Прикладная механика и техническая физика, 1997, т. 38, № 5

О СУЖЕНИИ ОБЛАСТИ ПОИСКА В ЗАДАЧАХ ОПТИМАЛЬНОГО СИНТЕЗА СЛОИСТЫХ СТРУКТУР С ЗАДАННЫМ КОМПЛЕКСОМ СВОЙСТВ

УДК 517.97:539.4

Е. Л. Гусев

Институт физико-технических проблем Севера СО РАН, 677007 Якутск

Процесс оптимального проектирования можно представить как процесс уменьшения множества допустимых вариантов. Применение необходимых условий оптимальности, основанных на нелокальных вариациях управляющих параметров, позволяет эффективно учесть всю совокупность переменных, определяющих структуру слоистой системы: физические свойства материалов слоев, толщины слоев, число слоев, а также общую толщину системы слоев [1–3]. Для нахождения всех вариантов слоистых структур, реализующих предельные возможности, необходимо выделить всю совокупность решений, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности. Эффективность же выделения таких решений зависит от того, в какой степени зависимость функционала качества от совокупности управляющих параметров носит многоэкстремальный характер. Как показывают результаты вычислительных экспериментов, количество вариантов, удовлетворяющих необходимым условиям оптимальности в задачах синтеза слоистых структур при волновых воздействиях, является достаточно значительным. Поэтому выделение всех вариантов слоистых структур, реализующих предельные возможности, представляет существенные вычислительные трудности.

В соответствии с этим рассмотрим другой путь исследования предельных возможностей, связанный с изучением существования внутренней симметрии во взаимосвязи параметров, составляющих оптимальную структуру. Существование такой внутренней симметрии в задачах синтеза говорит о том, что структуры, реализующие предельные возможности, будут группироваться только внутри некоторого узкого компактного множества Q.

Внутренняя симметрия во взаимосвязи элементов, составляющих систему, может приводить к тому, что структуры, реализующие предельные возможности, будут удовлетворять дополнительным связям. Выявление таких связей позволяет существенно уменьшить размерность задачи, так как может оказаться, что структуры, реализующие предельные возможности, дополнительно удовлетворяют некоторой системе m уравнений: $M_j(u^* = 0)$. Множество решений этой системы и есть искомое компактное множество: $Q = \{u : M_j(u) = 0,\, j = \overline{1,m}\,\}$.

Выделение такой системы уравнений позволяет в ряде случаев полностью решить проблему синтеза. Главная проблема здесь заключается в разработке методики аналитического описания границ выделяемого компактного множества.

Поэтому представляет интерес выделение задач синтеза слоистых систем, в которых структуры, реализующие предельные возможности по управлению параметрами волнового поля, обладают внутренней симметрией. С исследованием возможности выделения узкого компактного множества Q, содержащего всю совокупность вариантов, реализующих предельные возможности, связан качественно новый путь уменьшения множества допустимых вариантов структур и разработки на этой основе эффективных методов синтеза.

Рассмотрим три типа задач синтеза.

1. Наклонное падение электромагнитной волны с горизонтальной поляризацией на систему непоглощающих магнитодиэлектрических слоев. Распространение электромагнитной волны

в слоистой структуре может быть описано следующей краевой задачей:

$$\dot f(z) = \mu(z)g(z), \quad \dot g(z) = -k_0^2(\omega)u(z)f(z), \quad 0 \leqslant z \leqslant l,$$
$$g(0) = ik_{\text{н}}(\omega)\cos\theta_0(2 - f(0)), \quad g(l) = ik_{\text{в}}(\omega)\cos\theta_{\text{в}} f(l). \tag{1}$$

