

УСТОЙЧИВОСТЬ ПЛАМЕНИ В СИСТЕМЕ С ПРОТИВОТОЧНЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ

Р. В. Фурсенко, С. С. Минаев

Институт теоретической и прикладной механики СО РАН, 630090 Новосибирск, minaev@itam.nsc.ru

В рамках одномерной модели описано распространение двух фронтов пламени смеси газов в смежных каналах с противоположно направленными потоками газа. Построены стационарные решения задачи, исследована их устойчивость относительно малых возмущений. Найдены области параметров задачи, характеризующие уровень теплопотерь, состав смеси, скорость потока газа и другие, при которых возможна стабилизация пламени. Найдены условия, при которых возможны пульсации пламени. Показана возможность горения за пределами бедных смесей газов в такой системе, даже если диаметры каналов меньше критического значения, соответствующего начальной температуре.

Ключевые слова: микрогорение, системы с избытком энтальпии, противоточный теплообмен, устойчивость пламени.

ВВЕДЕНИЕ

В связи с появившейся в последнее время тенденцией к миниатюризации горелочных устройств возникла необходимость исследования процессов горения газов в узких каналах. Согласно предсказаниям классической теории пределов распространения пламени [1, 2], распространение пламени в канале невозможно, если поперечный размер канала меньше некоторого критического значения. Это является одним из препятствий на пути создания миниатюрных горелочных устройств. С другой стороны, перенос тепла по стенкам камеры за счет теплопроводности или подогрев стенок от внешних источников могут поддерживать процесс горения в камере с пространственным размером меньше критического диаметра, определенного по температуре окружающей среды.

В работах [3, 4] теоретически и экспериментально исследовалось распространение пламени в узком канале с теплопроводящими стенками. Было показано, что учет подогрева стенок канала за счет рециркуляции тепла приводит к расширению пределов распространения пламени. Другим способом расширения пределов существования пламени может быть подогрев стенок канала за счет внешних источников. В работах [5, 6] рассматривалось тепловое взаимодействие двух фронтов пламени, распространяющихся в каналах с противоположно направленными потоками газа. В такой системе, являющейся упрощенным вариантом горелки «Swiss roll» [7], регенерация тепла про-

исходит за счет конвективного переноса тепла. Схожей системой является U-образная трубка, в которой продукты горения могут передавать тепло к свежей смеси через стенки трубки. При отсутствии теплопотерь в колене процессы горения в U-образной трубке и в противоточном теплообменнике могут быть описаны в рамках одной математической модели.

Повышение температуры свежего газа, обусловленное взаимным подогревом газов через теплопроводную перегородку, приводит к расширению пределов существования пламени. В теоретических исследованиях [5, 6] было показано, что стационарная модель допускает существование нескольких решений при одних и тех же параметрах задачи. Хотя оценки устойчивости стационарных режимов горения в системе со встречной фильтрацией и проводились в работе [5], однако эти исследования ограничивались случаем медленной эволюции фронта пламени. Целью данной работы является исследование линейной устойчивости различных стационарных режимов горения в системе с противоположно направленными потоками газа и обменом тепла через разделяющую перегородку.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Схема горения газа в плоских каналах с противоположно направленными потоками газа приведена на рис. 1. Расстояние между стенками каналов одинаково и равно d_0 . Газ движется вдоль оси x со скоростью V в верхнем и

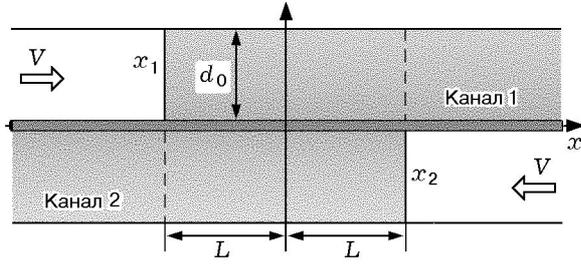


Рис. 1. Схема двух пламен в плоских каналах с противоположно направленными потоками газа: серым цветом выделены области продуктов горения

— V в нижнем канале. Пламя представляет собой фронт химической реакции, который разделяет свежую смесь и продукты горения. Положение фронта пламени в верхнем канале задано уравнением $x = x_1(t)$, а в нижнем — $x = x_2(t)$. Считается, что плотность, давление газа, температуропроводность и коэффициент диффузии постоянны. Предполагается однородность потока газа по поперечной координате. Теплопроводностью вдоль инертного каркаса пренебрегается. В этих предположениях распределения температуры газа и концентрации недостающего компонента свежей смеси описываются одномерной системой дифференциальных уравнений [4, 5]:

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T_1}{\partial t} + V \frac{\partial T_1}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} - \frac{\alpha'}{d_0} (T_1 - T_2) - \frac{\alpha''}{d_0} T_1 + Q W_1(T_1, Y_1), \quad (1)$$

$$\frac{\partial Y_1}{\partial t} + V \frac{\partial Y_1}{\partial x} = k \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x^2} - W_1(T_1, Y_1), \quad (2)$$

$$c_p \rho \left(\frac{\partial T_2}{\partial t} - V \frac{\partial T_2}{\partial x} \right) = \lambda \frac{\partial^2 T_2}{\partial x^2} - \frac{\alpha'}{d_0} (T_2 - T_1) - \frac{\alpha''}{d_0} T_2 + Q W_2(T_2, Y_2), \quad (3)$$

$$\frac{\partial Y_2}{\partial t} - V \frac{\partial Y_2}{\partial x} = k \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x^2} - W_2(T_2, Y_2), \quad (4)$$

