УДК 533.546:517.957

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ

А. Л. Казаков, А. А. Лемперт

Институт динамики систем и теории управления СО РАН, 664033 Иркутск
E-mail: kazakov@icc.ru

Рассмотрена задача о движении фронта фильтрации по нулевому фону в случае степенной зависимости коэффициента фильтрации от плотности газа, доказана теорема существования и единственности решения в классе аналитических функций. Построено решение в явном виде, получены рекуррентные формулы для вычисления коэффициентов ряда, методом мажорант доказана сходимость ряда. Предложена процедура построения фронта фильтрации.

Ключевые слова: нелинейная фильтрация, уравнения с частными производными, краевая задача, теорема существования и единственности, ряд, сходимость.

Введение. Изучение поведения ненулевого решения уравнения нелинейной фильтрации (теплопроводности, диффузии) вблизи фронта распространения возмущения по нулевому фону и его взаимосвязи с законом движения фронта является актуальной задачей как с теоретической точки зрения (доказательство теорем существования и единственности решения), так и с точки зрения приложений, поскольку это уравнение представляет собой математическую форму закона Дарси фильтрации газа в пористой среде [1]. Вообще говоря, данное уравнение является уравнением параболического типа, однако, если искомая функция обращается в нуль, слагаемое, содержащее старшую производную, также зануляется, и тип уравнения меняется. Поэтому рассматриваемый случай является особым. В частности, возможно распространение возмущений с конечной скоростью, т. е. параболическое уравнение приобретает свойства, характерные для гиперболических уравнений. Впервые такие свойства для нелинейных тепловых волн обнаружены в работе [2]. Для задач фильтрации близкие результаты получены в 50-х гг. XX в. [1]. В абстрактных функциональных пространствах подобные задачи рассматривались в работе [3]. В классе аналитических функций задача с заданным краевым режимом при наличии вырождения впервые изучена в [4].

Заметим, что для уравнения нелинейной фильтрации (теплопроводности) получен также ряд точных автомодельных решений, описывающих тепловые волны, которые движутся с конечной скоростью при неограниченном возрастании температуры [5]. Эффективным методом исследования уравнений с частными производными, в том числе параболического типа, является метод группового анализа (см., например, [6, 7]). С помощью метода лагранжевых координат вырождающиеся параболические уравнения исследовались

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 11-07-00245, 12-07-33045_мол_а_вед, 12-07-13116_ОФИ_м_РЖД).

в работе [8], там же рассмотрены задача Веригина и задача Стефана (предельный случай задачи Веригина), получены новые точные решения.

Достаточно полно исследования уравнения нелинейной фильтрации представлены в [9], однако в этой работе отсутствуют построения решений уравнения нелинейной фильтрации с вырождением в классе аналитических функций [10] (возможно, они не были известны автору).

Данная работа является продолжением [4] и других работ [10–13]. При этом в настоящей работе подход, примененный ранее (см., например, [14]) при исследовании краевых задач для системы уравнений газовой динамики (уравнений гиперболического типа), распространяется на случай уравнения параболического типа с вырождением. Доказана теорема существования и единственности решения начально-краевой задачи для уравнения нелинейной фильтрации со степенной зависимостью коэффициента фильтрации от плотности. Установлено, что ряд полученных ранее результатов [10, 11, 13] являются специальными частными случаями доказанной теоремы. При этом в отличие от [4, 11] решение получено в явном виде.

1. Постановка задачи. Рассмотрим уравнение нелинейной фильтрации со степенной зависимостью коэффициента фильтрации от плотности $K(P) = \alpha P^\sigma$:

$$P_t = \alpha \operatorname{div}(P^\sigma \nabla P). \tag{1}$$

Здесь $P = P(t, \boldsymbol{x})$ — искомая функция (плотность газа); t — время; $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3)$ — вектор пространственных координат; div, ∇ — операторы дивергенции и градиента по пространственным координатам; показатель адиабаты (политропы) $\sigma > 0$ и $\alpha > 0$ — известные положительные константы, определяющие свойства среды.

