УДК 539.374

ОБОБЩЕНИЕ ЗАДАЧИ ПРАНДТЛЯ НА МОДЕЛИ ПОЛЗУЧЕСТИ

С. Е. Александров, Е. А. Лямина, Н. М. Туан*

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, 119526 Москва, Россия
* Институт механики, 264 Ханой, Вьетнам
E-mails: sergei_alexandrov@yahoo.com, lyamina@inbox.ru, nmtuan@imech.ac.vn

Строится приближенное решение задачи о сжатии бесконечного слоя материала между шероховатыми параллельными плитами при выполнении уравнений теории ползучести. Принимаются определяющие соотношения, в соответствии с которыми эквивалентное напряжение стремится к конечной величине при стремлении эквивалентной скорости деформации к бесконечности. Исследуется поведение решения в окрестности поверхности максимального трения. Показано, что существование решения зависит от одного из параметров, входящих в определяющие уравнения. Если решение существует, то эквивалентная скорость деформации стремится к бесконечности в окрестности поверхности максимального трения, причем асимптотическое поведение решения зависит от того же параметра. Установлено, что существует диапазон значений этого параметра, в котором характер изменения эквивалентной скорости деформации вблизи поверхности максимального трения такой же, как в решениях для идеально жесткопластических материалов.

Ключевые слова: ползучесть, задача Прандтля, бесконечный слой материала, поверхность трения.

Задача о сжатии слоя между параллельными шероховатыми плитами является одной из наиболее известных задач теории пластичности. Впервые решение такой задачи для идеально жесткопластического материала в случае квазистатического течения получено в [1, 2]. Имеются многочисленные обобщения этого решения на более сложные модели материала и более общие условия деформирования. В работах [3–15] рассматривались решения для случая плоскодеформированного состояния. В частности, в [3] применялась модель ползучести, в [4, 8, 14] учитывались силы инерции при сжатии идеально жесткопластического материала, в [5] предполагалось, что предел текучести материала варьируется по толщине полосы произвольно, в [6] рассматривался анизотропный упрочняющийся материал при малых деформациях, в [7] принималась модель с условием текучести, зависящим от среднего напряжения, предложенная в [16], в [9] по отдельности анализировалось влияние упрочнения и пластической анизотропии при больших деформациях, в [10] получено решение в случае вязкопластического материала, в [11, 12] исследовано изменение температуры в пластическом слое, в [13–15] рассматривались слои, состоящие из разных материалов.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-93000-Вьет_а), Совета по грантам Президента РФ для государственной поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-3842.2012.1) и Вьетнамской академии наук и технологий (код проекта VAST.HTQT.Nga.05/13-14).

Однако далеко не все из указанных решений сохраняют все математические свойства оригинального решения [1, 2]. Главное отличие возникает при использовании закона максимального трения. Точная формулировка этого закона зависит от модели материала. В случае жесткопластических материалов, в определяющие уравнения которых не входит среднее напряжение, в соответствии с законом максимального трения при проскальзывании площадка максимального касательного напряжения должна совпадать с поверхностью трения.

Проведем анализ решений с использованием моделей, учитывающих вязкость материала. В этом случае пределы текучести зависят от эквивалентной скорости деформации (второй инвариант тензора скорости деформации). Соответствующие решения предложены в [3, 10]. Закон максимального трения использовался только в [10], причем этот закон получен как частный случай более общего закона, при котором и строится решение. Однако, подставляя в это решение условия, соответствующие закону максимального трения, можно показать, что при таком законе трения решения не существует. В решении [3] предполагается, что удельные силы трения равны некоторой постоянной величине. Однако в данном случае постоянная величина, входящая в закон трения, должна быть связана с некоторыми параметрами, входящими в определяющие уравнения. От этой связи зависит поведение решения. Такое исследование в [3] не проводилось. Таким образом, обобщение решения Прандтля на модели ползучести фактически отсутствует (если считать, что в решении Прандтля должен выполняться закон максимального трения). Это обусловлено тем, что решение Прандтля и его обобщения основаны на ряде гипотез, анализ которых представлен в [17]. В частности, эти гипотезы не допускают существования режима прилипания на поверхности максимального трения, а общий анализ уравнений некоторых моделей ползучести показывает, что именно режим прилипания должен выполняться на такой поверхности [18]. Однако доказательство [18] имеет силу только для моделей, которые включают уравнение связи между эквивалентной скоростью деформации ξ_{eq} и эквивалентным напряжением σ_{eq}, обладающее свойством $\sigma_{eq} \to \infty$ при $\xi_{eq} \to \infty$. Такие уравнения часто используются при моделировании процессов обработки металлов давлением при высокой температуре [19]. Однако в [20] на основе анализа большого количества экспериментальных данных показано, что для многих материалов имеет место соотношение

$$\frac{\xi_{eq}}{\xi_0} = \frac{(\sigma_{eq} - \sigma_0)^n}{(\sigma_b - \sigma_{eq})^n}. \tag{1}$$

