

УДК 620.170.5.539.4

## НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ НАКЛОННОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДЕФЕКТА В ПЛАСТИНЕ ПРИ ЕЕ ДВУХОСНОМ НАГРУЖЕНИИ

А. А. Остсемин, П. Б. Уткин\*

Южно-Уральский научно-производственный центр, 454106 Челябинск

\* Южно-Уральский государственный университет, 454080 Челябинск

E-mail: ostsemin@math.susu.ac.ru

Рассмотрена математическая модель напряженно-деформированного состояния пластины с наклонным эллиптическим дефектом при ее двухосном нагружении. Методом Колосова — Мухелишвили получены точные формулы для напряжений в полярных координатах, перемещений, главных напряжений, максимального касательного напряжения, интенсивности напряжения в случае плоского напряженного состояния пластины. Проведено сравнение результатов расчетов с экспериментальными данными, полученными методом голографической интерферометрии.

**Ключевые слова:** линейная механика разрушения, наклонный эллиптический дефект, метод Колосова — Мухелишвили, двухосное нагружение, метод голографической интерферометрии.

**Введение.** В [1] получены точные формулы, а в [2] приближенные формулы, описывающие напряженно-деформированное состояние наклонной трещины в пластине при двухосном нагружении. В [2] за счет учета постоянного члена разложения комплексных потенциалов уточнено сингулярное решение задачи о наклонной трещине при двухосном нагружении, что привело к изменению выражения для компоненты напряжения  $\sigma_x$ . Это двухкомпонентное решение удовлетворительно согласуется с экспериментальными данными. В [1] на основе метода Колосова — Мухелишвили [3] получено точное решение задачи для тензора напряжений и перемещений в пластине с наклонной трещиной при двухосном нагружении. Сравнение точного [1] и двухкомпонентного [2] решений показало, что для некоторых направлений и расстояний от трещины эти решения существенно различаются. Следует отметить, что в случае трещины направлению  $\theta = 0$  вдоль оси дефекта соответствуют максимальная ошибка  $\sigma_y$  и минимальная ошибка  $\tau_{x,y}, \sigma_\theta$  [1]. В [1] определены относительные погрешности величины  $\sigma_x$ , суммы  $\sigma_1 + \sigma_2$  и разности  $\sigma_1 - \sigma_2$  главных напряжений по отношению к точным решениям.

Технологические дефекты, обуславливающие уменьшение сопротивления хрупкому разрушению, имеют заостренную форму в виде эллипса с радиусом кривизны в вершине  $\rho$ . Использование известных критериев линейной механики разрушения без учета поправок на геометрию трещиноподобных дефектов и радиус  $\rho$  приведет к большим погрешностям, так как эти критерии справедливы для концентраторов напряжений типа трещин при  $\rho \rightarrow 0$ . Особенность стыковых и угловых сварных швов состоит в том, что в них имеются

концентраторы напряжений (непровары, поры, несплавления, подрезы, шлаковые включения, трещины) с достаточно малыми радиусами  $\rho = 0,001 \div 0,100$  мм, которые при низких температурах могут привести к хрупкому разрушению сварных конструкций. При использовании существующих технологий изготовления конструкций даже тщательный контроль не гарантирует отсутствия дефектов. Непосредственное применение положений механики разрушения при исследовании концентрации напряжений, характерной для сварных швов, некорректно [4].

В [5] методом Колосова — Мухелишвили получены точные формулы для компонент тензора напряжений, суммы  $\sigma_x + \sigma_y$  и разности  $\sigma_x - \sigma_y$  напряжений в декартовых координатах, методом голографической интерферометрии экспериментально определены коэффициенты интенсивности напряжений при одноосном растяжении пластины с наклонным эллиптическим дефектом.

Приближенные формулы для тензора напряжений, перемещений, главных напряжений, максимального касательного напряжения в окрестности вершины эллиптического дефекта в пластине при двухосном нагружении найдены в [6].

Целью данной работы является получение точных формул для напряженно-деформированного состояния пластины с наклонным эллиптическим дефектом при ее двухосном нагружении и экспериментальная проверка этих формул методом голографической интерферометрии.

**1. Напряжения в случае наклонного эллиптического отверстия при двухосном нагружении пластины.** Рассмотрим напряженное состояние пластины с наклонным эллиптическим отверстием, подвергнутой двухосному нагружению. На рис. 1 приведена схема данной задачи ( $\varepsilon$  — параметр двухосного нагружения,  $\sigma$  — номинальное напряжение вдоль оси  $y'$ ,  $\beta$  — угол между осью дефекта  $x$  и осью  $x'$ ). Начало координат находится в фокусе эллипса. Значения  $m$  и  $d$  являются параметрами эллипса и связаны с длинами полуосей  $a$ ,  $b$  соотношениями

$$m = \frac{a - b}{a + b}, \quad d^2 = a^2 - b^2, \quad \frac{d^2}{a^2} = \frac{4m}{(1 + m)^2}.$$

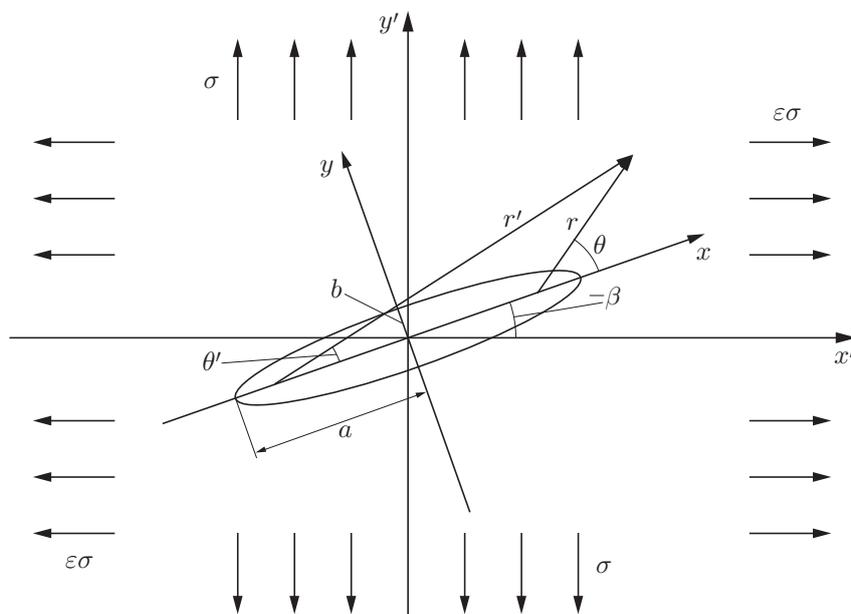


Рис. 1. Схема задачи о наклонном эллиптическом дефекте в пластине, подвергнутой двухосному нагружению