В результате стандартной замены $u = P^\sigma$, $t' = \alpha t$ уравнение (1) преобразуется к виду

$$u_t = u\Delta u + (\nabla u)^2/\sigma. \tag{2}$$

В задаче фильтрации величина u является давлением газа в пористой среде (с точностью до постоянного множителя).

В случае если $u = 0$, коэффициент перед старшими производными обращается в нуль и тип уравнения (2) меняется.

Будем рассматривать плоскосимметричный случай, т. е. предполагать, что $\partial/\partial x_2 = \partial/\partial x_3 = 0$. Тогда уравнение (2) принимает вид ($x = x_1$)

$$u_t = uu_{xx} + (u_x)^2/\sigma. \tag{3}$$

Для уравнения (3) поставим краевую задачу

$$u\big|_{x=a(t)} = u_0(t,x)\big|_{x=a(t)} = f(t), \qquad a(0) = 0, \quad u_0(0,0) = f(0) = 0, \tag{4}$$

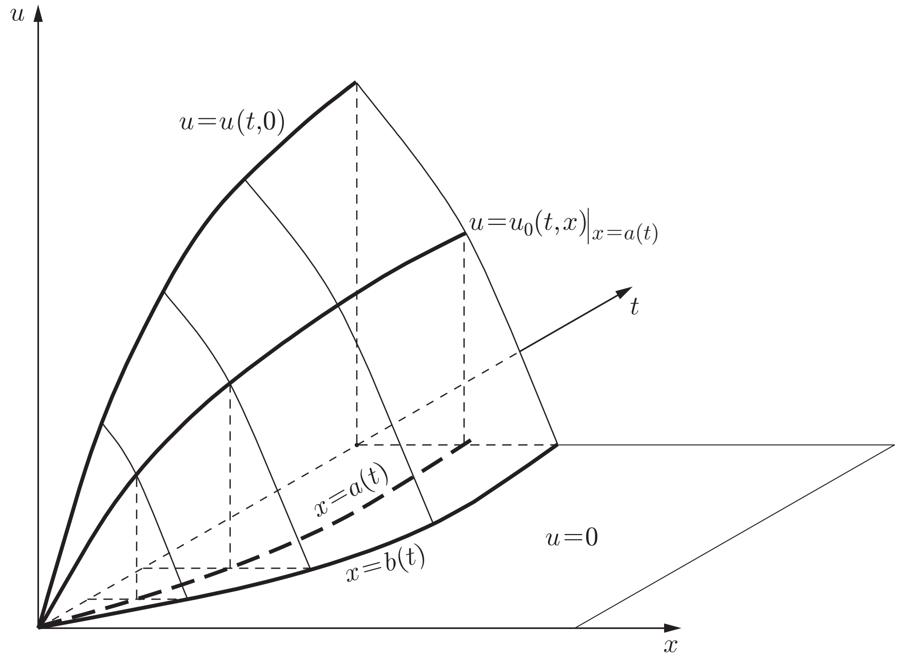
где известные функции $a(t)$, $u_0(t,x)$ являются аналитическими. В работах [10, 11] для уравнения (3) исследовались краевые задачи

$$u\big|_{x=b(t)} = 0, \qquad b(0) = 0, \quad b'(0) \ne 0; \tag{5}$$

$$u\big|_{x=0} = f(t), \qquad f(0) = 0, \quad f'(0) > 0, \tag{6}$$

где $b(t)$, $f(t)$ — известные аналитические в некоторой окрестности нуля функции. Задача (3), (6) называется также задачей А. Д. Сахарова об инициировании тепловой волны [10. С. 10]. Для таких задач доказаны теоремы существования и единственности нетривиальных решений в классе аналитических функций. Нетрудно показать, что данные задачи являются специальными частными случаями задачи (3), (4).

Построение решения уравнения (3) можно рассматривать как построение поверхности $u = u(t,x)$, проходящей через начало координат, в пространстве переменных t, x, u.



Поверхность $u = u(t, x)$ в пространстве переменных t, x, u

В сечении этой поверхности плоскостью Out выполняется условие (5), в сечении плоскостью Oxt — условие (6), в сечении цилиндрической поверхностью $x = a(t)$ — условие (4) (см. рисунок). Решение задачи (3), (4) описывает движение газа в пористом грунте, при котором источник возмущения и фронт фильтрации перемещаются с конечными скоростями.