Здесь ξ_0, σ_0, σ_b и $n > 0$ — постоянные материала; величина σ_{eq} изменяется в интервалах $\sigma_0 \leqslant \sigma_{eq} \leqslant \sigma_b$. Из (1) следует, что $\xi_{eq} \to \infty$ при $\sigma_{eq} \to \sigma_b$. Таким образом, доказательство [18] для такой модели ползучести не имеет силы. Представляет интерес построение решения задачи Прандтля в условиях ползучести с использованием зависимости (1).

Геометрическая схема процесса показана на рисунке. Толщина слоя равна $2h$, ширина — $2L$. Слой сжимается двумя сближающимися плитами, скорость каждой из которых равна U. Введем декартову систему координат (x, y), оси которой совпадают с осями симметрии задачи (см. рисунок). Таким образом, достаточно построить решение в области $0 \leqslant x \leqslant L$, $0 \leqslant y \leqslant h$. Рассматривается мгновенное напряженно-деформированное состояние в случае плоского течения.

В декартовых координатах система уравнений включает зависимость (1), уравнения равновесия и уравнения, следующие из закона течения:

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} = 0; \tag{2}$$

$$\frac{\xi_{xx} - \xi_{yy}}{\xi_{xy}} = \frac{\sigma_{xx} - \sigma_{yy}}{\sigma_{xy}}, \qquad \xi_{xx} + \xi_{yy} = 0. \tag{3}$$

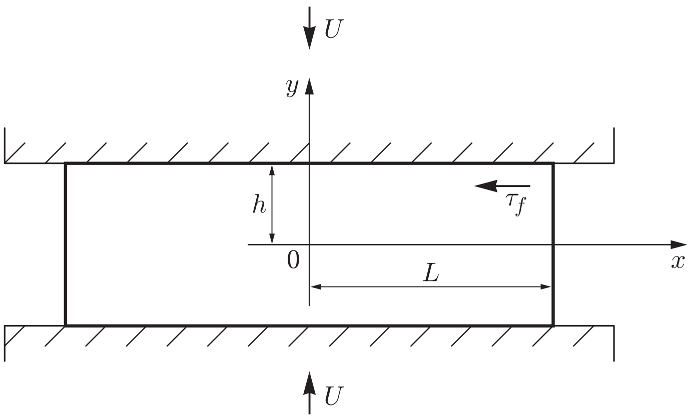

Схема сжатия бесконечного слоя материала между параллельными плитами

Здесь σ_{xx}, σ_{yy}, σ_{xy} — компоненты тензора напряжения; ξ_{xx}, ξ_{yy}, ξ_{xy} — компоненты тензора скорости деформации. Остальные компоненты тензора скорости деформации равны нулю. Нормальное напряжение в направлении, перпендикулярном плоскости течения, является одним из главных напряжений и равно среднему напряжению. Поэтому выражения для эквивалентной скорости деформации и эквивалентного напряжения представляются в виде

$$\xi_{eq} = \sqrt{\frac{2}{3}}\,(\xi_{xx}^2 + \xi_{yy}^2 + 2\xi_{xy}^2)^{1/2}, \qquad \sigma_{eq} = \frac{\sqrt{3}}{2}\,(\sigma_{xx} - \sigma_{yy} + 4\sigma_{xy}^2)^{1/2}. \tag{4}$$