Для записи компонент тензора напряжений введем переменные

$$\begin{aligned} z = x + iy = r e^{i\theta} + d = r' e^{i\theta'} - d, \quad rr' = |z^2 - d^2|, \\ r' \sin \theta' = r \sin \theta, \quad r' \cos \theta' = r \cos \theta + 2d. \end{aligned} \quad (1)$$

Выражения для напряжений в полярных координатах получим, подставляя выражения для компонент тензора напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  [5] в известные формулы

$$\begin{aligned} \sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \theta + \sigma_y \sin^2 \theta + \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \sigma_\theta &= \sigma_x \sin^2 \theta + \sigma_y \cos^2 \theta - \tau_{xy} \sin 2\theta, \\ \sigma_{r\theta} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin \theta \cos \theta + \sigma_{xy} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \quad (2)$$

После ряда преобразований запишем в полярных координатах выражения для компонент тензора напряжений в случае наклонного эллиптического отверстия в пластине, зависящие от параметров эллипса  $m$  и коэффициента двухосного нагружения  $\varepsilon$ :

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A_0 \left\{ \left[ \left( -\frac{(1-m)^2}{m} + \frac{1-m^2}{m} F_1 \right) \cos 2\theta - 4 \cos^2 \theta \right] \cos 2\beta - \frac{1-m^2}{m} F_2 \sin 2\beta \sin 2\theta \right\} + \\ &+ \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \left( 2F_1 - \cos \frac{\theta - 3\theta'}{2} (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} - \sin \frac{\theta - 3\theta'}{2} \times \right. \\ &\times r \sin \theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \left. \right) - \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \left[ \left( -\frac{(1-m)^2}{m} \cos 2\theta - 4 \cos^2 \theta \right) F_2 - \sin \frac{3\theta' - \theta}{2} \times \right. \\ &\times (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \cos \frac{\theta - 3\theta'}{2} r \sin \theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} + \left. \left( \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} F_1 \right) \sin 2\theta \right], \\ \sigma_\theta &= A_0 \left\{ \cos 2\beta \left[ \left( \frac{(1-m)^2}{m} - \frac{1-m^2}{m} F_1 \right) \cos 2\theta - 4 \sin^2 \theta \right] + \frac{1-m^2}{m} F_2 \sin 2\beta \sin 2\theta \right\} + \\ &+ \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \left( 2F_1 + \cos \frac{\theta - 3\theta'}{2} (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \sin \frac{3\theta' - \theta}{2} \times \right. \\ &\times r \sin \theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \left. \right) - \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \left[ \left( \frac{(1-m)^2}{m} \cos 2\theta - 4 \sin^2 \theta \right) F_2 + \sin \frac{3\theta' - \theta}{2} \times \right. \\ &\times (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} - \cos \frac{\theta - 3\theta'}{2} r \sin \theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} - \left. \left( \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} F_1 \right) \sin 2\theta \right], \\ \tau_{r\theta} &= \left( A_0 \frac{1+m^2}{m} \cos 2\beta + \frac{2a^2 r \sin \theta}{(rr')^{3/2}} G_1 - A_0 F_1 \frac{1-m^2}{m} \cos 2\beta + \right. \\ &+ A_0 F_2 \frac{1+m^2}{m} \sin 2\beta + (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} G_2 \left. \right) \sin 2\theta + \\ &+ \left[ -A_0 \sin 2\beta \frac{1-m^2}{m} F_2 - \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \times \right. \\ &\times \left( \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} - \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} 2r \sin \theta \frac{a^2}{(rr')^{3/2}} \right) - \end{aligned} \quad (3)$$

$$-\frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \left( \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \right. \\ \left. + \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} r \sin \theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} + \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} F_1 \right) \cos 2\theta.$$

Здесь

$$F_1 = \frac{1}{\sqrt{rr'}} \left( (r \cos \theta + d) \cos \frac{\theta+\theta'}{2} + r \sin \theta \sin \frac{\theta+\theta'}{2} \right), \\ F_2 = \frac{1}{\sqrt{rr'}} \left( -(r \cos \theta + d) \sin \frac{\theta+\theta'}{2} + r \sin \theta \cos \frac{\theta+\theta'}{2} \right), \\ G_1 = A_1 \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} - A_2 \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2}, \quad G_2 = A_1 \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} + A_2 \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2}, \\ A_0 = \frac{\sigma(1-\varepsilon)}{4m}, \quad A_1 = \frac{\sigma[m(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon) \cos 2\beta]}{4m} = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} = \frac{K_I}{2\sqrt{\pi d}}, \\ A_2 = \frac{\sigma(1-\varepsilon) \sin 2\beta}{4m} = -\frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} = -\frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi d}}.$$

В выражения (3) для компонент тензора напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  входят дополнительные слагаемые с параметром эллиптического дефекта  $m$ , которые оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние дефекта в пластине.

Координаты  $r'$ ,  $\theta'$  выражаются через координаты  $r$ ,  $\theta$  с помощью формул (1). Соотношения (3) зависят лишь от координат  $r$ ,  $\theta$ .