с граничными условиями

$$x \rightarrow +\infty: \quad T_{1,2} \rightarrow T_0, \quad Y_1 = 0, \quad Y_2 \rightarrow Y_0,$$

$$x \rightarrow -\infty: \quad T_{1,2} \rightarrow T_0, \quad Y_1 \rightarrow Y_0, \quad Y_2 = 0.$$

Распределения температуры газа и концентрации недостающего компонента свежей смеси описываются уравнениями (1), (2) в верхнем канале и уравнениями (3), (4) — в нижнем. Здесь T_1, T_2 — температуры газа в верхнем и нижнем каналах соответственно; c_p, ρ — удельная теплоемкость газа при постоянном давлении и плотность газа; λ — теплопроводность газа; Y_1, Y_2 — концентрации недостающего компонента свежей смеси в верхнем и нижнем каналах; k — коэффициент диффузии недостающего компонента; $Q = c_p(T_b - T_0)$ — теплота реакции; T_b — адиабатическая температура плоского пламени для данной смеси газов; T_0 — начальная температура свежей смеси; α' — коэффициент теплообмена между внутренней стенкой и газом; α'' — коэффициент теплообмена между наружной стенкой и газом; $W_{1,2}(T, Y)$ — скорости химической реакции в верхнем и нижнем каналах соответственно.

В системе (1)–(4) удобно перейти к следующим безразмерным переменным:

$$\tau = \frac{t \lambda}{\rho c_p U_b^2}, \quad z = \frac{x \rho c_p U_b}{\lambda}, \quad v = \frac{V}{U_b}, \quad (5)$$

$$C_{1,2} = \frac{Y_{1,2}}{Y_0}, \quad \theta_{1,2} = \frac{T_{1,2} - T_0}{T_b - T_0}.$$

Система уравнений (1)–(4) в безразмерных переменных (5) принимает вид:

$$\frac{\partial \theta_1}{\partial \tau} + v \frac{\partial \theta_1}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial z^2} - H(\theta_1 - \theta_2) - K \theta_1 + Q w_1(\theta_1, C_1), \quad (6)$$

$$\frac{\partial \theta_2}{\partial \tau} - v \frac{\partial \theta_2}{\partial z} = \frac{\partial^2 \theta_2}{\partial z^2} - H(\theta_2 - \theta_1) - K \theta_2 + Q w_2(\theta_2, C_2), \quad (7)$$

$$\frac{\partial C_{1,2}}{\partial \tau} \pm v \frac{\partial C_{1,2}}{\partial z} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 C_{1,2}}{\partial z^2} - w_{1,2}(\theta_{1,2}, C_{1,2}). \quad (8)$$

Здесь $Le = \frac{\lambda}{k \rho c_p}$ — число Льюиса; $H = \frac{\alpha' \lambda}{d_0 \rho^2 c_p^2 U_b^2}$; $K = \frac{\alpha'' \lambda}{d_0 \rho^2 c_p^2 U_b^2}$; U_b — нормальная

скорость распространения плоского адиабатического пламени.

Предполагается аррениусовская зависимость скорости химической реакции от температуры $w(T, Y) \sim \exp(E/RT)$. При условии, что безразмерная энергия активации $N = E/RT_b \gg 1$, можно считать, что тепловыделение и поглощение недостающего компонента свежей смеси происходят на поверхности, разделяющей свежую смесь и продукты горения. В этом случае член, ответственный за химическую реакцию в системе (6)–(8), можно записать в виде [8]

$$w_{1,2}(\theta, C) \approx \exp\left\{\frac{Ze(\theta_f - 1)}{2}\right\} \delta(z - z_{1,2}),$$

где δ — дельта-функция Дирака, θ_f — безразмерная температура на фронте пламени, $Ze = \frac{E(T_b - T_0)}{RT_b^2}$ — число Зельдовича. Такая форма записи скорости химической реакции позволяет найти распределение температуры и концентрации газа из решения кусочно-линейной задачи для системы уравнений (6)–(8), которые не содержат нелинейные члены, ответственные за химическую реакцию.

В работе используются следующие значения параметров:

$$T_b = T_0 + \frac{Q}{c_p} Y_0, \quad U_b = B \exp\left(-\frac{E}{2RT_b}\right), \quad (9)$$

где $T_0 = 300$ К, $Q/c_p = 40\,000$ К, $E/R = 15\,000$ К, $B = 1\,500$ м/с, $Le = 0,9$, что примерно соответствует бедной метановоздушной смеси. Используемая аппроксимация нормальной скорости дает хорошее согласие с экспериментальными данными в диапазоне значений массовой доли недостающего компонента свежей смеси $Y_0 = 0,02846 \div 0,0392$ (значение $Y_0 = 0,02846$ соответствует бедному концентрационному пределу метановоздушной смеси).

Предполагается, что для стехиометрической метановоздушной смеси $d_0 < d_{cr}$, где $d_0 = 0,2$ см — расстояние между стенками канала, $d_{cr} = \frac{\sqrt{2e\lambda(\alpha' + \alpha'')d_0 Ze}}{\rho c_p U_b}$ — критический диаметр.