Здесь $f(z)$ $(0 \leqslant z \leqslant l)$ — комплексная амплитуда электромагнитной волны; θ_0 — угол падения электромагнитной волны; $\theta_{\text{в}}$ — угол, под которым электромагнитная волна выходит из слоистой структуры: $\cos\theta_{\text{в}} = (1 - (\varepsilon_{\text{н}}/\varepsilon_{\text{в}})\sin^2\theta_0)^{1/2}$; $k_0 = \omega/c$ — волновое число в вакууме; c — скорость света; $k_{\text{н}}(\omega) = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_{\text{н}}}$; $k_{\text{в}}(\omega) = (\omega/c)\sqrt{\varepsilon_{\text{в}}}$; $u(z) = (\varepsilon(z)\mu(z) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0)/\mu(z)$; $\varepsilon(z)$, $\mu(z)$ $(0 \leqslant z \leqslant l)$ — распределение диэлектрической и магнитной проницаемостей по толщине слоистой структуры; $\varepsilon_{\text{н}}$, $\varepsilon_{\text{в}}$ — диэлектрические проницаемости полупространств, окаймляющих слоистую структуру. Физические параметры слоистой структуры считаем связанными между собой функциональной зависимостью $\mu = \mu(\varepsilon)$, позволяющей однозначно восстановить магнитную проницаемость допустимого материала по его известной диэлектрической проницаемости. В этом случае независимым физическим параметром будет только диэлектрическая проницаемость ε. Пусть допустимый набор состоит из двух материалов. Для каждого $z \in [0, l]$ выполнено включение

$$\varepsilon(z) \in \Lambda. \tag{2}$$

Требуется спроектировать слоистую структуру с экстремальными спектральными характеристиками, параметры которой доставляют минимальное значение критерию качества

$$J = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} r(\omega)\mathcal{T}(\omega)\,d\omega \tag{3}$$

при дополнительном условии, что при некоторой частоте $\omega = \omega^*$ функциональная характеристика проектируемой структуры должна быть предельно достижимой:

$$\mathcal{T}(\omega^*) = \mathcal{T}^*_{\omega^*}(\omega^*). \tag{4}$$

Здесь $\mathcal{T}(\omega)$ — энергетический коэффициент пропускания электромагнитной волны:

$$\mathcal{T}(\omega) = \frac{\cos\theta_{\text{в}}}{\cos\theta_0}\sqrt{\frac{\varepsilon_{\text{в}}}{\varepsilon_{\text{н}}}}\,\mathrm{mod}^2(f(l,\omega));$$

$\mathcal{T}^*_{\omega^*}(\omega^*)$ — предельно достижимый энергетический коэффициент пропускания для частоты $\omega = \omega^*$; $r(\omega)$ — весовая функция $(-1 \leqslant r(\omega) \leqslant 1)$. Множество глобально оптимальных решений для задачи оптимального синтеза (1)–(4) находится среди глобально оптимальных решений задачи оптимального синтеза для монохроматического воздействия с частотой $\omega = \omega^*$. Функция Гамильтона для монохроматического воздействия с частотой $\omega = \omega^*$ имеет вид

$$H(\ ;\varepsilon)\Big|_{z} = \varepsilon\alpha_s(z,\omega^*) + \mu(\varepsilon)\beta_s(z,\omega^*), \quad b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s \quad (s = \overline{1,N}), \tag{5}$$

где b_s — координаты границ раздела слоев $(s = \overline{1, N-1})$; N — число слоев;

$$\alpha_s(z,\omega) = -\frac{1}{\varepsilon_s}\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial\psi_s(z,\omega)}{\partial z}\,f_s(z,\omega),$$
$$\beta_s(z,\omega) = \frac{1}{\mu_s}\,\mathrm{Re}\,\frac{\partial f_s(z,\omega)}{\partial z}\,\psi_s(z,\omega), \quad b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s \quad (s = \overline{1,N}); \tag{6}$$