Краевые условия имеют следующую форму:

$$y = 0: \qquad u_y = 0; \tag{5}$$

$$y = h: \qquad u_y = -U; \tag{6}$$

$$y = 0,\ x = 0,\ x = L: \qquad \sigma_{xy} = 0; \tag{7}$$

$$y = h: \qquad \sigma_{xy} = -\sigma_b/\sqrt{3}; \tag{8}$$

$$x = L: \qquad \sigma_{xx} = 0; \tag{9}$$

$$x = 0: \qquad u_x = 0. \tag{10}$$

Условие (8) выражает закон максимального трения при проскальзывании. Ниже показано, что предложенная выше формулировка закона максимального трения эквивалентна уравнению (8) для выбранной модели материала. Выбор знака в (8) обусловлен тем, что материал течет в направлении, совпадающем с положительным направлением оси x. Как и в решении Прандтля, а также в его обобщениях, не все перечисленные условия выполняются точно. В частности, при $x = 0$ и $x = L$ условие (7) не учитывается вследствие малости касательного напряжения по сравнению с нормальными. Условия (9), (10) заменяются интегральными условиями вида

$$\int_0^h \sigma_{xx}\big|_{x=L}\,dy = 0; \tag{11}$$

$$\int_0^h u_x\big|_{x=0}\,dy = 0 \tag{12}$$

соответственно.

Представим выражения для напряжений в виде

$$\sigma_{xx} = \sigma + \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} \cos 2\psi, \qquad \sigma_{yy} = \sigma - \frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} \cos 2\psi, \qquad \sigma_{xy} = -\frac{\sigma_{eq}}{\sqrt{3}} \sin 2\psi. \tag{13}$$

Здесь σ — среднее напряжение; ψ — угол между направлением действия максимального главного напряжения и осью x. Из физического смысла задачи следует, что $\sigma_{xy} \leqslant 0$ и $\sigma_{xx} - \sigma_{yy} \geqslant 0$. Тогда из (13) получаем

$$0 \leqslant \psi \leqslant \pi/4. \tag{14}$$

С использованием (3), (13), (14) выражение для эквивалентной скорости деформации, введенной в (4), преобразуется к виду

$$\xi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{\xi_{xx}}{\cos 2\psi}, \tag{15}$$

где учтено, что $\xi_{xx} > 0$. Если на поверхности трения выполняется условие проскальзывания, то $\xi_{xx} \neq 0$ при $y = h$. Закон максимального трения в первоначальной формулировке имеет вид $\psi = \pi/4$ при $y = h$. Тогда из (15) получаем $\xi_{eq} \to \infty$, а из (1) — $\sigma_{eq} \to \sigma_b$ при $y \to h$. Таким образом, из (13) следует, что при $y = h$ условие $\psi = \pi/4$ эквивалентно (8).

При построении приближенного решения рассматриваемой краевой задачи одним из основных предположений является независимость угла ψ от x. Согласно кинематическому предположению зависимость проекции скорости u_y от y является линейной. Учитывая краевые условия (5), (6), получаем

$$u_y = -U \frac{y}{h}. \tag{16}$$

Тогда при использовании второго уравнения системы (3) выражения для нормальных скоростей деформации принимают вид

$$\xi_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = -\frac{U}{h}, \qquad \xi_{xx} = -\xi_{yy} = \frac{U}{h}. \tag{17}$$

Из (1), (15), (17) следует, что эквивалентное напряжение не зависит от x. Поэтому, подставляя (13) в уравнения равновесия (2), получаем

$$\sqrt{3}\, \frac{\partial \sigma}{\partial x} - \frac{d\left(\sigma_{eq} \sin 2\psi\right)}{dy} = 0, \qquad \sqrt{3}\, \frac{\partial \sigma}{\partial y} - \frac{d\left(\sigma_{eq} \cos 2\psi\right)}{dy} = 0. \tag{18}$$

Из второго уравнения этой системы следует, что $\partial^2\sigma/\partial x\, \partial y = 0$. Дифференцируя первое уравнение системы (18) по y, находим $d^2(\sigma_{eq} \sin 2\psi)/dy^2 = 0$. Решение этого уравнения имеет вид

$$\sigma_{eq} \sin 2\psi = \sigma_b C \frac{y}{h} + C_0, \tag{19}$$

где C, C_0 — постоянные интегрирования. Из (13), (14) следует, что при $y = 0$ краевое условие (7) эквивалентно условию $\psi = 0$. Подставляя это условие в (19), получаем $C_0 = 0$. Решение (19) принимает форму

$$\sigma_{eq} \sin 2\psi = \sigma_b C \frac{y}{h}. \tag{20}$$

Так как на поверхности максимального трения $\psi = \pi/4$, то из (8), (20) следует, что $C = 1$, поэтому (20) преобразуется к виду

$$\sigma_{eq} \sin 2\psi = \sigma_b \frac{y}{h}. \tag{21}$$

Разрешая уравнение (1) относительно σ_{eq} и затем исключая σ_{eq} в (21), находим

$$\Big[k + \Big(\frac{\xi_{eq}}{\xi_0}\Big)^{1/n}\Big] \sin 2\psi = \frac{y}{h}\Big[1 + \Big(\frac{\xi_{eq}}{\xi_0}\Big)^{1/n}\Big], \tag{22}$$