2. Построение решения. Прежде чем строить решение задачи (3), (4) в виде кратного степенного ряда, сформулируем вспомогательное утверждение, которое потребуется в дальнейшем.

Лемма. *Пусть имеются числовые последовательности* α_k, γ_k, $k = 0, 1, \ldots$. *Введем следующие обозначения:* $\lambda_0^{(n+1)} = 1$, $\lambda_1^{(n+1)} = \gamma_0$, $\lambda_{k+1}^{(n+1)} = \gamma_k \lambda_k^{(n+1)} + \alpha_{n+1-k}\lambda_{k-1}^{(n+1)}$. *Если* $\gamma_n > 0$, $\alpha_n \geqslant 0$, *то* $\lambda_k^{(n+1)} > 0$ *при всех* $n \in \mathbb{N}$ *и* $k = 1, \ldots, n + 1$.

Доказательство леммы в данной работе не приводится.

Далее доказывается следующая теорема.

Теорема. *Если функции* $a(t)$, $f(t)$ *являются аналитическими в окрестности* $t = 0$ *и* $[a'(0)]^2 + [f'(0)]^2 \neq 0$, *то задача* (3), (4) *при заданном направлении движения фронта фильтрации имеет единственное аналитическое решение в окрестности точки* $(t = 0, x = 0)$.

Доказательство. Выполним в задаче (3), (4) замену переменных

$$\tau = t, \qquad z = x - a(t). \tag{7}$$

Якобиан замены (7) $J = 1$, т. е. эта замена невырожденная. При такой замене задача (3), (4) принимает вид

$$\begin{gathered} u_\tau = a'(\tau)u_z + uu_{zz} + u_z^2/\sigma, \\ u\big|_{z=0} = f(\tau), \end{gathered} \tag{8}$$

где $f(\tau) = u_0(\tau, a(\tau))$.

Из аналитичности функций $a(t)$ и $u_0(t,x)$ следует, что функция $f(\tau)$ также является аналитической в некоторой окрестности точки $\tau = 0$, т. е. функции $a(\tau)$ и $f(\tau)$ могут быть разложены в сходящиеся ряды

$$f(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k \,\frac{\tau^k}{k!}, \quad f_k = \frac{d^k f}{d\tau^k}\Big|_{z=0}, \qquad a(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \,\frac{\tau^k}{k!}, \quad a_k = \frac{d^k a}{d\tau^k}\Big|_{z=0}.$$

Решение задачи (8) будем искать в виде

$$u = \sum_{k=0,\ l=0}^{\infty} u_{k,l} \,\frac{\tau^k}{k!}\,\frac{z^l}{l!}, \qquad u_{k,l} = \frac{\partial^{k+l} u}{\partial\tau^k\,\partial z^l}\Big|_{\substack{\tau=0,\\ z=0}}, \tag{9}$$

где коэффициенты ряда определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n = k + l$.

Установим базу индукции: $u_{0,0} = f_0 = 0$, $u_{1,0} = f_1$.

Полагая в уравнении (8) $\tau = z = 0$, определим $u_{0,1}$ из квадратного уравнения $u_{0,1}(u_{0,1}/\sigma + a'(0)) = f_1$, имеющего корни

$$u_{0,1} = u_{\pm} = -\sigma a_1/2 \pm \sqrt{\sigma^2 a_1^2/4 + f_1\sigma}.$$

Формально знаки $u_{1,0}$ и $u_{0,1}$ не имеют значения, однако с учетом физического смысла задачи примем $a_1 \geqslant 0$, $f_1 \geqslant 0$, $u_{0,1} < 0$, т. е. $u_{0,1} = u_-$ (тем самым задается направление движения фронта фильтрации).