При расчете критического диаметра для стехиометрической смеси использовались экспериментальные значения нормальной скорости, поскольку расчет нормальной скорости по формулам (9) справедлив для составов, далеких от стехиометрических.

2. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В силу симметрии и инвариантности стационарной задачи относительно преобразования сдвига начало координат может быть выбрано так, что $z_2 = -z_1$. Обозначим $z_2 = L$, где величина L , характеризующая положение фронтов пламени, может принимать как положительные, так и отрицательные значения. При положительных значениях L область пространства в каналах между фронтами пламени заполнена продуктами сгорания (этот случай показан на рис. 1), а при отрицательных значениях — свежей смесью. Введем функции

$$\Psi_{+st}(z) = \theta_{1,st}(z) + \theta_{2,st}(z), \quad (10)$$

$$\Psi_{-st}(z) = \theta_{1,st}(z) - \theta_{2,st}(z).$$

Складывая и вычитая уравнения системы (6)–(8), можно получить стационарную систему уравнений относительно функций $\Psi_{\pm st}$, $C_{1,2,st}$:

$$v \frac{\partial \Psi_{-st}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Psi_{+st}}{\partial z^2} - K \Psi_{+st}, \quad (11)$$

$$v \frac{\partial \Psi_{+st}}{\partial z} = \frac{\partial^2 \Psi_{-st}}{\partial z^2} - (2H + K) \Psi_{-st}, \quad (12)$$

$$\pm v \frac{\partial C_{1,2,st}}{\partial z} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 C_{1,2,st}}{\partial z^2}, \quad (13)$$

Граничные условия при $z = +\infty$ имеют вид

$$\Psi_{\pm st} = 0, \quad C_{1,st} = 0, \quad C_{2,st} = 1, \quad (14)$$

при $z = z_2$, где $z_2 > 0$, они могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \Psi_{+st}^{(u)} &= \Psi_{+st}^{(b)}, & \Psi_{-st}^{(u)} &= \Psi_{-st}^{(b)}, \\ \Psi_{+st}^{(b)} - \Psi_{-st}^{(b)} &= 2\theta_{f,st}, & C_{2,st}^{(u)} &= 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\frac{\partial \Psi_{+st}^{(b)}}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_{+st}^{(u)}}{\partial z} = \frac{1}{Le} \frac{\partial C_{2,st}^{(u)}}{\partial z}, \quad (16)$$

$$\frac{\partial \Psi_{-st}^{(u)}}{\partial z} - \frac{\partial \Psi_{-st}^{(b)}}{\partial z} = \frac{1}{Le} \frac{\partial C_{2,st}^{(u)}}{\partial z},$$

$$\frac{\partial C_{2,st}^{(u)}}{\partial z} = Le \exp\left\{\frac{Ze(\theta_{f,st} - 1)}{2}\right\}. \quad (17)$$

Здесь верхний индекс (u) относится к величинам со стороны несгоревшей смеси при $z = z_2 + 0$, а верхний индекс (b) — к величинам на фронте пламени со стороны продуктов горения ($z = z_2 - 0$). Граничные условия на фронте пламени для случая $z_2 < 0$ можно получить тем же способом. Из вида уравнений (6)–(8) следует, что $\theta_{1,st}(z) = \theta_{2,st}(-z)$ и функция $\Psi_{+st}(z)$ является четной, а $\Psi_{-st}(z)$ — нечетной. Поэтому в силу симметрии задачи достаточно рассмотреть решения уравнений (11), (12) в полуплоскости $z \geq 0$ с условиями при $z = 0$

$$\Psi_{-st} = 0, \quad \frac{d\Psi_{+st}}{dz} = 0. \quad (18)$$

Ограничимся описанием решения задачи только при $z_2 > 0$, поскольку случай $z_2 < 0$ можно исследовать теми же методами. При $z_2 > 0$ решение стационарной системы уравнений (11)–(13), удовлетворяющее граничным условиям (14) и (18), можно записать в виде:

$$\begin{aligned} C_{2,st}^{(u)}(z) &= 1 - \exp(-v\text{Le}(z - z_{2,st})), \\ C_{2,st}^{(b)}(z) &= 0, \quad C_{1,st}^{(u)}(z) = C_{1,st}^{(b)}(z) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{+st}^{(u)}(z) &= A_1 \exp(-\lambda_1(z - z_{2,st})) + \\ &+ A_2 \exp(-\lambda_2(z - z_{2,st})), \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{-st}^{(u)}(z) &= -r_1 A_1 \exp(-\lambda_1(z - z_{2,st})) - \\ &- r_2 A_2 \exp(-\lambda_2(z - z_{2,st})), \end{aligned} \quad (21)$$

$$\Psi_{+st}^{(b)}(z) = B_1 \frac{\text{ch}(\lambda_1 z)}{\text{ch}(\lambda_1 z_{2,st})} + B_2 \frac{\text{ch}(\lambda_2 z)}{\text{ch}(\lambda_2 z_{2,st})}, \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{-st}^{(b)}(z) &= r_1 B_1 \frac{\text{sh}(\lambda_1 z)}{\text{ch}(\lambda_1 z_{2,st})} + r_2 B_2 \frac{\text{sh}(\lambda_2 z)}{\text{ch}(\lambda_2 z_{2,st})}, \end{aligned} \quad (23)$$

