом из-за линейной зависимости гамильтониана (2.1) от управления  $Q(\tau)$  можно предположить, что оптимальные управления находятся в классе кусочно-постоянных и могут принимать лишь экстремальные значения, т. е. оптимальный неоднородный поглощающий слой может состоять из чередующихся однородных с нулевыми и максимальными значениями управления. Число однородных слоев, составляющих оптимальный неоднородный, определяется числом нулей функции переключения

$$K = \operatorname{Re} \frac{\partial \bar{H}_\lambda}{\partial Q} = -\operatorname{Re} \left[ i \sum_{j=1}^s (1 + i\eta) \kappa_j \lambda_j^* \right].$$

При положительных значениях функции переключения управление равно нулю, при отрицательных — максимально. Задача оптимального синтеза, таким образом, сводится к отысканию нулей функции переключения, что связано с необходимостью решения двухточечной граничной задачи.

Можно, однако, поступить и иначе, если исходить из приближенной модели рассматриваемой задачи. Неоднородный поглощающий слой будем предполагать состоящим из  $n$  однородных слоев одинаковой толщины, для каждого из которых функция управления постоянна и равна  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ),  $0 \leq Q_k \leq M$ . В этом случае дифференциальные уравнения для входных адмитансов (1.1) для каждого из слоев интегрируются

$$(2.2) \quad G_j^k(h-0) = \frac{G_j^k(+0) - i\delta_k \operatorname{tg} \psi_j^k}{1 - iG_j^k(+0) \delta_k^{-1} \operatorname{tg} \psi_j^k},$$

$$h = \tau_l/n, \quad \psi_j^k = h\kappa_j \delta_k, \quad \delta_k = \sqrt{1 + Q_k + i\eta Q_k},$$

$$k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, s.$$

Поскольку акустический адмитанс при переходе через границу двух сред меняется непрерывно, т. е. выполняется условие

$$G_j^{h+1}(+0) = G_j^h(h-0),$$

система соотношений (2.2) может быть представлена в рекуррентной форме

$$(2.3) \quad G_j(k) = \frac{G_j(k-1) - i\delta_k \operatorname{tg} \psi_j^k}{1 - iG_j(k-1) \delta_k^{-1} \operatorname{tg} \psi_j^k},$$

$$h = \tau_l/n, \quad \psi_j^k = h\kappa_j \delta_k, \quad \delta_k = \sqrt{1 + Q_k + i\eta Q_k},$$

$$k = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, s,$$

позволяющей по известному вектору управления  $\{Q_k\}$  и начальным условиям (1.3) однозначно определять значение адмитанса  $G_j^{(l)} = G_j(n)$  на границе с внешней средой и, следовательно, вычислять коэффициент отражения (1.4).

Таким образом, коэффициент отражения полигармонического воздействия является однозначной функцией  $n$  переменных  $Q_k (k = 1, \dots, n)$ , удовлетворяющих условию (1.2), и задача оптимального управления сводится к задаче минимизации функции многих переменных.

Из физических соображений можно ожидать, что приближенная модель оптимального неоднородного поглощающего слоя будет достаточно близкой к точной, если толщина однородных слоев  $h = \tau_l/n$  будет не больше толщины такого однородного слоя с  $Q_n = M$ , сквозь который пройдет значительная часть энергии падающей волны, приходящаяся на самую высокую частоту линейчатого спектра.

**3. Вычисление градиента минимизируемой функции.** Эффективные численные методы решения задач оптимизации предполагают знание градиента минимизируемой функции или умение вычислять его. В настоящей задаче минимизируемая функция при произвольном числе переменных  $n$  не может быть записана аналитически, однако ее градиент вычисляется точно, если воспользоваться методом, описанным в работе [6].

Как указывалось выше, для упрощения промежуточных преобразований при выводе формулы градиента критерия качества воспользуемся комплексной формой записи рассматриваемых выражений. В этом случае для сформулированной дискретной задачи (2.3), (1.3), (1.2) и (1.4) об оптимальном управлении может быть составлен расширенный критерий качества

$$(3.1) \quad J = \gamma + \sum_{k=1}^n \operatorname{Re} \sum_{j=1}^s \lambda_j^*(k) [\varphi(G_j(k-1), Q_k, \kappa_j) - G_j(k)],$$

где  $\varphi(G_j(k-1), Q_k, \kappa_j)$  — правые части условий (2.3);  $\lambda_j^i(k) = \lambda_p^j(k) - i\lambda_q^j(k)$  — комплексные множители Лагранжа. Можно видеть, что расширенный критерий качества (3.1) при выполнении условий (2.3) совпадает с рассматриваемым функционалом (1.4).