Дифференцируя уравнение (8) по z и по τ, с учетом равенства $u_{2,0} = f_2$ получаем

$$u_{0,2} = \frac{-a_1 u_{0,1} + f_2}{\mu_2}, \qquad u_{1,1} = \frac{(a_1 u_{0,1} - f_2)[(2/\sigma + 1)u_{0,1} + a_1]}{\mu_2}.$$

Нетрудно показать, что знаменатель дробей положителен:

$$\mu_2 = (2u_{0,1}/\sigma + a_1)[(2/\sigma + 1)u_{0,1} + a_1] - f_1 > 0.$$

Пусть известны $u_{k,l}$ при $k + l = 2, \ldots, n$. Найдем $u_{k,n+1-k}$. Из краевых условий следует $u_{n+1,0} = f_{n+1}$. Для определения остальных коэффициентов порядка $n + 1$ выполним дифференцирование системы (8) k раз по τ и $n - k$ раз по z, полагая при этом $\tau = 0$, $z = 0$. После приведения подобных слагаемых получаем

$$\begin{gathered} -[u_{0,1}(n + 2/\sigma) + a_1]u_{0,n+1} + u_{1,n} = p_{0,n}, \\ -k u_{1,0} u_{k-1,n-k+2} - [u_{0,1}(n - k + 2/\sigma) + a_1]u_{k,n+1-k} + u_{k+1,n-k} = p_{k,n-k}, \\ k = 1, \ldots, n-1, \\ -n u_{1,0} u_{n-1,2} - (2u_{0,1}/\sigma + a_1)u_{n,1} = p_{n,0}. \end{gathered} \tag{10}$$

Иными словами, имеем систему линейных алгебраических уравнений

$$A_{n+1}\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{p}_n, \tag{11}$$

где $\boldsymbol{u}_{n+1} = (u_{0,n+1}, u_{1,n}, \ldots, u_{n,1})^{\mathrm{т}}$ — вектор неизвестных; вектор $\boldsymbol{p}_n = (p_{0,n}, p_{1,n-1}, \ldots, p_{n,0})^{\mathrm{т}}$ и матрица A_{n+1} известны.

Пусть

$$\gamma = -\frac{2}{\sigma}\,u_{0,1} - a_1 = \frac{2}{\sigma}\sqrt{\frac{\sigma^2 a_1^2}{4} + f_1\sigma} > 0,$$

$$\beta = -u_{0,1} > 0, \qquad \alpha = u_{1,0} > 0, \qquad \gamma_n = \gamma + n\beta, \qquad \alpha_n = n\alpha.$$

Тогда матрица системы линейных алгебраических уравнений (11) записывается в виде

$$A_{n+1} = \begin{pmatrix} \gamma_n & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\alpha_1 & \gamma_{n-1} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & -\alpha_2 & \gamma_{n-2} & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_{n-1} & \gamma_1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & -\alpha_n & \gamma_0 \end{pmatrix}.$$

Сделаем ряд замечаний: условие диагонального преобладания для матрицы A_{n+1} не выполняется; матрица, имеющая сходную (но не тождественную) структуру, получается при решении краевых задач для квазилинейной системы уравнений газовой динамики [14, 15], являющейся системой гиперболического типа; в работах [10, 11] описана принципиальная схема построения решения, при этом коэффициенты рядов в явном виде не определяются (кроме случая $f(t) \equiv 0$).

В системе (11) величины $p_{i,j}$ вычисляются по формулам

$$p_{0,n} = \sum_{i=2}^{n} C_n^i u_{0,i} u_{0,n-i+2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i u_{0,n-i+1} u_{0,n-i+1},$$

$$p_{k,n-k} = \sum_{\substack{i=0 \\ i+j\leqslant n-2}}^{k} \sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j} u_{i,j+2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{\substack{i=0 \\ i+j\neq 0,}}^{k} \sum_{\substack{j=0 \\ i+j\neq n}}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i,j+1} u_{k-i,n-k-j+1} +$$
$$+ \sum_{i=1}^{k} C_k^i a_{i+1} u_{k-i,n-k+1}, \qquad k = 1, \dots, n-1,$$

$$p_{n,0} = \sum_{i=1}^{n} C_n^i a_{i+1} u_{n-i,1} + \sum_{i=2}^{n} C_n^i u_{i,0} u_{n-i,2} + \frac{1}{\sigma} \sum_{i=1}^{n-1} C_n^i u_{n-i,1} u_{i,1} - f_{n+1},$$

справедливость которых доказывается по индукции.