где

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \left[H + K + \frac{v^2}{2} \pm \right. \\ &\left. \pm \sqrt{\left(H + K + \frac{v^2}{2} \right)^2 - K(2H + K)} \right]^{1/2} \end{aligned}$$

— два положительных характеристических корня стационарной системы линейных уравнений (11), (12), $r_1 = \left(\lambda_1 - \frac{K}{\lambda_1} \right) / v$ и $r_2 = \left(\lambda_2 - \frac{K}{\lambda_2} \right) / v$. Другие два корня этой системы равны $-\lambda_1$ и $-\lambda_2$. Верхние индексы (b) и (u) относятся к областям $0 \leq z \leq z_{2,st}$ и $z_{2,st} \leq z \leq \infty$ соответственно.

Из граничного условия (17) следует выражение для температуры на фронте пламени:

$$\theta_{f,st} = 1 + \frac{2}{Ze} \ln v. \quad (24)$$

Подставляя (19)–(23) в граничные условия (15)–(17), получим систему уравнений для определения коэффициентов A_1, A_2, B_1, B_2 и скорости v :

$$M X = d, \quad (25)$$

где

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ r_1 & r_2 & r_1 t_1 & r_2 t_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - r_1 t_1 & 1 - r_2 t_2 & 0 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_1 t_1 & \lambda_2 t_2 & -1 \\ r_1 \lambda_1 & r_2 \lambda_2 & -r_1 \lambda_1 & -r_2 \lambda_2 & -1 \end{pmatrix},$$

$$X = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ B_1 \\ B_2 \\ v \end{pmatrix}, \quad d = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\theta_{f,st} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

и $t_1 = \text{th}(\lambda_1 z_{2,st})$, $t_2 = \text{th}(\lambda_2 z_{2,st})$. Решение алгебраической системы (25) относительно v можно записать в виде

$$v = \frac{2\theta_{f,st} P}{\det M}, \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} P &= (1 + t_1)(1 + t_2)(\lambda_1 r_2 - \lambda_2 r_1)(\lambda_1 r_1 - \lambda_2 r_2), \\ \det M &= (r_2 t_2 - r_1 t_1)(\lambda_1(r_1 - 1)(1 + r_2) - \\ &- \lambda_2(r_2 - 1)(1 + r_1)) + (r_2 - r_1)(\lambda_2(r_2 + t_2) \times \\ &\times (r_1 t_1 - 1) - \lambda_1(r_1 + t_1)(r_2 t_2 - 1)). \end{aligned}$$

Неявное уравнение (26) и формула (24) устанавливают связь между скоростью потока газа v и положением фронтов пламени L .

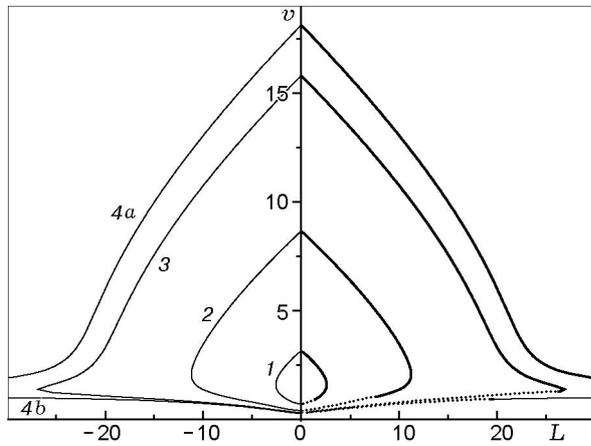


Рис. 2. Зависимости скорости подачи свежей смеси от параметра L при $d_0 = 0,2$, $Nu = 8$, $Pe = 9,6$, $Le = 0,9$, $H + K = 6,7h_{cr}$, $\sigma = 0,17$ ($\varphi = 0,65497$), $T_0 = 300$ К и $\chi = 1$ (кривая 1), $\chi = 2$ (2), $\chi = 2,8$ (3), $\chi = 3$ (кривые 4a, 4b):

толстыми, тонкими и пунктирными линиями обозначены соответственно устойчивые, неустойчивые и пульсационно неустойчивые ветви кривых $v(L)$

На рис. 2 приведены типичные зависимости координаты L фронта пламени во втором канале от скорости подачи свежей смеси v . В силу симметрии расстояние между пламенами равно $2L$. При расчете считалось, что тепловые потоки из газа во внутреннюю и внешнюю стенки различны, это различие характеризует безразмерный параметр $\chi = H/K$. Рассматривался случай $H + K = 6,7h_{cr}$.

При $\chi = 0$ ($H = 0$), когда отсутствует тепловое влияние пламен друг на друга, задача (12)–(17) сводится к независимому решению двух задач о распространении фронтов пламени с теплопотерями в отдельных каналах. Такие пламена не могут существовать в канале с диаметром меньше критического. При отсутствии внешних теплопотерь ($K = 0$) стационарных решений не существует, хотя возможно нестационарное распространение пламени. Доказательство этого утверждения можно найти в работе [5].