$\psi_s(z,\omega)$ $(b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s,\ s = \overline{1,N}\,)$ — решение сопряженной системы

$$\frac{\partial^2\psi_s(z,\omega)}{\partial z^2} + k_s^2(\omega)\psi_s(z,\omega) = 0, \quad b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s \quad (s = \overline{0, N+1}\,),$$

$$\psi_s(b_{s-1},\omega) = \psi_{s-1}(b_{s-1},\omega), \quad \frac{\partial\psi_s(b_{s-1},\omega)}{\partial z} = \frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{s-1}}\,\frac{\partial\psi_{s-1}(b_{s-1},\omega)}{\partial z} \quad (s = \overline{1, N+1}\,),$$

$$\frac{\partial\psi_0(0,\omega)}{\partial z} + ik_0(\omega)\psi_0(0,\omega) = 0, \quad \psi_{N+1}(l,\omega) + \frac{i}{k_{N+1}(\omega)}\,\frac{\partial\psi_{N+1}(l,\omega)}{\partial z} = -2\tau(\omega)\overline{f_{N+1}(l,\omega)}, \tag{7}$$

$$k_s(\omega) = \frac{\omega}{c}\sqrt{\varepsilon_s\mu_s - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0} \quad (s = \overline{1,N}\,).$$

Пусть N^* — оптимальное число слоев, ε_s^* $(s = \overline{1,N^*}\,)$ — оптимальные физические параметры материалов слоев, b_s^* $(s = \overline{1, N^*-1}\,)$ — оптимальные координаты границ раздела слоев, l^* $(l_{\min} \leqslant l^* \leqslant l_{\max})$ — оптимальная толщина системы слоев ($l_{\min}$, $l_{\max}$ — нижняя и верхняя границы на толщину системы слоев).

Тогда выполняется условие

$$H(*;\varepsilon_s^*)\Big|_z = \max_{\varepsilon\in\Lambda} H(*;\varepsilon)\Big|_z, \quad b_{s-1}^* \leqslant z \leqslant b_s^* \quad (s = \overline{1,N^*}\,). \tag{8}$$

(Пропущенные аргументы у функции Гамильтона подсчитываются на оптимальном решении.)

Если оптимальная толщина $l^* \in (l_{\min}, l_{\max})$, то, согласно [4], получим

$$H(*;\varepsilon_s^*)\Big|_z \equiv 0, \quad b_{s-1}^* \leqslant z \leqslant b_s^* \quad (s = \overline{1,N^*}\,). \tag{9}$$

Непосредственно можно убедиться, что внутри s-го слоя функция $\alpha_s(z,\omega)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению третьего порядка:

$$\frac{\partial^3\alpha_s(z,\omega)}{\partial z^3} + 4k_s^2(\omega)\,\frac{\partial\alpha_s(z,\omega)}{\partial z} = 0, \quad b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s \quad (s = \overline{1,N}\,). \tag{10}$$

Аналогичному уравнению удовлетворяет и функция $\beta_s(z,\omega)$ (6). Общее решение уравнения (10) на отрезке (b_{s-1}, b_s) имеет вид

$$\begin{gathered}\alpha_s(z,\omega) = C_s(\omega)\sin\left(2k_s(z-b_{s-1})\right) + D_s(\omega)\cos\left(2k_s(z-b_{s-1})\right) + E_s(\omega),\\ b_{s-1} \leqslant z \leqslant b_s \qquad (s = \overline{1,N}\,),\end{gathered} \tag{11}$$

где $C_s(\omega)$, $D_s(\omega)$, $E_s(\omega)$ — неопределенные функциональные зависимости от частоты ω.