Определим $\eta_k^{(n+1)}$ следующим образом: $\eta_0^{(n+1)} = 1$, $\eta_1^{(n+1)} = \gamma_n$, $\eta_{k+1}^{(n+1)} = \gamma_{n-k}\eta_k^{(n+1)} + \alpha_k \eta_{k-1}^{(n+1)}$. С учетом введенных обозначений решение системы (11) принимает вид

$$u_{0,n+1} = \frac{1}{\mu_{n+1}} [p_{n,0}\lambda_0^{(n+1)}(-1)^n + p_{n-1,1}\lambda_1^{(n+1)}(-1)^{n-1} + \dots + p_{0,n}\lambda_n^{(n+1)}(-1)^0],$$

$$u_{n-k,k+1} = \frac{1}{\mu_{n+1}} \Big(p_{n,0}(-1)^k \eta_{n-k}^{(n+1)} \lambda_0^{(n+1)} + p_{n-1,1}(-1)^{k-1} \eta_{n-k}^{(n+1)} \lambda_1^{(n+1)} + \dots$$
$$\dots + p_{n-k,k} \eta_{n-k}^{(n+1)} \lambda_k^{(n+1)} + p_{n-k-1,k+1} \eta_{n-k-1}^{(n+1)} \lambda_k^{(n+1)} \alpha_{n-k} + \tag{12}$$
$$+ p_{n-k-2,k+2} \eta_{n-k-2}^{(n+1)} \lambda_k^{(n+1)} \alpha_{n-k-1} + \dots + p_{0,n} \lambda_k^{(n+1)} \eta_0^{(n+1)} \prod_{i=n-k}^{1} \alpha_i \Big),$$
$$k = n-1, \dots, 1.$$

Здесь $\mu_{n+1} = \det A_{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$. Индукцией по n устанавливается, что $\mu_{n+1} = \lambda_{n+1}^{(n+1)}$, следовательно, в силу леммы $\mu_{n+1} > 0$, т. е. система (11) однозначно разрешима. Процедура вывода (12) является громоздкой и поэтому в данной работе не приводится.

Докажем сходимость построенного решения. Сначала получим некоторые вспомогательные оценки. Пусть $\|u_k\| = \max\{|u_{i,k-i}|\}$. Тогда

$$\Big|\sum_{\substack{i=0\\ i+j\leqslant n-2}}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{k-i,n-k-j} u_{i,j+2}\Big| \leqslant \sum_{\substack{i=0\\ i+j\leqslant n-2}}^{k}\sum_{j=0}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j \|u_{k-i-j}\|\|u_{i+j+2}\| =$$

$$= \sum_{m=0}^{n-2}\Big(\sum_{l=0}^{m} C_k^l C_{n-k}^{m-l}\Big)\|u_{n-m}\|\|u_{m+2}\| = \sum_{m=0}^{n-2} C_n^m \|u_{n-m}\|\|u_{m+2}\|. \qquad (13)$$

Аналогично получаем

$$\Big|\sum_{\substack{i=0\\ i+j\neq 0,}}^{k}\sum_{\substack{j=0\\ i+j\neq n}}^{n-k} C_k^i C_{n-k}^j u_{i,j+1} u_{k-i,n-k-j+1}\Big| \leqslant \sum_{m=1}^{n-1} C_n^m \|u_{m+1}\|\|u_{n-m+1}\|,$$

$$\Big|\sum_{i=1}^{k} C_k^i a_{i+1} u_{k-i,n-k+1}\Big| \leqslant \sum_{i=1}^{n} C_n^i |a_{i+1}|\|u_{n-i+1}\|. \qquad (14)$$

Выполним замену переменных $z' = z$, $\tau' = \tau\varepsilon$. В результате система (11) преобразуется следующим образом: элементы поддиагонали матрицы A_{n+1} делятся на ε, остальные элементы не изменяются. Такая замена позволяет при надлежащем выборе ε с учетом (13), (14) оценить правые части соотношений (12):

$$\|u_{n+1}\| \leqslant \frac{M_1}{n}\Big(\sum_{m=0}^{n-2} C_n^m \|u_{n-m}\|\|u_{m+2}\| + \frac{1}{\sigma}\sum_{m=1}^{n-1} C_n^m \|u_{m+1}\|\|u_{n-m+1}\| + \sum_{i=1}^{n} C_n^i |a_{i+1}|\|u_{n-i+1}\| + |f_{n+1}|\Big),$$

где $M_1 \geqslant 1$ — константа.