В случае $\chi \neq 0$ часть тепла, выделившегося в ходе химической реакции в одном из каналов, уходит наружу, а другая часть тепла остается в системе и идет на подогрев газа в другом канале. Обмен теплом через разделяющую стенку позволяет существовать волнам горения в каналах диаметром меньше критического. Диапазон скоростей газа, при которых возможна стабилизация пламени, суще-

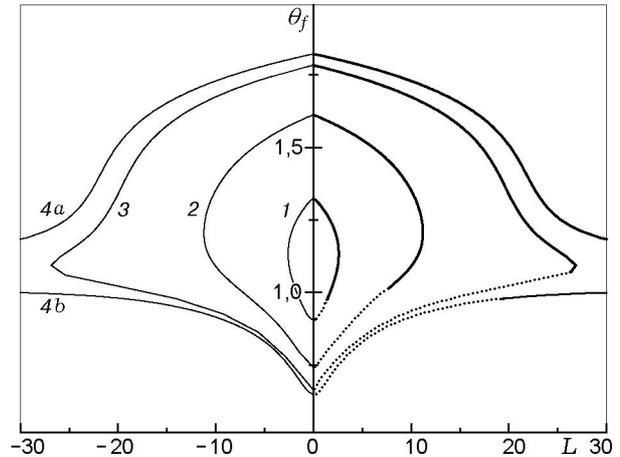


Рис. 3. Зависимости температуры на фронте пламени от параметра L при $d_0 = 0,2$ см, $Nu = 8$, $Pe = 9,6$, $Le = 0,9$, $H + K = 6,7h_{cr}$, $\sigma = 0,17$ ($\varphi = 0,65497$), $T_0 = 300$ К и $\chi = 1$ (кривая 1), $\chi = 2$ (2), $\chi = 2,8$ (3), $\chi = 3$ (кривые 4a, 4b):

толстыми, тонкими и пунктирными линиями обозначены соответственно устойчивые, неустойчивые и пульсационно неустойчивые ветви кривых $\theta_f(L)$

ственно зависит от отношения потоков тепла через внутреннюю перегородку и во внешнюю среду. Это отношение характеризуется параметром χ . При увеличении значения χ пламя может быть стабилизировано в более широком диапазоне скоростей. При уменьшении χ пределы существования пламени сужаются, и при $\chi < \chi_{cr}$ распространение пламени оказывается невозможным. Значение критического параметра χ_{cr} зависит от выбранного состава смеси, диаметра каналов и других параметров.

Отметим, что в пределе $\chi \rightarrow \infty$ максимальная скорость подачи газа, при которой возможна стабилизация пламени, стремится к бесконечности. Из формулы (24) следует, что в этом случае температура на фронте пламени также стремится к бесконечности. При $\chi \rightarrow \infty$ данная математическая модель выходит за рамки своей применимости. Заметим, что в модифицированной модели, в которой учитывались бы теплопотери на концах каналов и эффекты, связанные с конечной длиной каналов, температура и скорость газа были бы конечными величинами при любом значении параметра χ .

На рис. 3 приведены зависимости температуры фронта пламени θ_f от параметра L . Температура пламени в системе со встречной фильтрацией может превышать адиабатическую температуру «свободного» пламени.

При заданной скорости потока возможны два стационарных положения фронта пламени, для одного из которых $L > 0$, а для другого $L < 0$. Ответ на вопрос о том, какое из этих двух положений фронта пламени является устойчивым, приведен в следующем параграфе.

3. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Исследуем линейную устойчивость стационарных решений относительно малых симметричных возмущений. Будем искать решения нестационарных уравнений (6)–(8) в виде

$$\theta_{1,2}(\tau, z) = \theta_{1,2,st}(z) + \tilde{\theta}_{1,2}(z) \exp(\Omega\tau),$$

$$C_{1,2}(\tau, z) = C_{1,2,st}(z) + \tilde{C}_{1,2}(z) \exp(\Omega\tau),$$

$$\theta_{1,2,f}(\tau) = \theta_{f,st} + \beta \exp(\Omega\tau), \quad z_{1,2}(\tau) = z_{1,2,st} \pm \varepsilon \exp(\Omega\tau),$$

где малые возмущения всех величин пропорциональны $\exp(\Omega\tau)$ и скорость роста малых возмущений задается инкрементом Ω . Как и в предыдущем параграфе, рассмотрим подробно случай $z_2 > 0$. Складывая и вычитая (6)–(8), получаем систему уравнений для возмущений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_-}{\partial \tau} + v \frac{\partial \Psi_-}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Psi_+}{\partial z^2} - K \Psi_+ + \\ &+ \exp\left(\frac{Ze(\theta_f(\tau) - 1)}{2}\right) (\delta(z - z_1(\tau)) + \\ &+ \delta(z - z_2(\tau))), \end{aligned} \quad (27)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Psi_-}{\partial \tau} + v \frac{\partial \Psi_+}{\partial z} &= \frac{\partial^2 \Psi_-}{\partial z^2} - (2H + K) \Psi_- + \\ &+ \exp\left(\frac{Ze(\theta_f(\tau) - 1)}{2}\right) (\delta(z - z_1(\tau)) - \\ &- \delta(z - z_2(\tau))), \end{aligned} \quad (28)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{1,2}}{\partial \tau} \pm v \frac{\partial C_{1,2}}{\partial z} &= \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 C_{1,2}}{\partial z^2} - \\ &- \exp\left(\frac{Ze(\theta_f(\tau) - 1)}{2}\right) \delta(z - z_{1,2}(\tau)), \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\Psi_+(\tau, z) = \theta_1(\tau, z) + \theta_2(\tau, z) =$$