На основе необходимых условий оптимальности (8) и вида функций $\alpha_s(z,\omega)$ (11) можно показать, что на оптимальном решении выполняется следующая система соотношений, связывающая толщины и физические параметры слоев оптимальной структуры по обе стороны от точек разрыва:

$$\operatorname{ctg}(k_s^*\Delta_s^*) = -\sigma_s^*\operatorname{ctg}(k_{s-1}^*\Delta_{s-1}^*) + \tau_s^*\xi_{s-1}^*, \quad \xi_s^* = \tau_s^*\operatorname{ctg}(k_{s-1}^*\Delta_{s-1}^*) - \sigma_s^*\xi_{s-1}^*. \tag{12}$$

Здесь

$$\sigma_s = \frac{1}{2}\left(\delta_s + \frac{1}{\delta_s}\right); \quad \tau_s = \frac{1}{2}\left(\delta_s - \frac{1}{\delta_s}\right); \quad \delta_s = \frac{Z_{s-1}}{Z_s}; \quad Z_s = \sqrt{\frac{\varepsilon_s}{\mu_s}}; \quad \xi_s = \frac{E_s}{C_s};$$

Δ_s — толщина s-го слоя; индексы s и $s-1$ относятся к внутренним слоям. Анализ системы соотношений (12) позволяет получить условие $\Delta_s^* = \Delta_{s-2}^*$.

Таким образом, во взаимосвязи параметров в оптимальной структуре существует внутренняя симметрия. Установленное свойство внутренней симметрии описывает закономерности внутренней взаимосвязи разнотипных групп параметров в оптимальной структуре: если физические свойства внутренних слоев оптимальной структуры одинаковы, то одинаковы и их толщины.

Введем множество распределений диэлектрической проницаемости $Q(\lambda^*)$. Элементы этого множества удовлетворяют условиям

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \Delta_s \leqslant \frac{\lambda^*}{2\sqrt{\varepsilon_s\mu_s - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0}} \quad (s = \overline{1, N}), \\ \Delta_s = \Delta_{s-2} \quad (s = \overline{4, N-1}), \qquad N_{\min} \leqslant N \leqslant N_{\max}, \end{gathered} \tag{13}$$

где λ^* — длина волны ($\lambda^* = 2\pi c/\omega^*$); $[N_{\min}, N_{\max}]$ — интервал, в котором заключено число слоев оптимальной структуры. Для величин $N_{\min}$, $N_{\max}$ могут быть получены аналитические оценки.

Наряду с множеством $Q(\lambda^*)$ введем множество распределений диэлектрической проницаемости по толщине конструкции $Q_0(\lambda^*)$. Элементы множества $Q_0(\lambda^*)$ удовлетворяют следующей системе соотношений:

$$\begin{gathered} 0 \leqslant \Delta_1 \leqslant \frac{\lambda^*}{2\sqrt{\varepsilon_1\mu(\varepsilon_1) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0}}, \quad 0 \leqslant \Delta_N \leqslant \frac{\lambda^*}{2\sqrt{\varepsilon_N\mu(\varepsilon_N) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0}}, \\ \Delta_s = \frac{\lambda^*}{4\sqrt{\varepsilon_s\mu_s - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0}} \quad (s = \overline{2, N-1}), \qquad N_{\min} \leqslant N \leqslant N_{\max}, \\ N_{\min} = \left[\frac{8\, l_{\min}\sqrt{(\varepsilon\mu(\varepsilon) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0)(\bar{\varepsilon}\mu(\bar{\varepsilon}) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0)}}{\lambda^*\big(\sqrt{\varepsilon\mu(\varepsilon) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0} + \sqrt{\bar{\bar{\varepsilon}}\mu(\bar{\bar{\varepsilon}}) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0}\big)}\right], \\ N_{\max} = \left[\frac{8\, l_{\max}\sqrt{(\bar{\varepsilon}\mu(\bar{\varepsilon}) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0)(\bar{\bar{\varepsilon}}\mu(\bar{\bar{\varepsilon}}) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0)}}{\lambda^*\big(\sqrt{\bar{\varepsilon}\mu(\bar{\varepsilon}) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0} + \sqrt{\bar{\bar{\varepsilon}}\mu(\bar{\varepsilon}) - \varepsilon_{\text{н}}\sin^2\theta_0}\big)}\right] + 4. \end{gathered} \tag{14}$$

Здесь ε, $\bar{\varepsilon}$ — диэлектрические проницаемости материалов допустимого набора.