где $k = \sigma_0/\sigma_b < 1$. Из (15), (17) следует зависимость эквивалентной скорости деформации от ψ в форме

$$\xi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{h\cos 2\psi}. \tag{23}$$

Учитывая, что $\xi_{xx} = \partial u_x/\partial x$, с использованием (17) определим проекцию скорости на ось x

$$u_x = \frac{U}{h}\,x + V(y), \tag{24}$$

где $V(y)$ — произвольная функция y. Исключая в первом уравнении системы (3) напряжения с помощью (13), нормальные скорости деформации с помощью (17), сдвиговую скорость деформации с помощью (16), (24) и соотношения $2\xi_{xy} = \partial u_x/\partial y + \partial u_y/\partial x$, получаем уравнение для функции $V(y)$ в виде $dV/dy = -(2U/h)\operatorname{tg} 2\psi$. После интегрирования имеем

$$V = -\frac{2U}{h}\int\limits_0^y \operatorname{tg}(2\psi)\,dy + V_0, \tag{25}$$

где V_0 — произвольная постоянная. Подставляя (21) в первое уравнение системы (18) и интегрируя его, находим $\sqrt{3}\,\sigma = \sigma_b x h^{-1} + p(y)$. Исключая с помощью этого решения среднее напряжение во втором уравнении системы (18) и интегрируя его, получаем $p(y) = \sigma_{eq}\cos 2\psi + p_0$. Окончательно имеем

$$\sqrt{3}\,\sigma = \frac{\sigma_b x}{h} + \sigma_{eq}\cos 2\psi + p_0, \tag{26}$$

где p_0 — постоянная интегрирования. Подставляя (23) в (22), находим ψ как функцию y в неявном виде:

$$\frac{k(\cos 2\psi)^{1/n} + 2^{1/n}\varepsilon}{(\cos 2\psi)^{1/n} + 2^{1/n}\varepsilon}\sin 2\psi = \frac{y}{h}, \qquad \varepsilon = \Big(\frac{U}{\sqrt{3}\,h\xi_0}\Big)^{1/n}. \tag{27}$$

Таким образом, из (1), (13), (26), (27) получаем распределение напряжений в параметрическом виде. Распределение скоростей находится из (16), (24), (25), если интеграл в (25) сходится. Постоянные V_0, p_0 при необходимости определяются из краевых условий (11), (12).

Положим $z^n = \cos 2\psi$. Тогда с учетом (14) уравнение (27) преобразуется к форме

$$\frac{kz + 2^{1/n}\varepsilon}{z + 2^{1/n}\varepsilon}\sqrt{1 - z^{2n}} = \frac{y}{h}. \tag{28}$$

При $z \to 0$ по формуле бинома Ньютона получаем

$$[1 - (2^{1/n}\varepsilon)^{-1}(1-k)z + o(z)]\Big[1 - \frac{1}{2}\,z^{2n} + o(z^{2n})\Big] = \frac{y}{h}. \tag{29}$$

Целесообразно все возможные значения показателя степени n разделить на три группы: $n > 1/2$, $n = 1/2$, $n < 1/2$.

Если $n > 1/2$, то из (29) следует

$$z \to 0: \qquad 1 - \frac{y}{h} = \frac{1-k}{2^{1/n}\varepsilon}\,z + o(z), \tag{30}$$

а уравнение (23) принимает вид

$$y \to h: \qquad \xi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{h\cos 2\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{hz^n} = \frac{U(1-k)^n}{\sqrt{3}\,h^{1-n}\varepsilon^n(h-y)^n} + o[(h-y)^{-n}]. \tag{31}$$

Если $n < 1/2$, то из (29) следует

$$z \to 0: \qquad 1 - \frac{y}{h} = \frac{1}{2}\,z^{2n} + o(z^{2n}), \tag{32}$$

а уравнение (23) принимает вид

$$y \to h: \qquad \xi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{h\cos 2\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{hz^n} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{h^{1/2}(h-y)^{1/2}} + o[(h-y)^{-1/2}]. \tag{33}$$