$$= \Psi_{+st}(z) + \tilde{\Psi}_+(z) \exp(\Omega\tau),$$

$$\Psi_-(\tau, z) = \theta_1(\tau, z) - \theta_2(\tau, z) =$$

$$= \Psi_{-st}(z) + \tilde{\Psi}_-(z) \exp(\Omega\tau)$$

и функции $\Psi_{\pm st}(z)$ являются решениями стационарной задачи (11)–(17). В силу симметричности возмущений $\Psi_-(\tau, -z) = -\Psi_-(\tau, z)$, $\Psi_+(\tau, -z) = \Psi_+(\tau, z)$ и задачу (27), (28) можно рассматривать на полупространстве $z \geq 0$. Пользуясь свойствами δ -функции Дирака, систему уравнений (27)–(29) можно свести к кусочно-линейной задаче с граничными условиями на фронте пламени

$$v \frac{\partial \tilde{\Psi}_-}{\partial z} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_+}{\partial z^2} - (K + \Omega) \tilde{\Psi}_+, \quad (30)$$

$$v \frac{\partial \tilde{\Psi}_+}{\partial z} = \frac{\partial^2 \tilde{\Psi}_-}{\partial z^2} - (2H + K + \Omega) \tilde{\Psi}_-, \quad (31)$$

$$\pm v \frac{\partial \tilde{C}_{1,2}}{\partial z} = \frac{1}{Le} \frac{\partial^2 \tilde{C}_{1,2}}{\partial z^2} - \Omega \tilde{C}_{1,2}. \quad (32)$$

При $z = \infty$ решения системы (30)–(32) удовлетворяют условиям

$$\tilde{\Psi}_{\pm} = 0, \quad \tilde{C}_{1,2} = 0. \quad (33)$$

Линеаризованные граничные условия на фронте пламени имеют вид:

$$\tilde{\Psi}_-^{(u)} - \tilde{\Psi}_-^{(b)} + v\varepsilon = 0, \quad \tilde{\Psi}_+^{(u)} - \tilde{\Psi}_+^{(b)} - v\varepsilon = 0, \quad (34)$$

$$\tilde{\Psi}_+^{(b)} - \tilde{\Psi}_-^{(b)} + \varepsilon \left(\Delta + \frac{4}{Ze} (\gamma + vLe) \right) = 0, \quad (35)$$

$$\frac{d(\tilde{\Psi}_+^{(u)} + \tilde{\Psi}_-^{(u)})}{dz} = \frac{d(\tilde{\Psi}_+^{(b)} + \tilde{\Psi}_-^{(b)})}{dz}, \quad (36)$$

$$\frac{d\tilde{\Psi}_+^{(b)}}{dx} - \frac{d\tilde{\Psi}_+^{(u)}}{dx} + \varepsilon(v\gamma + v^2(Le - 1)) = 0, \quad (37)$$

где $\gamma = \frac{d \ln(\tilde{C}_2^{(u)})}{dz}$, $\Delta = \frac{d\Psi_{+st}^{(b)}}{dz} - \frac{d\Psi_{-st}^{(b)}}{dz}$ и $\Psi_{\pm st}^{(b)}$ определены формулами (19)–(23). Кроме того, функции $\tilde{\Psi}_{\pm}$ должны удовлетворять условиям симметрии

$$\tilde{\Psi}_-(0) = 0, \quad \frac{d\tilde{\Psi}_+}{dz}(0) = 0. \quad (38)$$

Решение системы уравнений для возмущений (30)–(32) с граничными условиями (33), (38) можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{C}_2^{(u)}(z) &= \tilde{E} \exp(\tilde{\mu}(z - z_{2,st})), \\ \tilde{C}_2^{(b)}(z) &= 0, \quad \tilde{C}_1^{(u)}(z) = \tilde{C}_1^{(b)}(z) = 0, \end{aligned} \quad (39)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_+^{(u)}(z) &= \tilde{A}_1 \exp(-\tilde{\lambda}_1(z - z_{2,st})) + \\ &+ \tilde{A}_2 \exp(-\tilde{\lambda}_2(z - z_{2,st})), \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Psi}_-^{(u)}(z) &= -\tilde{r}_1 \tilde{A}_1 \exp(-\tilde{\lambda}_1(z - z_{2,st})) - \\ &- \tilde{r}_2 \tilde{A}_2 \exp(-\tilde{\lambda}_2(z - z_{2,st})), \end{aligned} \quad (41)$$

$$\tilde{\Psi}_+^{(b)}(z) = \tilde{B}_1 \frac{\text{ch}(\tilde{\lambda}_1 z)}{\text{ch}(\tilde{\lambda}_1 z_{2,st})} + \tilde{B}_2 \frac{\text{ch}(\tilde{\lambda}_2 z)}{\text{ch}(\tilde{\lambda}_2 z_{2,st})}, \quad (42)$$

$$\tilde{\Psi}_-^{(b)}(z) = \tilde{r}_1 \tilde{B}_1 \frac{\text{sh}(\tilde{\lambda}_1 z)}{\text{ch}(\tilde{\lambda}_1 z_{2,st})} + \tilde{r}_2 \tilde{B}_2 \frac{\text{sh}(\tilde{\lambda}_2 z)}{\text{ch}(\tilde{\lambda}_2 z_{2,st})}, \quad (43)$$