В [7] показано, что расширение надреза оказывает влияние на величину критической нагрузки  $P_{cr}$ , при которой начинает развиваться дефект. По сравнению со случаем трещины в случае эллипсов с различными контурами максимальное значение  $P_{cr}$  уменьшается на 8–14 %. Это означает, что в расчетах не всегда можно заменять рассматриваемые технологические дефекты трещинами-разрезами. Анализ полученных результатов показывает, что параметр эллипса  $m$  и регулярные члены в (3) оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние наклонного трещиноподобного дефекта. Тензор напряжений для внутренних технологических дефектов в сварных швах соответствует следующим значениям параметра  $m$ :  $0,6 < m < 1,0$  (непровары) и  $m \rightarrow 1$  (трещины, несплавления). Такие дефекты могут вызвать хрупкое разрушение.

**2. Перемещения в случае наклонного эллиптического отверстия при двухосном нагружении пластины.** С использованием полученных в [5] формул для комплексных потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  по приведенным в [3] формулам можно вычислить перемещения:

$$2\mu(u_x + iu_y) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}. \quad (4)$$

Здесь  $\mu$  — модуль сдвига;  $\varkappa$  — упругая постоянная (в случае плоской деформации  $\varkappa = 3 - 4\nu$ , в случае обобщенного плоского напряженного состояния  $\varkappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$ ).

Используя формулу (4) и выражения для потенциалов  $\Phi(z)$  и  $\Psi(z)$  [5], после ряда преобразований получаем точные формулы для перемещений

$$2\mu u_x = -A_0 \left[ \cos 2\beta \left( \varkappa + 1 + \frac{1+m^2}{m} \right) (r \cos \theta + d) - r \sin \theta \sin 2\beta \left( \varkappa - 1 - \frac{1-m^2}{m} \right) \right] + \\ + A_0 \sqrt{rr'} \left( \frac{1-m^2}{m} \cos 2\beta \cos \frac{\theta+\theta'}{2} - \frac{1+m^2}{m} \sin 2\beta \sin \frac{\theta+\theta'}{2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{K_I}{2\sqrt{\pi d}} \frac{1}{\sqrt{rr'}} [\varkappa rr' - (r \cos \theta + d)^2 - (r \sin \theta)^2 - 2a^2 B_1] \cos \frac{\theta + \theta'}{2} + \\
 & + \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi d}} \frac{1}{\sqrt{rr'}} [\varkappa rr' + (r \cos \theta + d)^2 + (r \sin \theta)^2 + 2a^2 B_1] \sin \frac{\theta + \theta'}{2}; \quad (5)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\mu u_y = & -A_0 \left[ \cos 2\beta \left( \varkappa + 1 + \frac{1+m^2}{m} \right) r \sin \theta + (r \cos \theta + d) \sin 2\beta \left( \varkappa - 1 - \frac{1-m^2}{m} \right) \right] - \\
 & - A_0 \sqrt{rr'} \left( \frac{1-m^2}{m} \cos 2\beta \sin \frac{\theta + \theta'}{2} + \frac{1+m^2}{m} \sin 2\beta \cos \frac{\theta + \theta'}{2} \right) + \\
 & + \frac{K_I}{2\sqrt{\pi d}} \frac{1}{\sqrt{rr'}} [\varkappa rr' - (r \cos \theta + d)^2 - (r \sin \theta)^2 - 2a^2 B_1] \sin \frac{\theta + \theta'}{2} - \\
 & - \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi d}} \frac{1}{\sqrt{rr'}} [\varkappa rr' + (r \cos \theta + d)^2 + (r \sin \theta)^2 + 2a^2 B_1] \cos \frac{\theta + \theta'}{2}, \quad (6)
 \end{aligned}$$

где

$$B_1 = \frac{1+m^2}{(1+m)^2}.$$

В частном случае для линейной трещины ( $m = 1$ ) формулы (5), (6) для перемещений  $u_x, u_y$  соответствуют формулам в [1].

**3. Максимальное касательное напряжение для наклонного эллиптического отверстия при двухосном нагружении пластины.** Используя соотношение для максимального касательного напряжения

$$\tau_{\max}^2 = (\sigma_x - \sigma_y)^2/4 + \tau_{xy}^2, \quad (7)$$

на основе формул для напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$  [5] после ряда преобразований из (7) получаем формулу для  $\tau_{\max}$

$$\begin{aligned}
 \tau_{\max}^2 = & A_0^2 H_1 + 2A_0 \left( \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} H_2 + \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} H_3 \right) + \\
 & + \left( \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \right)^2 H_4 + 2 \frac{K_I K_{II}}{4\pi a} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} H_5 + \left( \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \right)^2 H_6, \quad (8)
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 H_1 = & \left[ \left( \frac{1+m^2}{m} - F_1 \frac{1-m^2}{m} \right) \cos 2\beta + F_2 \frac{1+m^2}{m} \sin 2\beta \right]^2 + \left( \sin 2\beta \frac{1-m^2}{m} F_2 \right)^2, \\
 H_2 = & \left[ \left( \frac{1+m^2}{m} - F_1 \frac{1-m^2}{m} \right) \cos 2\beta + F_2 \frac{1+m^2}{m} \sin 2\beta \right] \times \\
 & \times \left( \frac{2a^2 r \sin \theta}{(rr')^{3/2}} \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} + (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} \right) + \\
 & + \sin 2\beta \frac{1-m^2}{m} F_2 \left( \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} - \right. \\
 & \left. - \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} 2r \sin \theta \frac{a^2}{(rr')^{3/2}} \right),
 \end{aligned}$$

$$H_3 = \left[ \left( \frac{1+m^2}{m} - F_1 \frac{1-m^2}{m} \right) \cos 2\beta + F_2 \frac{1+m^2}{m} \sin 2\beta \right] \times \\ \times \left( \frac{2a^2 r \sin \theta}{(rr')^{3/2}} \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} - (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} \right) + \\ + \sin 2\beta \frac{1-m^2}{m} F_2 \left( \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \right. \\ \left. + \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} r \sin \theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} + \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} F_1 \right),$$

$$H_4 = \frac{4a^4}{(rr')^3} \left( r^2 \sin^2 \theta + (r \cos \theta + d)^2 \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \right),$$

$$H_5 = \left( \frac{2a^2 r \sin \theta}{(rr')^{3/2}} \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} - (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} \right) \times \\ \times \left( \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} F_1 \right),$$

$$H_6 = \left( \frac{2a^2 r \sin \theta}{(rr')^{3/2}} \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} - (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} \right)^2 + \\ + \left( \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} r \sin \theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} + \right. \\ \left. + \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} F_1 \right)^2.$$

В случае трещины ( $m = 1$ ) формула (8) значительно упрощается.