Совместный анализ необходимых условий оптимальности и свойств краевой задачи (1) позволяет установить следующее.

Когда оптимальная толщина конструкции l^* является граничной, множество $Q(\lambda^*)$ содержит совокупность всех вариантов многослойных структур, доставляющих глобальный минимум функционалу (3) в задаче синтеза (1)–(4). Задача оптимизации на множестве $Q(\lambda^*)$ трехпараметрическая. Поэтому достаточно эффективно и с высокой точностью может быть построено множество всех вариантов многослойных структур $E^*_{\omega^*}$, доставляющих функционалу качества глобальный минимум в задаче синтеза (1)–(4).

Когда оптимальная толщина $l^* \in [l_{\min}, l_{\max}]$, множество $Q_0(\lambda^*)$ содержит совокупность всех вариантов многослойных структур, доставляющих глобальный минимум функционалу качества (3) в задаче синтеза (1)–(4). Очевидно, что $Q_0(\lambda^*) \subset Q(\lambda^*)$, задача оптимизации на множестве $Q_0(\lambda^*)$ однопараметрическая, независимым управляющим параметром будет толщина одного из граничных слоев.

Следовательно, если известна частота $\omega = \omega^*$, то, когда оптимальная толщина l^* граничная, исходная многопараметрическая задача синтеза сводится к трехпараметрической задаче минимизации критерия (3) на множестве $Q(\lambda^*)$ (13), а когда оптимальная толщина l^* находится внутри допустимого интервала толщин, исходная многопараметрическая задача синтеза сводится к однопараметрической задаче минимизации критерия качества (3) на множестве $Q_0(\lambda^*)$ (14). Таким образом, для этого случая полученные результаты позволяют полностью решить проблему синтеза, так как достаточно эффективно может быть найдена совокупность всех решений, минимизирующих критерий качества (3).

Аналогичные результаты справедливы и для наклонного падения электромагнитной волны с вертикальной поляризацией на систему магнитодиэлектрических слоев. При этом компактные множества $Q(\lambda^*)$ и $Q_0(\lambda^*)$ полностью совпадают по своей структуре с соответствующими множествами $Q(\lambda^*)$ (13) и $Q_0(\lambda^*)$ (14) для электромагнитной волны с горизонтальной поляризацией.

2. **Нормальное падение электромагнитной волны на систему диэлектрических слоев.** В случае нормального падения электромагнитной волны ($\theta_0 = 0$) множество $Q(\lambda^*)$ имеет вид

$$\begin{gathered}
0 \leqslant \Delta_s \leqslant \frac{\lambda^*}{2\sqrt{n_s^2 - \varepsilon_{\text{н}} \sin^2\theta_0}} \qquad (s = \overline{1, N}), \\
\operatorname{ctg}(k_{s+1}\Delta_{s+1}) = -\frac{n_s}{n_{s+1}} \operatorname{ctg}(k_s\Delta_s) \qquad (s = \overline{2, N-2}), \\
\left[\frac{8\, l_{\min} n_{\min}}{\lambda^*}\right] \leqslant N \leqslant \left[\frac{8\, l_{\max} n_{\max}}{\lambda^*}\right] + 4,
\end{gathered} \tag{15}$$

где n_s — показатель преломления s-го слоя; $n_{\min}$, $n_{\max}$ — минимальный и максимальный показатели преломления среди материалов допустимого набора.

При этом многопараметрическая задача синтеза сводится к двухпараметрической задаче оптимизации. Независимыми варьируемыми параметрами являются толщина одного из граничных слоев и толщина одного из внутренних слоев.