Если $n = 1/2$, то из (29) следует

$$z \to 0: \qquad 1 - \frac{y}{h} = \frac{1}{2}\Big(1 + \frac{1-k}{2\varepsilon}\Big)z + o(z), \tag{34}$$

а уравнение (23) принимает вид

$$y \to h: \qquad \xi_{eq} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{h\cos 2\psi} = \frac{2}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{hz^{1/2}} = \\ = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\,\frac{U}{h^{1/2}(h-y)^{1/2}}\Big(1 + \frac{1-k}{2\varepsilon}\Big)^{1/2} + o[(h-y)^{-1/2}]. \tag{35}$$

В рассматриваемом случае $s = h - y$ — расстояние до поверхности максимального трения. Из (33), (35) следует, что при $n \leqslant 1/2$ асимптотическое представление эквивалентной скорости деформации в окрестности поверхности максимального трения имеет вид $\xi_{eq} = Ds^{-1/2} + o(s^{-1/2})$, $s \to 0$. Это представление совпадает с представлением, полученным в [21] для идеально жесткопластического материала. В [21] величина D называется коэффициентом интенсивности скорости деформации. Из (33) следует, что при $n < 1/2$ коэффициент интенсивности скорости деформации для модели ползучести (1) совпадает с соответствующим коэффициентом для идеально жесткопластического материала [22] и равен $D = \sqrt{2/3}\,Uh^{-1/2}$. При $n = 1/2$ коэффициент интенсивности скорости деформации зависит от свойств материала. Из (35) следует

$$D = \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{U}{h^{1/2}}\,\Big(1 + \frac{1-k}{2\varepsilon}\Big)^{1/2}.$$

При $n > 1/2$ асимптотическое представление эквивалентной скорости деформации вблизи поверхности максимального трения не совпадает с представлением, приведенным в [21]. В частности, из (31) находим

$$s \to 0: \qquad \xi_{eq} = Ds^{-n} + o(s^{-n}), \quad D = \frac{U(1-k)^n}{\sqrt{3}\,h^{1-n}\varepsilon^n}.$$

Величину D в этом соотношении также можно называть коэффициентом интенсивности скорости деформации. Однако следует учитывать, что размерность этой величины не совпадает с размерностью коэффициента интенсивности скорости деформации, введенного в [21].

Так как при $y \to h$ $\xi_{eq} \to \infty$, то необходимо показать, что мощность внутренних сил ограничена в некоторой конечной области в окрестности поверхности трения. Поскольку $\sigma_{eq} < \infty$, достаточно рассмотреть интеграл

$$J = \int\limits_{h-\Delta h}^{h} \xi_{eq}\,dy < \infty, \qquad \Delta h > 0. \tag{36}$$

Из (30), (34) следует, что при $n \geqslant 1/2$ в окрестности поверхности трения $dy = -A\,dz$, причем $A > 0$. Тогда, подставляя (31), (35) в (36), можно показать, что интеграл J сходится при $n < 1$. Из (32) следует, что при $n < 1/2$ в окрестности поверхности трения $dy = -A_1 z^{2n-1}\,dz$, причем $A_1 > 0$. Тогда, подставляя (33) в (36), можно показать, что интеграл J сходится. Таким образом, представления (33) и (35) имеют силу при всех n в интервале $0 < n \leqslant 1/2$, а представление (31) — при $1/2 < n < 1$. Следует отметить, что последнее неравенство не является ограничением на модель (1). При $n \geqslant 1$ невозможно получить приближенное решение поставленной краевой задачи с использованием общепринятых гипотез. Для такой модели материала в соответствии с законом максимального трения должно выполняться условие прилипания. Это невозможно при использовании предположения (16) для проекции скорости на ось y, из которого следует соотношение (24), показывающее, что $u_x \neq 0$ при $y = h$. В соответствии с представлением (23) интеграл в (25) сходится при тех же условиях, при которых сходится интеграл J.