На рис. 2 показаны линии уровня максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$ , определяемого по формуле (8) при угле наклона  $\beta = 0^\circ$  и различных значениях параметра эллипса. На рис. 3 показаны линии уровня  $\tau_{\max}$  в случае двухосного нагружения пластины ( $\varepsilon = 0,5$ ) при различных значениях  $\beta$ .

**4. Главные напряжения в случае наклонного эллиптического отверстия при двухосном нагружении пластины.** Главные напряжения определяются по формуле

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm \tau_{\max}. \quad (9)$$

Подставляя в (9) выражения для  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  [5] и  $\tau_{\max}$  в (8), после ряда преобразований получаем

$$\sigma_{1,2} = 2A_1 F_1 - 2A_0 \cos 2\beta - 2A_2 F_2 \pm \tau_{\max} \quad (10)$$

(величины  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $A_2$  определены выше).

**5. Интенсивность напряжений в случае наклонного эллиптического отверстия при двухосном нагружении пластины.** Определим интенсивность напряжений  $\sigma_i$  в случае плоского напряженного состояния пластины:

$$\sigma_i^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2 - \sigma_x \sigma_y + 3\tau_{xy}^2 = (\sigma_x + \sigma_y)^2 + 3(\tau_{xy}^2 - \sigma_x \sigma_y). \quad (11)$$

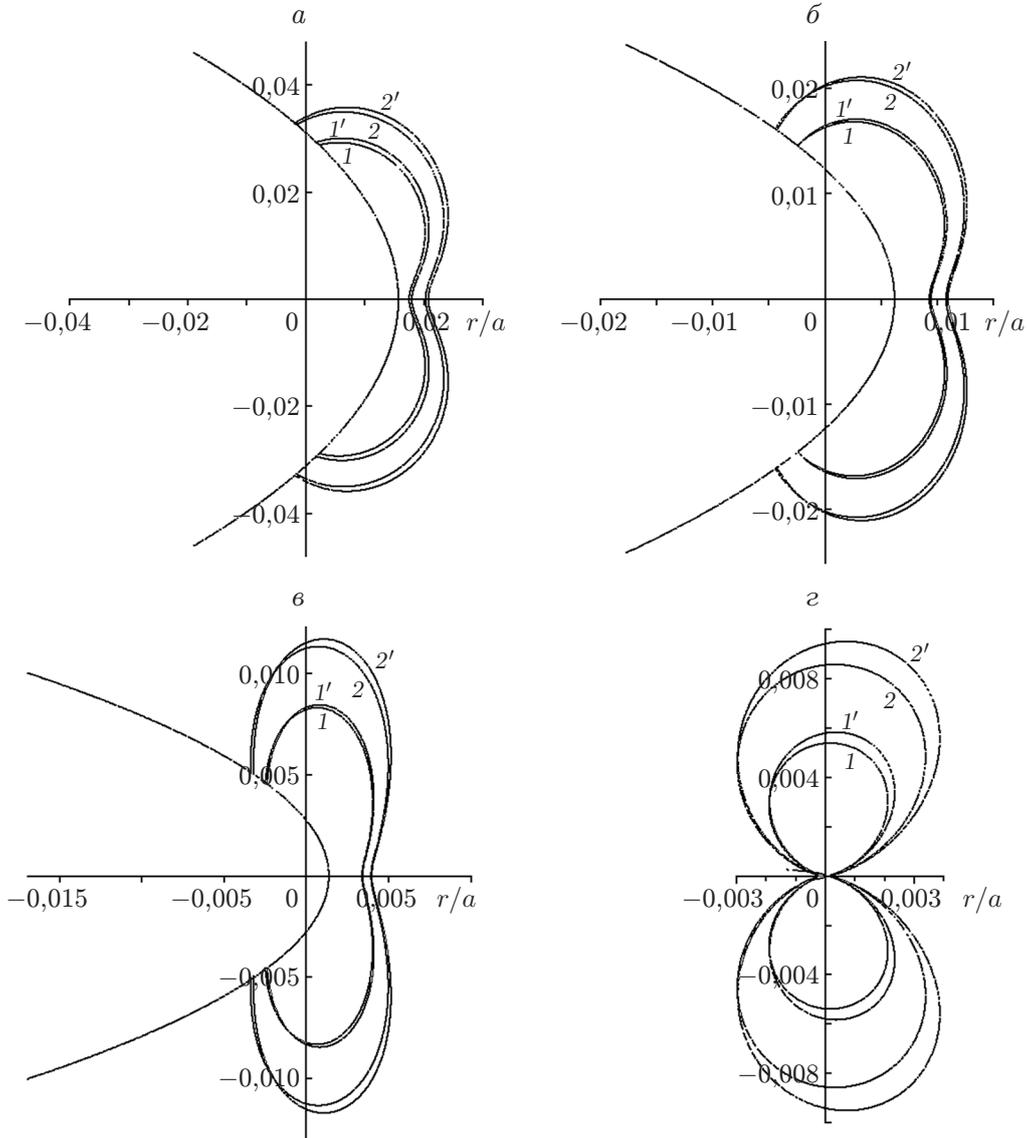


Рис. 2. Линии уровня  $\tau_{\max}$  при  $\beta = 0^\circ$  и различных значениях параметра  $m$ :  
 а —  $m = 0,7$ , б —  $m = 0,8$ , в —  $m = 0,9$ , г —  $m = 1,0$ ; 1, 2 —  $\varepsilon = 0$ , 1', 2' —  $\varepsilon = 0,5$ ;  
 1, 1' —  $\tau_{\max} = 4\sigma$ , 2, 2' —  $\tau_{\max} = 5\sigma$