3. **Наклонное падение акустической волны на многослойную структуру.** Рассмотрим наклонное падение плоской акустической волны на многослойную систему, состоящую из плоских слоев. Слои будем считать состоящими из материалов, в которых волны сдвига не распространяются. Тогда распространение акустических волн в слоистой среде может быть описано следующей краевой задачей:

$$\begin{gathered}
\dot f(z) = \rho(z) g(z), \qquad \dot g(z) = -\omega^2 \mu[\rho(z)] f(z), \qquad 0 \leqslant z \leqslant l, \\
g(0) = \frac{ik_{\text{н}}(\omega)\cos\theta_0}{\rho_{\text{н}}}\,(2 - f(0)), \qquad g(l) = \frac{ik_{\text{в}}(\omega)\cos\theta_{\text{в}}}{\rho_{\text{в}}}\, f(l).
\end{gathered} \tag{16}$$

Здесь $f(z)$ $(0 \leqslant z \leqslant l)$ — комплексная амплитуда акустической волны; $\rho(z)$ — распределение плотности по толщине конструкции $(0 \leqslant z \leqslant l)$; $k_{\text{н}}(\omega) = \omega/c_{\text{н}}$; $k_{\text{в}}(\omega) = \omega/c_{\text{в}}$; $\rho_{\text{н}}$, $c_{\text{н}}$ — плотность и скорость распространения волны в полупространстве, откуда приходит волна; $\rho_{\text{в}}$, $c_{\text{в}}$ — плотность и скорость распространения волны в полупространстве, в которое переходит волна при выходе из конструкции;

$$\cos\theta_{\text{в}} = \left(1 - \frac{c_{\text{в}}^2}{c_{\text{н}}^2}\sin^2\theta_0\right)^{1/2}; \qquad \mu(z) = \frac{c^{-2}(z) - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0}{\rho(z)};$$

$c(z)$ $(0 \leqslant z \leqslant l)$ — распределение скорости акустической волны по толщине конструкции. Физические параметры слоистой структуры считаем связанными между собой функциональной зависимостью $c = c(\rho)$, позволяющей однозначно восстановить скорость звука в материале по его плотности. При этом независимым физическим параметром будет только плотность ρ. Пусть допустимый набор материалов Λ состоит только из двух материалов с плотностями $\underline{\rho}$ и $\bar{\rho}$. Для каждого $z \in [0, l]$ выполнено включение

$$\rho(z) \in \Lambda. \tag{17}$$

Энергетический коэффициент пропускания акустической волны определяется из решения краевой задачи (16) при $z = l$:

$$\mathcal{T}(\omega) = \frac{c_{\text{н}}\rho_{\text{н}}\cos\theta_{\text{в}}}{c_{\text{в}}\rho_{\text{в}}\cos\theta_0}\operatorname{mod}^2 f(l,\omega).$$

Требуется спроектировать слоистую структуру, обладающую высоким отражением акустических волн в одних участках спектра и низким в других. В вариационной постановке рассматриваемая задача заключается в минимизации критерия

$$J = \int\limits_{\omega_{\min}}^{\omega_{\max}} \tau(\omega)\mathcal{T}(\omega)\,d\omega \to \min \tag{18}$$

при дополнительном условии, что при некоторой частоте $\omega = \omega^*$ функциональная характеристика структуры должна быть предельно достижимой:

$$\mathcal{T}(\omega^*) = \mathcal{T}^*_{\omega^*}(\omega^*). \tag{19}$$

Здесь $\tau(\omega)$ — весовая функция ($-1 \leqslant \tau(\omega) \leqslant 1$); $\mathcal{T}^*_{\omega^*}(\omega^*)$ — предельно достижимый энергетический коэффициент пропускания для частоты $\omega = \omega^*$.

Введем множество распределений плотности $Q(f^*)f^* = \omega^*/2\pi$. Элементы множества $Q(f^*)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}0 \leqslant \Delta_s \leqslant \frac{1}{2f^*\sqrt{c_s^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0}} \qquad (s = \overline{1,N}\,),\\ \Delta_s = \Delta_{s-2} \quad (s = \overline{4,N-1}\,), \quad N_{\min} \leqslant N \leqslant N_{\max},\end{gathered} \tag{20}$$

где $[N_{\min}, N_{\max}]$ — интервал, в котором заключено число слоев оптимальной структуры. Для величин $N_{\min}$, $N_{\max}$ могут быть получены аналитические оценки.