где константы $\tilde{A}_{1,2}$, $\tilde{B}_{1,2}$, \tilde{E} определяются из граничных условий (34)–(37),

$$\tilde{r}_1 = \frac{1}{v} \left(\tilde{\lambda}_1 - \frac{K + \Omega}{\tilde{\lambda}_1} \right), \quad \tilde{r}_2 = \frac{1}{v} \left(\tilde{\lambda}_2 - \frac{K + \Omega}{\tilde{\lambda}_2} \right),$$

$$\tilde{\mu} = -\frac{v\text{Le}}{2} - \sqrt{\left(\frac{v\text{Le}}{2} \right)^2 + \Omega\text{Le}},$$

$$\begin{aligned} \tilde{\lambda}_{1,2} = \left\{ H + K + \Omega + \frac{v^2}{2} \pm \left[\left(H + K + \Omega + \frac{v^2}{2} \right)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - (K + \Omega)(2H + K + \Omega) \right]^{1/2} \right\}^{1/2} \end{aligned}$$

— два положительных характеристических корня системы уравнений (30), (31) (другие два корня равны $-\tilde{\lambda}_1$, $-\tilde{\lambda}_2$), верхние индексы (b) и (u) относятся к областям $0 \leq z \leq z_{2,st}$ и $z_{2,st} \leq z \leq \infty$ соответственно.

Подставляя (39)–(43) в граничные условия (34)–(37), получим систему линейных однородных уравнений относительно коэффициентов $\tilde{A}_{1,2}$, $\tilde{B}_{1,2}$ и ε :

$$N Y = 0, \quad (44)$$

где

$$N = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ \tilde{r}_1 & \tilde{r}_2 & \tilde{r}_1 \tilde{t}_1 \\ \tilde{\lambda}_1 & \tilde{\lambda}_2 & \tilde{\lambda}_1 \tilde{t}_1 \\ \tilde{\lambda}_1(1 - \tilde{r}_1) & \tilde{\lambda}_2(1 - \tilde{r}_2) & \tilde{\lambda}_1(\tilde{r}_1 + \tilde{t}_1) \\ 0 & 0 & 1 - \tilde{r}_1 \tilde{t}_1 \\ \\ -1 & -v & \\ \tilde{r}_2 \tilde{t}_2 & -v & \\ \tilde{\lambda}_2 \tilde{t}_2 & v(\gamma + (\text{Le} - 1)v) & \\ \tilde{\lambda}_2(\tilde{r}_2 + \tilde{t}_2) & 0 & \\ 1 - \tilde{r}_2 \tilde{t}_2 & \Delta + \frac{4}{\text{Ze}}(\gamma + v\text{Le}) & \end{pmatrix},$$

$$Y = \begin{pmatrix} \tilde{A}_1 \\ \tilde{A}_2 \\ \tilde{B}_1 \\ \tilde{B}_2 \\ \varepsilon \end{pmatrix},$$

$\tilde{t}_1 = \text{th}(\tilde{\lambda}_1 z_{2,st})$, $\tilde{t}_2 = \text{th}(\tilde{\lambda}_2 z_{2,st})$. Система уравнений (44) имеет нетривиальное решение, если

$$\det N = 0. \quad (45)$$

Подставляя параметры, соответствующие выбранной точке кривой $v(L)$, в дисперсионное уравнение (45) и решая его численно, определяли скорость роста малых возмущений Ω . Линейный анализ устойчивости показал, что части кривых $v(L)$, лежащие в области $L < 0$, неустойчивы. Этот результат совпадает с выводами работы [5], которые были получены на основе приближенного квазистационарного метода. При $L > 0$ часть кривой $v(L)$ с высокой скоростью устойчива (см. рис. 2). В некотором диапазоне скоростей вблизи точки, где скорость достигает своего минимального значения, линейный анализ устойчивости предсказывает возможность пульсаций пламени ($\text{Re}(\Omega) > 0$, $\text{Im}(\Omega) \neq 0$).

На рис. 4 показаны области устойчивого горения и пульсаций пламени на плоскости (φ, v) , где φ — коэффициент избытка топлива. Значение $\varphi = 0,5029$ примерно соответствует бедному концентрационному пределу для метановоздушной смеси. Существует некоторое критическое значение концентрации недостающего компонента свежей смеси, при котором горение в рассматриваемой системе становится невозможным. Это значение зависит от отношения потоков тепла через внутреннюю