Подставляя формулы для тензора напряжений [5] в (11), получаем

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 = & A_0^2(16 \cos^2 2\beta + 3J_1) + \left( \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{(1+m)^2}{4m}} \right)^2 (3J_6 + 16F_2^2) + \\ & + 2A_0 \sqrt{\frac{(1+m)^2}{4m}} \left( \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} (3J_2 - 16F_1 \cos 2\beta) + \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} (3J_3 - 16F_2 \cos 2\beta) \right) + \\ & + \left( \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt{\frac{(1+m)^2}{4m}} \right)^2 (3J_4 + 16F_1^2) + 2 \frac{K_I K_{II}}{4\pi a} \sqrt{\frac{(1+m)^2}{4m}} (3J_5 + 16F_1 F_2), \quad (12) \end{aligned}$$

где

$$J_1 = \left( \sin 2\beta \frac{1-m^2}{m} F_2 \right)^2 - \cos^2 2\beta \left( -\frac{(1-m)^2}{m} - 4 + \frac{1-m^2}{m} F_1 \right) \left( \frac{(1-m)^2}{m} - \frac{1-m^2}{m} F_1 \right),$$

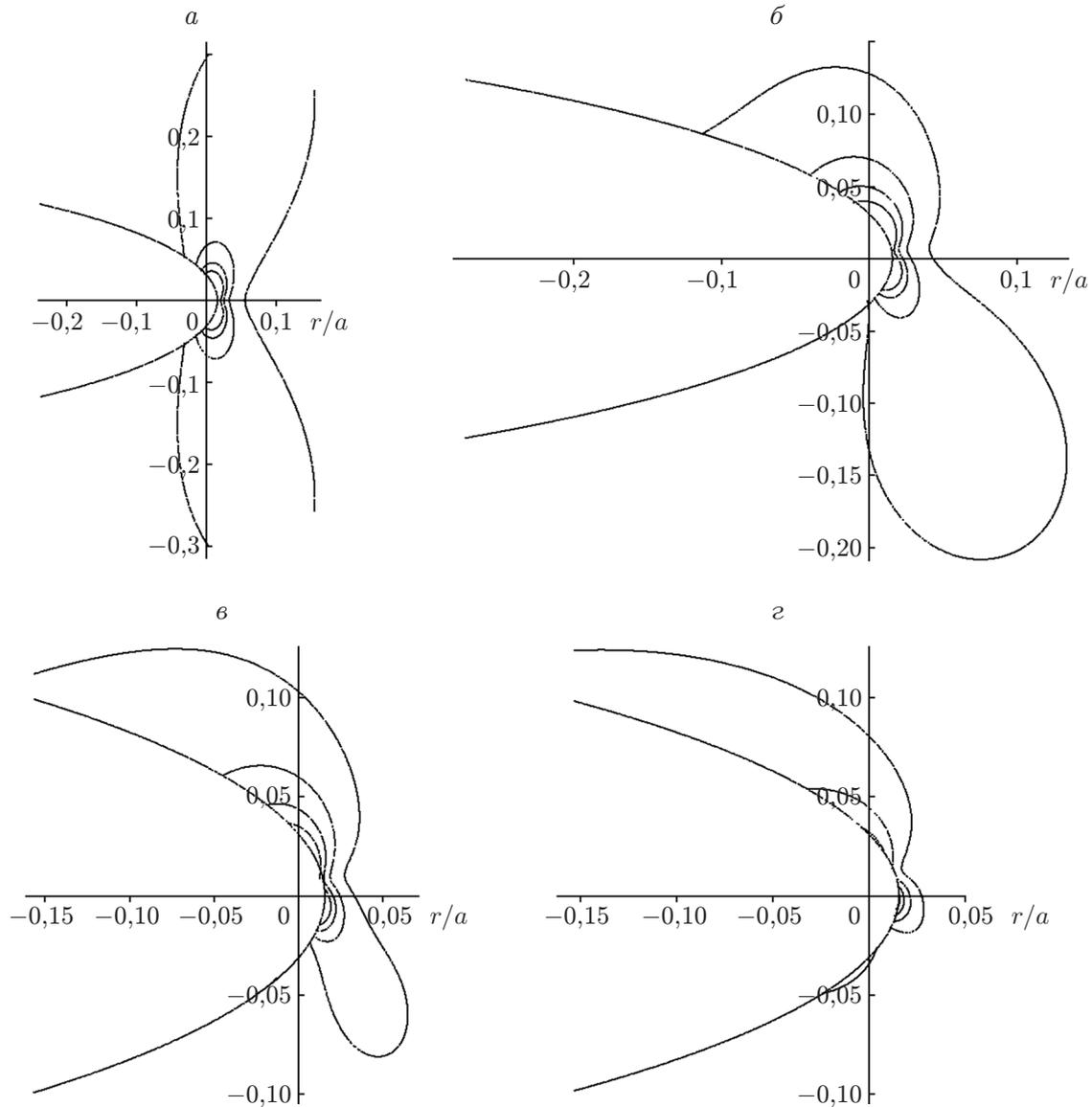


Рис. 3. Линии уровня  $\tau_{\max}$  при  $\varepsilon = 0,5$  и различных углах наклона  $\beta$ :  
 а —  $\beta = 0^\circ$ , б —  $\beta = 30^\circ$ , в —  $\beta = 45^\circ$ , г —  $\beta = 60^\circ$