Введем последовательность комплексных функций

$$(3.2) \quad \bar{H}_\lambda(k) = \sum_{j=1}^s \lambda_j^*(k) \varphi(G_j(k-1), Q_k, \kappa_j), \quad k = 1, \dots, n,$$

тогда первая вариация функционала (3.1)

$$\delta J = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^s \left\{ \left[ \frac{\partial \gamma}{\partial p_j(n)} - i \frac{\partial \gamma}{\partial q_j(n)} \right] \delta G_j(n) - \lambda_j^*(n) \delta G_j(n) + \right. \\ \left. + \sum_{k=1}^n \left[ \frac{\partial \bar{H}_{\lambda_j}(k)}{\partial G_j(k-1)} - \lambda_j^*(k-1) \right] \delta G_j(k-1) \right\} + \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{H}_{\lambda_j}(k)}{\partial Q_k} \delta Q_k$$

может быть получена в виде

$$(3.3) \quad \delta J = \operatorname{Re} \sum_{k=1}^n \frac{\partial \bar{H}_{\lambda_j}(k)}{\partial Q_k} \delta Q_k,$$

если комплексные множители Лагранжа выбрать удовлетворяющими условиям:

$$(3.4) \quad \lambda_j^*(n) = \partial \gamma / \partial p_j(n) - i \partial \gamma / \partial q_j(n), \quad j = 1, \dots, s; \\ \lambda_j^*(k-1) = \partial \bar{H}_{\lambda_j}(k) / \partial G_j(k-1), \quad j = 1, \dots, s, \quad k = n, \dots, 1.$$

Последнее условие с учетом (3.2), (2.3) примет вид

$$(3.5) \quad \lambda_j^*(k-1) = [\lambda_j^*(k) / (1 + \operatorname{tg}^2 \psi_j^k)] [1 + i G_j(k) \delta_k^{-1} \operatorname{tg} \psi_j^k]^2, \\ j = 1, \dots, s, \quad k = n, \dots, 1.$$

Из соотношения (3.3) для вариации функционала получаем формулы для составляющих градиента критерия качества

$$(3.6) \quad \partial J / \partial Q_k = \operatorname{Re} \partial \bar{H}_{\lambda_j}(k) / \partial Q_k, \quad k = 1, \dots, n.$$

Заменяя в равенстве (3.6) комплексные функции  $\bar{H}_{\lambda_j}(k)$  их выражениями через основные переменные  $G_j(k-1)$  и множители Лагранжа  $\lambda_j^*(k)$ , получим окончательно формулы для вычисления составляющих градиента критерия качества по известным решениям прямых (1.3), (2.3) и обратных (3.4), (3.5) дискретных уравнений

$$\frac{\partial J}{\partial Q_k} = \operatorname{Re} \sum_{j=1}^s \frac{(n-i)}{2\delta_k} \left\{ \left[ \lambda_j^*(k-1) + \frac{G_j^2(k)}{\delta_k^2} \lambda_j^*(k) \right] \operatorname{tg} \psi_j^k + \left[ 1 - \frac{G_j^2(k)}{\delta_k^2} \right] \psi_j^k \lambda_j^*(k) \right\}, \\ k = 1, \dots, n.$$

**4. Алгоритм минимизации и результаты расчетов.** Рассматривалась минимизация функционала (1.4) при равномерном распределении энергии падающей волны по частотам, т. е. для случая  $e_j = 1/s$ . Предварительный анализ коэффициента отражения (1.4) как функции параметров управления  $Q_k$  ( $k = 1, \dots, n$ ) показал наличие у функционала глубоких оврагов, затрудняющих поиск оптимального решения. Подобный «рельеф» функционала характерен для задач синтеза не только акустических многослойных сред, но и оптических [7].

Для поиска оптимального решения применялась двухшаговая процедура метода сопряженных градиентов [1, 2], поскольку простейший одношаговый алгоритм наискорейшего спуска при наличии у минимизируемой функции оврагов обладает медленной сходимостью. Для данной задачи выбранный алгоритм имеет вид

$$Q^{m+1} = Q^m + \alpha_m p^m;$$

$$p_k^m = \begin{cases} -\frac{\partial J(Q^m)}{\partial Q_k} + \beta_m p_k^{m-1}, & k \notin I_m, \\ 0, & k \in I_m; \end{cases}$$

$$\alpha_m: J(Q^m + \alpha_m p^m) = \min_{0 \leq \alpha \leq \bar{\alpha}_m} J(Q^m + \alpha p^m),$$

$$\bar{\alpha}_m = \max \{ \alpha: 0 \leq Q_k^m + \alpha p_k^m \leq M, k = 1, \dots, n \};$$

$$\beta_m = \begin{cases} \frac{\sum_{k \in I_m} (\partial J(Q^m)/\partial Q_k)^2}{\sum_{k \in I_m} (\partial J(Q^{m-1})/\partial Q_k)^2}, & k \neq 0, I_m = I_{m-1}, \\ 0, & k = 0 \text{ или } I_m \neq I_{m-1}, \end{cases}$$