Для чистых металлов $n \approx 3$ [20]. Таким образом, для этого класса материалов на поверхности максимального трения возникает режим прилипания, поэтому при использовании общепринятых гипотез обобщение решения Прандтля не может быть построено. Для конструкционных сплавов $n \approx 1$ [20]. Значение $n = 1$ соответствует границе, разделяющей модели ползучести на два класса. При $n \geqslant 1$ на поверхности максимального трения имеет место прилипание, а при $n < 1$ возможен режим проскальзывания, реализующийся в случае, если выполняются условия, при которых обобщение приближенного решения Прандтля имеет силу. Очевидно, что точность определения величины n в эксперименте недостаточна для того, чтобы установить, больше или меньше единицы эта величина. Однако результаты выполненного анализа показывают, что точность определения величины n может существенно влиять на поведение решения вблизи поверхностей с большими удельными силами трения. Таким образом, косвенные экспериментальные данные могут быть использованы при выборе оптимального интервала, в котором нужно задавать величину n для данного материала. В частности, при осадке достаточно тонкой полосы без смазки необходимо определить экспериментально, имело ли место проскальзывание на поверхности трения. Если имело, то целесообразно выбрать n из интервала $n < 1$, в противном случае — из интервала $n \geqslant 1$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Prandtl L.** Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Salz uber das plastische Gleichgewicht // Zangew. Math. Mech. 1923. Bd 3. S. 401–406.
2. **Хилл Р.** Математическая теория пластичности. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
3. **Качанов Л. М.** Ползучесть тонкого слоя, сжимаемого жесткими плитами // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 6. С. 138–140.
4. **Быковцев Г. И.** О сжатии пластического слоя жесткими шероховатыми плитами с учетом сил инерции // Изв. АН СССР. Механика и машиностроение. 1960. № 6. С. 140–142.
5. **Кузнецов А. И.** Задача о неоднородном пластическом слое // Arch. Mech. Stos. 1960. V. 12. P. 163–172.
6. **Дудукаленко В. В., Ивлев Д. Д.** О сжатии полосы из упрочняющегося пластического материала жесткими шероховатыми плитами // Докл. АН СССР. 1963. Т. 153, № 5. С. 1024–1026.
7. **Marshall E. A.** The compression of a slab of ideal soil between rough plates // Acta Mech. 1967. V. 3. P. 82–92.
8. **Najar J.** Inertia effects in the problem of compression of a perfectly plastic layer between two rigid plates // Arch. Mech. Stos. 1967. V. 19. P. 129–149.

9. **Collins I. F., Meguid S. A.** On the influence of hardening and anisotropy on the plane-strain compression of thin metal strip // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1977. V. 44. P. 271–278.
10. **Adams M. J., Briscoe B. J., Corfield G. M., et al.** An analysis of the plane-strain compression of viscoplastic materials // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1997. V. 64. P. 420–424.
11. **Nepershin R. I.** Non-isothermal plane plastic flow of a thin layer compressed by flat rigid dies // Intern. J. Mech. Sci. 1997. V. 39. P. 899–912.
12. **Непершин Р. И.** Влияние теплопередачи на неизотермическое плоское пластическое течение при сжатии тонкой заготовки между плоскими штампами // Пробл. машиностроения и надежности машин. 1997. № 1. С. 96–103.
13. **Alexandrov S., Mishuris G., Miszuris W.** An analysis of the plane-strain compression of a three layer strip // Arch. Appl. Mech. 2001. V. 71, N 8. P. 555–566.
14. **Кийко И. А.** Обобщение задачи Л. Прандтля о сжатии полосы // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 2003. № 4. С. 50–56.
15. **Alexandrov S., Tzou G.-Y., Huang M.-N.** Plane strain compression of rigid/perfectly plastic multi-layer strip between parallel platens // Acta Mech. 2006. V. 184. P. 103–120.
16. **Spencer A. J. M.** A theory of the kinematics of ideal soils under plane strain conditions // J. Mech. Phys. Solids. 1964. V. 12. P. 337–351.
17. **Георгиевский Д. В.** Асимптотические разложения и возможности отказа от гипотез в задаче Прандтля // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2009. № 1. С. 83–93.
18. **Александров С. Е., Данилов В. Л., Чиканова Н. Н.** О зоне торможения при моделировании осесимметричных процессов обработки металлов давлением в условиях ползучести // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2000. № 1. С. 149–151.
19. **Малинин Н. Н.** Ползучесть в обработке металлов. М.: Машиностроение, 1986.
20. **Шестериков С. А., Юмашева М. А.** Конкретизация уравнения состояния в теории ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1984. № 1. С. 86–91.
21. **Alexandrov S., Richmond O.** Singular plastic flow fields near surfaces of maximum friction stress // Intern. J. Non-Linear Mech. 2001. V. 36, N 1. P. 1–11.
22. **Alexandrov S.** The strain rate intensity factor and its applications: a review // Mater. Sci. Forum. 2009. V. 623. P. 1–20.

Поступила в редакцию 30/V 2013 г.