$$\begin{aligned}
 J_2 &= \sin 2\beta \frac{1-m^2}{m} F_2 \left( \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} A - \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} B \right) + \\
 &\quad + \cos 2\beta \left[ 4F_1 + \left( 2 + \frac{(1-m)^2}{m} - \frac{1-m^2}{m} F_1 \right) \left( \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} A + \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} B \right) \right], \\
 J_3 &= \sin 2\beta \frac{1-m^2}{m} F_2 \left( \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} A + \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} B + \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} F_1 \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cos 2\beta \left( -\frac{(1-m)^2}{m} - 4 + \frac{1-m^2}{m} F_1 \right) \left( \frac{(1-m)^2}{m} F_2 + \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} A - \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} B \right) + \\
 &\quad + \frac{1}{2} \cos 2\beta \left( \frac{(1-m)^2}{m} - \frac{1-m^2}{m} F_1 \right) \left[ \left( -\frac{(1-m)^2}{m} - 4 \right) F_2 - \sin \frac{3(\theta+\theta')}{2} A + \cos \frac{3(\theta+\theta')}{2} B \right], \\
 J_4 &= A^2 + B^2 - 4F_1^2,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 J_5 &= \left( \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} A - \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} B \right) \left( \frac{1 - m^2}{m} - \frac{1 + m^2}{m} F_1 \right) - 4F_1 F_2 - \\
 &\quad - 2 \left( \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} A + \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} B \right) \left( \frac{(1 - m)^2}{m} + 2 \right) F_2, \\
 J_6 &= \left( \frac{1 - m^2}{m} - \frac{1 + m^2}{m} F_1 \right)^2 + \left( \frac{(1 - m)^2}{m} + 4 \right) \frac{(1 - m)^2}{m} F_2^2 + A^2 + B^2 + \\
 &\quad + 2 \left( \frac{1 - m^2}{m} - \frac{1 + m^2}{m} F_1 \right) \left( \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} A + \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} B \right) + \\
 &\quad + 2 \left( \frac{(1 - m)^2}{m} + 2 \right) F_2 \left( \sin \frac{3(\theta + \theta')}{2} A - \cos \frac{3(\theta + \theta')}{2} B \right), \\
 A &= (r \cos \theta + d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1 - m)^2}{(1 + m)^2}, \quad B = r \sin \theta \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}}.
 \end{aligned}$$

В случае трещины ( $m = 1$ ) формула (12) существенно упрощается. Формулу (12) можно использовать для определения зон пластической деформации в вершине эллипса в зависимости от угла наклона эллипса  $\beta$ , параметра двухосного нагружения  $\varepsilon$ , растягивающего напряжения  $\sigma$  и параметра эллипса  $m$ .

С помощью формул (10), (12) получено выражение для жесткости напряженного состояния  $\sigma_1/\sigma_i$ , которая в условиях низких температур является важной характеристикой при хрупком разрушении сварных конструкций с технологическими дефектами. Анализ жесткости напряженного состояния эллиптических дефектов с различными радиусами закругления в сварных швах проведен в [8].

Размер пластической зоны, являющийся слагаемым в выражении для эффективной длины эллипса, необходим при расчете прочности конструкций, имеющих сварные технологические дефекты. Для выявления общих закономерностей и оценки параметров трещиностойкости механически-неоднородных сварных соединений с дефектами необходимо проводить дополнительные теоретические и экспериментальные исследования.

**6. Экспериментальное определение главного напряжения  $\sigma_1$  в случае наклонного эллиптического выреза методом голографической интерферометрии.** В [9] приведен обзор методов определения экспериментальных значений коэффициентов интенсивности напряжений (КИН)  $K_I$  и  $K_{II}$  на оптически чувствительных пластинах с наклонной трещиной по приближенным формулам [2] методом фотоупругости при одноосном растяжении. Коэффициенты  $K_I$  и  $K_{II}$  в пластине с наклонным эллиптическим дефектом в случае двухосного нагружения вычислены по формулам [5, 6]:

$$K_I = \sqrt[4]{\frac{4m}{(1 + m)^2}} \left( \sqrt{\pi a} \frac{\sigma(m(1 + \varepsilon) + (1 - \varepsilon) \cos 2\beta)}{2m} \right); \tag{13}$$

$$K_{II} = -\sqrt[4]{\frac{4m}{(1 + m)^2}} \left( \sqrt{\pi a} \frac{\sigma(1 - \varepsilon) \sin 2\beta}{2m} \right). \tag{14}$$

В случае линейной трещины ( $m = 1$ ) формулы (13), (14) соответствуют формулам в [2].

В соответствии с теорией Неймана и законом Гука, полагая деформации малыми, для тонкой пластины имеем зависимость между номерами интерференционных полос на картинах абсолютных разностей хода (АРХ) и главными напряжениями  $\sigma_1, \sigma_2$  в виде соотношений Фавра [10]

$$N_1 = a_1\sigma_1 + b_1\sigma_2, \quad N_2 = a_1\sigma_2 + b_1\sigma_1, \tag{15}$$

где  $N_1, N_2$  — номера полос на картинах АРХ при вертикальной и горизонтальной поляризациях опорного пучка соответственно. Методика определения КИН и описание эксперимента приведены в [11].

При обработке картин АРХ в выражении (10) для главных напряжений вдоль оси эллипса  $\sigma_1, \sigma_2$  будем полагать  $\theta = 0^\circ$  и  $r \ll d$ :

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} &= \frac{K_I}{\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \frac{r+d}{\sqrt{rr'}} - \frac{\sigma(1-\varepsilon)}{2m} \cos 2\beta \pm \tau_{\max}, \\ \tau_{\max}^2 &= A_0^2 \left[ \left( \frac{1+m^2}{m} - \frac{r+d}{\sqrt{rr'}} \frac{1-m^2}{m} \right) \cos 2\beta \right]^2 + \\ &+ 2A_0 \left[ \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \left( \frac{1+m^2}{m} - \frac{r+d}{\sqrt{rr'}} \frac{1-m^2}{m} \right) \cos 2\beta (r+d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} \right] + \\ &+ \left( \frac{K_I}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \right)^2 \frac{4a^4}{(rr')^3} (r+d)^2 \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \\ &+ \left( \frac{K_{II}}{2\sqrt{\pi a}} \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} \right)^2 \left( (r+d) \frac{2a^2}{(rr')^{3/2}} \frac{(1-m)^2}{(1+m)^2} + \frac{1-m^2}{m} - \frac{1+m^2}{m} \frac{r+d}{\sqrt{rr'}} \right)^2. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $r' = r + 2d$ .