Оценка, полученная для $\|u_{n+1}\|$, позволяет выбрать мажорантную задачу в виде

$$\xi U'' = M[UU'' + (U')^2/\sigma + A(\xi)U' + F(\xi)], \qquad U(0) = 0, \qquad U'(0) = 0, \qquad (15)$$

где A, F — мажорирующие $a'(t) - a_1$ и $f(t) - f_1$ функции; $A_0 = 0$; $F_0 = 0$; $F_n \geqslant |f_{n+1}|$; $A_n \geqslant |a_{n+1}|$; $n \geqslant 1$. Решение задачи (15) строится в виде ряда

$$U(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n \frac{\xi^n}{n!}.$$

Производные $U_n = U^{(n)}(0)$ однозначно определяются индукцией по n и при надлежащем выборе $M \geqslant M_1$ обладают свойством

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 0, \qquad U_n \geqslant \|u_n\|, \quad n \geqslant 2. \qquad (16)$$

Действительно, $U_2 = MF_1 \geqslant |f_2| = |u_{2,0}|$, поэтому за счет выбора M можно добиться выполнения неравенства $U_2 \geqslant |u_{i,2-i}|$, $i = 0, 1$. Пусть $U_k \geqslant \|u_k\|$, $k = 2, \ldots, n$. Тогда, выполнив дифференцирование уравнения (15) n раз по ξ и положив $\xi = 0$, получаем

$$nU_{n+1} = M\Big(\sum_{m=2}^{n} C_n^m \|u_m\|\|u_{n+2-m}\| + \sum_{m=1}^{n-1} \|u_{m+1}\|\|u_{n+1-m}\| + \sum_{m=1}^{n} A_m U_{n-m+1} + F_n\Big).$$

Из предположения метода индукции, полученных ранее оценок и определения функций $A(\xi)$ и $F(\xi)$ следует, что $|U_{n+1}| \geqslant \|u_{n+1}\|$, $n \geqslant 1$.

Докажем, что задача (15) имеет единственное аналитическое решение.

Перейдем к новой искомой функции V по формуле $U = \xi^2 V$. Производные функции U имеют вид $U' = \xi^2 V' + 2\xi$, $U'' = \xi^2 V'' + 2\xi V' + 2V''$. Так как функции $F(\xi)$ и $A(\xi)$ можно представить в виде $F(\xi) = \xi F^*(\xi)$ и $A(\xi) = \xi A^*(\xi)$, где $F^*(\xi)$, $A^*(\xi)$ — аналитические функции, то уравнение (15) после сокращения на ξ и приведения подобных записывается в виде

$$2V + 2\xi V' + \xi^2 V'' = g_0(\xi) + \xi g_1(\xi, V) + \xi^2 g_2(\xi, V, V') + \xi^3 g_3(\xi, V, V', V''), \tag{17}$$

где g_i $(i = 0, \ldots, 3)$ — аналитические функции. Тогда

$$V_0 = \frac{g_0(0)}{2}, \quad V_1 = \frac{g_0'(0) + g_1(0, V_0)}{4}, \quad V_2 = \frac{g_0''(0) + 2g_1'(0, V_0) + 2g_2(0, V_0, V_1)}{10}, \quad \ldots,$$

$$V_n = \frac{1}{2 + 2n + n(n-1)}\left[g_0^{(1)}(\xi) + ng_1^{(n-1)} + n(n-1)g_2^{(n-2)} + \right.$$
$$\left. + n(n-1)(\xi g_3)^{(n-2)}\right]\Big|_{\xi=0}, \quad \ldots.$$

Построим мажоранту W для функции V.