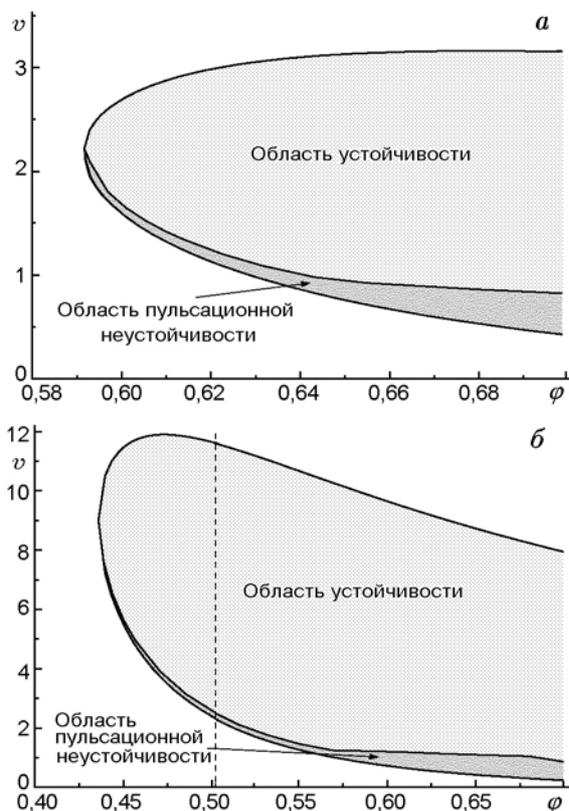


Рис. 4. Области устойчивого горения и пульсаций пламени при $d_0 = 0,2$, $Nu = 8$, $Le = 0,9$, $T_0 = 300$ К и $\chi = 1$ (а), $\chi = 2$ (б):

штриховая линия соответствует бедному концентрационному пределу для метановоздушной смеси

и внешнюю стенки канала. При увеличении параметра χ пределы существования пламени расширяются. Как видно из рис. 4, при достаточно интенсивном теплообмене между каналами возможно сжигание за пределами бедных смесей газов. Область, в которой возможны колебания пламени, лежит ниже области существования устойчивого пламени, что качественно согласуется с результатами, полученными в [9] экспериментально.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе изучены стационарные режимы горения, их устойчивость и пределы существования пламени в системе с противоточным теплообменом. Аналитически показана возможность горения за пределами бедных смесей газов в такой системе, даже при диаметре каналов меньше критического. На основании линейного анализа устойчивости сделан вывод о том,

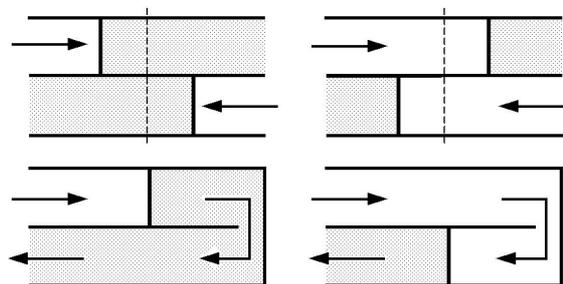


Рис. 5. Схемы расположения фронтов пламени, при которых возможно устойчивое горение (слева) и неустойчивое положение фронтов пламени (справа) при горении в системе с противоточным теплообменом и в U-образной трубке

что стационарная волна горения может существовать только в случае, когда область пространства в каналах между фронтами пламени заполнена продуктами сгорания. Система с противоположно направленными потоками газа моделирует горение в U-образной трубке [6], и, следовательно, стабилизация пламени в U-образной трубке возможна только при расположении фронта химической реакции за изгибом трубки вверх по потоку. Этот результат согласуется с экспериментальными результатами, полученными в работе [9]. На рис. 5 схематично приведены устойчивые (слева) и неустойчивые (справа) конфигурации при горении в системе с противоточным теплообменом и в U-образной трубке.

Авторы благодарны проф. К. Маруте (Университет Тохоку, Сендай, Япония) и проф. В. К. Баеву (ИТПМ СО РАН) за ценные замечания и обсуждение работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зельдович Я. Б. Теория предела распространения тихого пламени // ЖЭТФ. 1941. Т. 11, вып. 1. С. 159–168.
2. Spalding D. V. A theory of inflammability limits and flame-quenching // Prog. Roy. Soc. L. 1957. V. A 240, N 1220. P. 83–100.
3. Замащиков В. В. Особенности горения пропано- и водородовоздушных смесей в узкой трубке // Физика горения и взрыва. 1997. Т. 33, № 6. С. 14–25.
4. Замащиков В. В., Минаев С. С. Пределы распространения пламени в узком канале при фильтрации газа // Физика горения и взрыва. 2001. Т. 37, № 1. С. 25–31.

5. **Фурсенко Р. В., Минаев С. С., Бабкин В. С.** Тепловое взаимодействие двух фронтов пламени, распространяющихся в каналах с противоположно направленными потоками газа // Физика горения и взрыва. 2001. Т. 37, № 5. С. 3–11.
6. **Ju Y., Choi C. W.** An analysis of sub-limit flame dynamics using opposite propagating flames in mesoscale channels // Combust. Flame. 2003. P. 483–493.
7. **Lloyd S. A., Weinberg F. J.** A burner for mixtures of very low heat content // Nature. 1974. V. 251, N 6. P. 47–49.
8. **Matkowsky B. J., Sivashinsky G. I.** An asymptotic derivation of tow models in flame theory associated with the constant density approximation // SIAM J. Appl. Math. 1979. V. 37, N 3. P. 689–699.
9. **Maruta K., Park J. K., Oh K. C.** Combustion in preheated small-scale channel // Twenty-Ninth Symp. (Intern.) on Combustion. Pittsburgh: The Combustion Inst., 2002.

Поступила в редакцию 13/IV 2004 г.