Экспериментальная проверка теоретической формулы (14) для главных напряжений  $\sigma_1, \sigma_2$  проводилась методом голографической интерферометрии. Описание эксперимента на пластине с наклонным эллиптическим вырезом при одноосном растяжении приведено в [5, 6, 11]. С использованием полученных результатов вычислено значение  $K_I^{\text{э}} = 0,211 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$  по формуле (3.2) в [5], которое согласуется с расчетным значением  $K_I^{\text{р}} = 0,217 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ , полученным по формуле (13) с погрешностью, равной 2,7 %. Экспериментальное значение  $K_{II}^{\text{э}} = 0,139 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ , вычисленное по формуле (3.4) в [5], согласуется с теоретическим значением  $K_{II}^{\text{р}} = 0,142 \text{ МПа} \cdot \text{м}^{1/2}$ , вычисленным по выражению (14) с погрешностью, равной 2,1 %. На рис. 4 видно, что полученные значения  $K_{II}$  аппроксимируются наклонной прямой. Значения  $K_I$  вычисляются по приближенным формулам с погрешностью, равной 9,1 % [6]. На рис. 5 приведены экспериментальные значения главных напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , полученные с использованием формул (15), и значения  $\sigma_1, \sigma_2$ , вычисленные по формулам (16). Из рис. 5 следует, что по мере приближения к вершине дефекта влияние сингулярной части решения на значение главного напряжения  $\sigma_1$  существенно возрастает. Погрешность для  $\sigma_1$  составляет 9,7 %, для  $\sigma_2$  — 7–8 %. Экспериментальные точки расположены выше теоретических кривых. Это означает, что теоретические значения  $\sigma_1, \sigma_2$  идут в запас прочности.

Полученные результаты свидетельствуют о высокой точности определения значений главного напряжения  $\sigma_1$  и КИН по предложенной методике при анализе картин полос АРХ в вершине наклонного эллиптического выреза в пластине.

С использованием формулы (15) для главных напряжений получены формулы для определения интенсивности напряжений  $\sigma_i$  и жесткости напряженного состояния  $\sigma_1/\sigma_i$  по картинам АРХ [12]:

$$\begin{aligned} \sigma_i^2 &= \frac{1}{(a_1^2 - b_1^2)^2} [(a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2)(N_1^2 + N_2^2) - (a_1^2 + 4a_1 b_1 + b_1^2)N_1 N_2], \\ \frac{\sigma_1}{\sigma_i} &= \frac{a_1 N_1 - a_2 N_2}{\sqrt{(a_1^2 + a_1 b_1 + b_1^2)(N_1^2 + N_2^2) - (a_1^2 + 4a_1 b_1 + b_1^2)N_1 N_2}}. \end{aligned} \quad (17)$$

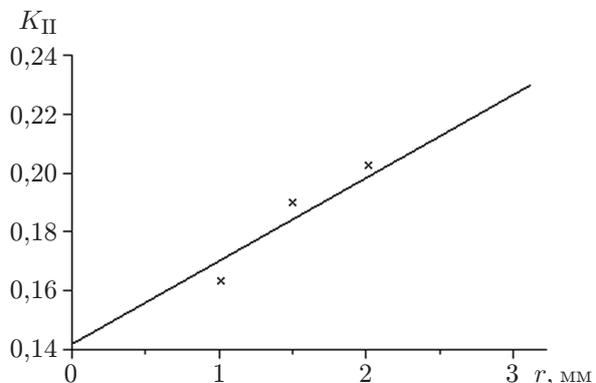


Рис. 4

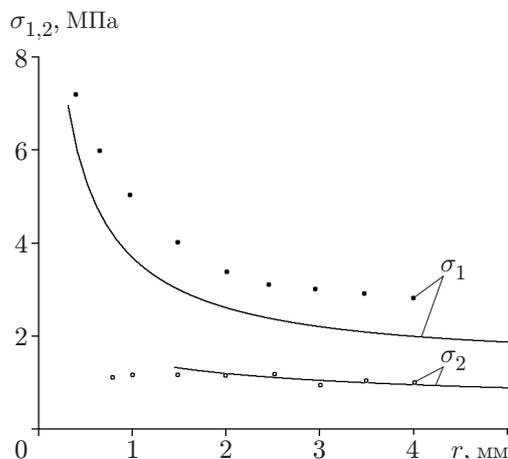


Рис. 5

Рис. 4. Экспериментальные значения КИН, полученные методом голографической интерферометрии (точки), и их линейная аппроксимация (линия)

Рис. 5. Теоретическая (линии) и экспериментальная (точки) зависимости значений  $\sigma_{1,2}$  от расстояния от вершины дефекта

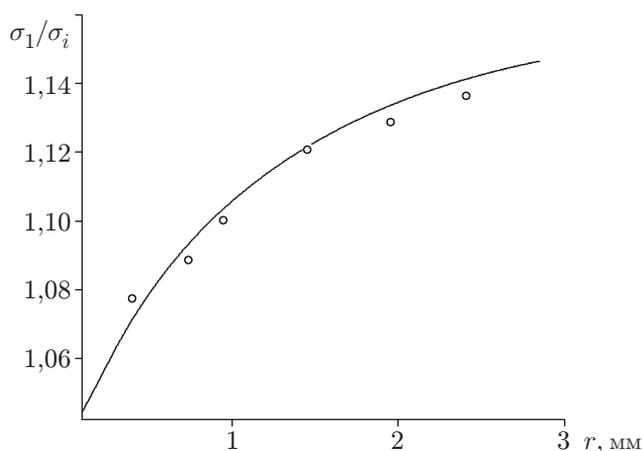


Рис. 6. Экспериментальная (точки) и теоретическая (линия) зависимости жесткости напряженного состояния  $\sigma_1/\sigma_i$  от расстояния от вершины дефекта

На рис. 6 приведены экспериментальные данные для жесткости напряженного состояния, обработанные с помощью формул (17), и теоретические значения, вычисленные по формулам (12), (16) при  $\beta = 0$ . Представляет интерес критерий [13], учитывающий вид напряженного состояния в вершине трещины, в основу которого положены эквивалентные напряжения, определенные в [14]. По этому критерию можно получить условия и хрупкого, и пластичного разрушения. Поскольку в предельных случаях при  $\chi = \sigma_p/\sigma_c = 0$  (отношение пределов прочности (текучести) при растяжении и сжатии) и  $\chi = 1$  данный критерий переходит в первую и четвертую гипотезы прочности, он является комбинацией критерия  $\sigma_\theta$  и критерия энергии формоизменения  $S_d$ .