Поскольку $n(n-1)/[2 + 2n + n(n-1)] < 1$, для уравнения (17) строится следующая мажорантная задача:

$$W'' = \xi G_3(\xi, W, W', W'') + G_2(\xi, W, W') + \frac{\partial G_1(\xi, W)}{\partial \xi} + \frac{\partial G_1(\xi, W)}{\partial W} W' + G_0''(\xi),$$
$$W(0) = W_0, \qquad W'(0) = W_1. \tag{18}$$

Здесь $G_i \gg g_i$, $i = 0, 1, 2, 3$.

Если продифференцировать обе части уравнения (18) по ξ и представить уравнение в явном виде относительно W''', то при $W(0) = W_0 > |V_0|$, $W'(0) = W_1 > |V_1|$, $W''(0) = W_2 > |V_2|$ получим задачу Коши, которая согласно теореме Коши имеет единственное аналитическое решение. Отсюда следует аналитичность функций $V(\xi)$ и $U(\xi)$. Последняя в свою очередь в силу (16) обладает свойством

$$U(t + x) \gg u(t, x) - u_{1,0}t - u_{0,1}x.$$

Теорема доказана.

3. Построение фронта фильтрации. Недостатком ряда (8) является то, что при его использовании трудно построить фронт фильтрации, т. е. линию $x = b(t)$, разделяющую на плоскости Oxt области возмущенного и фонового тривиального решений. Действительно, в случае, когда функция $u(t, x)$ представлена в виде ряда с рекуррентно вычисляемыми коэффициентами, решение уравнения $u = 0$ затруднено. Ниже предлагается процедура, позволяющая представить функцию $b(t)$ в виде степенного ряда.

Выполним в уравнении (3) замену переменных $s = t$, $y = x - b(t)$. Данная замена аналогична (7) с той разницей, что функция $b(t)$ неизвестна, однако из (4) следует, что $b(0) = 0$. Подобного рода замены нередко применяются при исследовании краевых задач для нелинейных уравнений с частными производными (см., например, [14, 15]).

В результате замены задача (3), (4) принимает вид

$$u_s = b'(s)u_y + uu_{yy} + u_y^2/\sigma,$$
$$u\big|_{y=0} = 0, \qquad u\big|_{y=a(s)-b(s)} = f(s), \qquad b(0) = 0. \tag{19}$$

Решение задачи (19) будем искать в виде

$$u(s,y)=\sum_{k=0,\ l=0}^{\infty} v_{k,l}\,\frac{s^k}{k!}\,\frac{y^l}{l!},\qquad v_{k,l}=\frac{\partial^{k+l}u}{\partial s^k\,\partial y^l}\Big|_{\substack{s=0,\\ y=0}},$$
$$b(s)=\sum_{n=0}^{\infty} b_n\,\frac{s^n}{n!},\qquad b_n=\frac{d^nb}{ds^n}\Big|_{s=0}. \tag{20}$$

Коэффициенты рядов (20) определяются индукцией по суммарному порядку дифференцирования $n = k + l$.

Из граничных условий следует, что $b_0 = 0$, $v_{k,0} = 0$, $k = 0, 1, \ldots$. В частности, $v_{0,0} = 0$, $v_{1,0} = 0$. Чтобы определить $v_{0,1}$, b_1, полагая в уравнении (19) $s = y = 0$ и дифференцируя второе краевое условие, получаем систему нелинейных алгебраических уравнений

$$b_1v_{0,1}+v_{0,1}^2/\sigma=0,\qquad v_{0,1}(a_1-b_1)=f_1. \tag{21}$$

С учетом физического смысла задачи решение (21) имеет вид

$$v_{0,1}=-\frac{\sigma a_1-\sqrt{a_1^2\sigma^2+4f_1\sigma}}{2},\qquad b_1=\frac{a_1}{2}+\sqrt{\frac{a_1^2}{4}+\frac{f_1}{\sigma}}.$$

Следует отметить два частных случая: 1) $f_1 = 0$, $a_1 \neq 0$; 2) $a_1 = 0$, $f_1 \neq 0$. В первом случае решение (21) имеет вид $b_1 = a_1$, $v_{0,1} = -\sigma a_1$, т. е. линии $a(t)$ и $b(t)$ имеют общую касательную в начальный момент времени $t = 0$. Во втором случае $v_{0,1} = -\sqrt{f_1\sigma}$, $b_1 = \sqrt{f_1/\sigma}$.