Наряду с множеством $Q(f^*)$ введем множество распределений плотности $Q_0(f^*)$. Элементы множества $Q_0(f^*)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{gathered}0 \leqslant \Delta_1 \leqslant \frac{1}{2f^*\sqrt{c_1^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0}}, \quad 0 \leqslant \Delta_N \leqslant \frac{1}{2f^*\sqrt{c_N^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0}},\\ \Delta_s = \frac{1}{4f^*\sqrt{c_s^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0}} \quad (s = \overline{2,N-1}), \quad N_{\min} \leqslant N \leqslant N_{\max},\\ N_{\min} = \left[\frac{8f^* l_{\min}\sqrt{(\bar c^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0)(\bar{\bar c}^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0)}}{\sqrt{\bar c^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0} + \sqrt{\bar{\bar c}^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0}}\right],\\ N_{\max} = \left[\frac{8f^* l_{\max}\sqrt{(\bar c^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0)(\bar{\bar c}^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0)}}{\sqrt{\bar c^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0} + \sqrt{\bar{\bar c}^{-2} - c_{\text{н}}^{-2}\sin^2\theta_0}}\right] + 4.\end{gathered} \tag{21}$$

Здесь $\bar c = c(\bar\rho)$; $\bar{\bar c} = c(\bar{\bar\rho})$.

Совместный анализ необходимых условий оптимальности и свойств краевой задачи (16) позволяет получить следующее.

Когда оптимальная толщина конструкции l^* является граничной, множество $Q(f^*)$ содержит совокупность всех вариантов многослойных структур, доставляющих глобальный минимум функционалу качества (18) в задаче синтеза (16)–(19). Задача оптимизации на множестве $Q(f^*)$ трехпараметрическая. Поэтому достаточно эффективно и с высокой точностью может быть построено множество всех вариантов многослойных структур $E^*_{\omega^*}$, доставляющих функционалу качества глобальный минимум в задаче синтеза (16)–(19).

Когда оптимальная толщина $l^* \in (l_{\min}, l_{\max})$, то множество $Q_0(f^*)$ содержит совокупность всех вариантов многослойных структур, доставляющих глобальный минимум функционалу качества (18) в задаче синтеза (16)–(19). При этом $Q_0(f^*) \subset Q(f^*)$. Задача оптимизации на множестве $Q_0(f^*)$ однопараметрическая, независимым управляющим параметром будет толщина одного из граничных слоев.

Таким образом, если известна частота $\omega = \omega^*$, то, когда оптимальная толщина l^* граничная, исходная многопараметрическая задача синтеза сводится к трехпараметрической задаче минимизации критерия (18) на множестве $Q(f^*)$ (20). Если же $l^* \in (l_{\min}, l_{\max})$, то исходная многопараметрическая задача синтеза сводится к однопараметрической задаче минимизации критерия (18) на множестве $Q_0(f^*)$ (21). Для этого случая полученные результаты позволяют полностью решить проблему синтеза, так как эффективно может быть найдена совокупность всех решений, доставляющих глобальный минимум критерию качества (10).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гусев Е. Л.** Оптимальное проектирование многоступенчатых систем. Якутск, 1985 (Препр. / ОПМВТ. ЯФ СО АН СССР).
2. **Бабе Г. Д., Гусев Е. Л.** Математические методы оптимизации интерференционных фильтров. Новосибирск: Наука, 1987.
3. **Гусев Е. Л.** Математические методы синтеза слоистых структур. Новосибирск: Наука, 1993.
4. **Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.** Математическая теория оптимальных процессов. М.: Наука, 1983.

Поступила в редакцию 29/VIII 1995 г.,
в окончательном варианте — 28/III 1996 г.