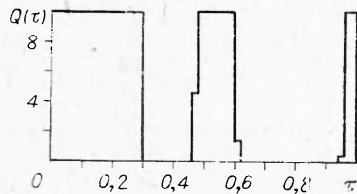
$$I_m = I_m^- \cup I_m^+;$$

$$I_m^- = \begin{cases} \{k: Q_k^m = 0, \partial J(Q^m)/\partial Q_k > 0\}, & m = 0 \text{ или} \\ \partial J(Q^m)/\partial Q_k = 0 \text{ для всех } k \notin I_m, & \\ I_{m-1}^- \cup \{k: Q_k^m = 0\} & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

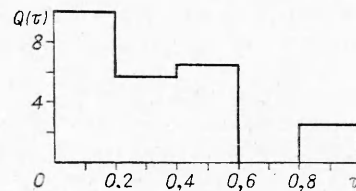
$$I_m^+ = \begin{cases} \{k: Q_k^m = M, \partial J(Q^m)/\partial Q_k < 0\}, & m = 0 \text{ или} \\ \partial J(Q^m)/\partial Q_k = 0 \text{ для всех } k \notin I_m, & \\ I_{m-1}^+ \cup \{k: Q_k^m = M\} & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

С помощью этого алгоритма синтезировался оптимальный слой с приведенной толщиной  $\tau_l = 1$  и коэффициентом поглощения  $\eta = 0,7$ . Функция управления, характеризующая конструктивные особенности материала, ограничивалась областью  $0 \leq Q(\tau) \leq 10$ . Предполагалось, что поглощающий слой прилегает к границе с нулевым адмитансом ( $p_0 = 0, q_0 = 0$ ) и подвергается воздействию плоской полигармонической волны со спектром частот:  $\kappa_1 = 1, \kappa_2 = 1,5, \kappa_3 = 2, \kappa_4 = 2,5$ .

Для реализации итерационной процедуры поиска оптимального неоднородного слоя использовалось начальное управление, соответствующее оптимальному однородному слою. Выбор большого числа параметров управления ( $n = 50$ ) позволил найти решение (фиг. 1), близкое к оп-



Ф и г. 1



Ф и г. 2

тимальному решению непрерывной задачи. При этом был достигнут коэффициент отражения по энергии  $\gamma_{\min} = 0,080056825$ . Полученный результат подтверждает релейный характер оптимального управления, о котором говорилось в п. 2.

Использование малого числа параметров ( $n = 5$ ) не позволяет выявить релейный характер оптимального управления (фиг. 2), однако яв-

ляется целесообразным, благодаря значительно меньшему времени счета и удовлетворительной оценке минимального коэффициента отражения ( $\gamma_{\min} = 0,096415685$ ).

Поступила 5 V 1975

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Поляк Б. Т. Метод сопряженных градиентов в задачах на экстремум.— ЖВММФ, 1969, т. 9, № 4, с. 807—821.
2. Скоков В. А., Орлова Л. Е. Алгоритм минимизации функций многих переменных при наличии ограничений общего вида. Ротапринт ВЦ МГУ, 1971, вып. 24.
3. Лурье К. А., Мачевариани М. М. Минимизация толщины неоднородного слоя при заданном отражении монохроматической волны.— ПМТФ, 1969, № 1, с. 44—50.
4. Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. М., «Наука», 1973.
5. Мачевариани М. М., Миронова В. Д. Минимизация толщины неоднородного поглощающего слоя при заданном модуле коэффициента отражения монохроматической волны.— ПМТФ, 1973, № 1, с. 146—151.
6. Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений.— ЖВММФ, 1966, т. 6, № 5, с. 787—823.
7. Гласко В. Б., Тихонов А. Н., Тихонравов А. В. О синтезе многослойных покрытий.— ЖВММФ, 1974, т. 14, № 1, с. 135—144.

УДК 534.28

### О ДИНАМИКЕ ТОНКИХ ПЛЕНОК В МАГНИТНОМ ПОЛЕ

*В. М. Сорокин, Г. В. Федорович*

(Москва)

Исследованы колебания тонких проводящих пленок, помещенных в магнитное поле. Выяснено влияние магнитного поля различной ориентации на эффективную упругость пленок и получены дисперсионные соотношения для продольных и поперечных волн.

Из теории упругости известно [1], что свойства волн деформаций в изотропной среде отличны от свойств волн в тонких пленках. Например, для нормальных к плоскости пленки волн деформаций появляется дисперсия, изменяется величина фазовой скорости продольной волны и т. д. Следует ожидать, что в проводящей пленке, внесенной в магнитное поле, возникнут другие моды деформаций, причем их свойства должны отличаться от свойств волн переноса магнитного поля за счет деформации в трехмерной упругой проводящей среде.

Эффекты, связанные с наличием внешнего магнитного поля  $\mathbf{H}$ , должны проявляться при гораздо меньших полях, так как характерная скорость, связанная с наличием магнитного поля возрастает с уменьшением толщины пленки. В случае тонких проводящих пленок подбором параметров можно добиться превышения магнитоупругой скорости над скоростью звука, т. е. характер распространения деформаций в пленке будет определяться в основном магнитным полем.

Рассмотрим распространение деформаций в тонкой идеально проводящей пленке толщиной  $d$ , помещенной во внешнее однородное постоян-