Для определения коэффициентов b_n, $v_{n-1,1}$, $v_{n-2,2}$, …, $v_{0,n}$ при каждом n решается система линейных алгебраических уравнений с двухдиагональной матрицей и ненулевым определителем. Определение этих коэффициентов соответствует построению рядов (20), в том числе функции $b(t)$.

Заключение. Результаты проведенного исследования позволяют сделать следующие выводы.

Для задачи (3), (4), описывающей, в частности, нелинейную фильтрацию политропного газа в пористой среде, построены новые точные решения в классе аналитических функций.

Доказана теорема существования и единственности решения рассмотренной начально-краевой задачи. Эта теорема, в частности, обобщает ряд утверждений, доказанных ранее для подобных задач [10, 11].

Решена задача, поставленная в работе [13], а именно устранено основное сформулированное в ней ограничение. Поэтому полученные в данной работе достаточные условия существования решения, по-видимому, близки к необходимым.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Баренблатт Г. И.** Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа / Г. И. Баренблатт, В. М. Ентов, В. М. Рыжик. М.: Недра, 1972.
2. **Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.** К теории распространения тепла при теплопроводности, зависящей от температуры // Сборник, посвященный 70-летию А. Ф. Иоффе. М.: Изд-во АН СССР, 1950. С. 61–71.
3. **Олейник О. А., Калашников А. С., Чжоу Юй-линь.** Задача Коши и краевые задачи для уравнений типа нестационарной фильтрации // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1958. Т. 22. С. 667–704.

4. **Сидоров А. Ф.** Аналитические представления решений нелинейных параболических уравнений типа нестационарной фильтрации // Докл. АН СССР. 1985. Т. 280, № 1. С. 47–51.
5. **Самарский А. А.** Режимы с обострением в задачах для квазилинейных параболических уравнений / А. А. Самарский, В. А. Галактионов, С. П. Курдюмов, А. П. Михайлов. М.: Наука, 1987.
6. **Андреев В. К.** Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике / В. К. Андреев, О. В. Капцов, В. В. Пухначев, А. А. Родионов. Новосибирск: Наука. Сиб. издат. фирма, 1994.
7. **Andreev V. K.** Application of group-theoretical methods in hydrodynamics / V. K. Andreev, O. V. Kaptsov, V. V. Pukhnachov, A. A. Rodionov. Dordrecht; Boston; L.: Kluwer Acad. Publ., 1998.
8. **Meirmanov A. M.** Evolution equations and lagrangian coordinates / A. M. Meirmanov, S. I. Shmarev, V. V. Pukhnachev. Berlin; N. Y.: Walter de Gruyter and Co, 1997.
9. **Vazquez J. L.** The porous medium equation: mathematical theory. Oxford: Oxford Press, 2006.
10. **Сидоров А. Ф.** Избранные труды: Математика. Механика. М.: Физматлит, 2001.
11. **Баутин С. П.** Аналитическая тепловая волна. М.: Физматлит, 2003.
12. **Казаков А. Л.** Применение характеристических рядов для построения решений нелинейных параболических уравнений и систем с вырождением // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2012. Т. 18, № 2. С. 114–122.
13. **Казаков А. Л., Лемперт А. А.** Аналитическое и численное исследование одной краевой задачи нелинейной фильтрации с вырождением // Вычисл. технологии. 2012. Т. 17, № 1. С. 57–68.
14. **Казаков А. Л., Лемперт А. А.** Аналитическое и численное исследование обобщенных задач Коши, возникающих в газовой динамике // ПМТФ. 2011. Т. 52, № 3. С. 30–40.
15. **Тешуков В. М.** О регулярном отражении ударной волны от жесткой стенки // Прикл. математика и механика. 1982. Т. 46, № 2. С. 225–234.

Поступила в редакцию 8/VIII 2012 г.