Для определения предельного состояния в случае двухосного растяжения можно использовать любой известный критерий, выраженный в напряжениях, например критерий Писаренко — Лебедева [14], с учетом формулы (10) для главного напряжения  $\sigma_1$  и форму-

лы (12) для интенсивности напряжений  $\sigma_i$ . Критерий Писаренко — Лебедева определяется соотношением  $\chi\sigma_i + (1 - \chi)\sigma_1 = \sigma_p$ , где параметр  $0 \leq \chi \leq 1$  определяется в эксперименте на кручение.

**7. Концентрация напряжений в случае внутренних технологических дефектов.** Опыт эксплуатации магистральных газонефтепроводов, химического, энергетического оборудования, деталей машин показывает, что внутренние технологические дефекты в сварных швах могут приводить к снижению статической и циклической прочности элементов конструкций и способствовать их разрушению. Поэтому существует необходимость разработки методики оценки влияния технологических дефектов на прочность стыковых сварных швов, учитывающей двухосность нагружения, угол наклона и радиус кривизны в вершинах дефектов. Исследование влияния внутренних сварных дефектов на статическую и циклическую прочность является актуальной проблемой в тех случаях, когда при низких температурах наличие внутреннего дефекта может привести к хрупкому разрушению. Метод основан на предположении, согласно которому при статических нагрузках при наличии сварных дефектов, чувствительных к концентрации напряжений, разрушение конструкции начинается вблизи концентраторов, для которых коэффициент концентрации напряжений в упругой области максимален. Для сварных сосудов и труб большого диаметра при наличии технологических дефектов с углом наклона  $\beta = 0^\circ$  с использованием формулы (2) для  $\sigma_\theta$  при  $\theta = 0^\circ$  на расстоянии  $r = a - d$  от вершины эллипса после ряда преобразований получим выражения для максимального напряжения  $\sigma_y^{\max}$  и коэффициента концентрации напряжений  $\alpha_\sigma$  [15]

$$\sigma_y^0 = \frac{K_I}{\sqrt{\pi\rho}} \left[ 2 \sqrt[4]{\frac{(1+m)^2}{4m}} + \frac{1-\varepsilon}{m} \frac{1-m}{1+m} \left( \frac{1+m}{2\sqrt{m}} \right)^{1/2} \frac{2m}{m(1+\varepsilon) + (1-\varepsilon)} \right];$$

$$\alpha_\sigma = \frac{(1+m)(1+\varepsilon) + 2(1-\varepsilon)}{1-m}. \quad (18)$$

Значения коэффициентов концентрации напряжений  $\alpha_\sigma$ , вычисленные по формуле (18) для трещины, несплавления и непровара при различных значениях параметра  $m$ , приведены в таблице [15].

**Заключение.** В работе методом Колосова — Мухелишвили получены точные формулы для компонент тензора напряжений  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$ ,  $\tau_{r\theta}$  в полярных координатах, перемещений  $u_x$ ,  $u_y$ , максимального касательного напряжения  $\tau_{\max}$ , главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$ , интенсивности напряжений  $\sigma_i$  для наклонного эллиптического отверстия в пластине в случае ее двухосного растяжения при плоском напряженном состоянии. В частном случае при  $m = 1$  формулы для перемещений в окрестности вершины эллиптического отверстия вытекают из соотношения линейной теории трещины [1]. В случае наклонного эллиптического выреза экспериментальные значения  $\sigma_1$ , определенные методом голографической интерферометрии, согласуются с расчетными значениями с погрешностью, равной 9,7 %, а значения  $K_I$ ,  $K_{II}$  — с погрешностями, равными 2,7 и 2,1 % соответственно.

Несмотря на то что формулы точного решения значительно сложнее формул приближенного решения, только их можно применять для надежного сравнения теоретических и экспериментальных данных в случае наклонного эллиптического дефекта.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Theocaris P. S., Michopoulos J. G.** A closed form solution of slant crack under biaxial loading // Engng Fract. Mech. 1983. V. 17, N 2. P. 97–123.
2. **Eftis J., Subramonian N.** The inclined crack under biaxial load // Engng Fract. Mech. 1978. V. 10, N 1. P. 43–67.

3. **Мусхелишвили Н. И.** Некоторые основные задачи математической теории упругости. М.: Наука, 1966.
4. **Винокуров В. А.** Использование положений механики разрушения для оценки свойств сварных соединений // Свароч. пр-во. 1977. № 5. С. 2–4.
5. **Остсемин А. А., Уткин П. Б.** Напряженное состояние в окрестности наклонного эллиптического дефекта и коэффициенты интенсивности напряжений при двухосном нагружении пластины // ПМТФ. 2009. Т. 50, № 1. С. 118–127.
6. **Остсемин А. А., Уткин П. Б.** Напряженно-деформированное состояние и коэффициенты интенсивности напряжений трещиноподобного дефекта // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 2. С. 73–78.
7. **Каминский А. А.** Хрупкое разрушение вблизи отверстий. Киев: Ин-т механики АН УССР, 1982.
8. **Копельман А. А.** Сопротивляемость сварных узлов хрупкому разрушению. Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-ние, 1978.
9. **Theocaris P. S., Spyropoulos C. P.** Photoelastic determination of complex stress intensity factors for slant cracks under biaxial loading with higher-order term effects // Acta Mech. 1983. N 48. P. 57–70.
10. **Александров А. Я.** Поляризационно-оптические методы механики деформируемого тела / А. Я. Александров, М. Х. Ахметзянов. М.: Наука, 1973.
11. **Остсемин А. А.** Определение напряженного состояния и коэффициентов интенсивности напряжений в конструкциях с трещиноподобными дефектами методом голографической интерферометрии // Вестн. машиностроения. 2009. № 8. С. 21–28.
12. **Остсемин А. А.** Определение напряженного состояния тел с дефектами методом голографической интерферометрии // Пробл. прочности. 1982. № 10. С. 77–81.
13. **Красовский А. Я.** Хрупкость металлов при низких температурах. Киев: Наук. думка, 1980.
14. **Писаренко Г. С.** Деформирование и прочность материалов при сложном напряженном состоянии / Г. С. Писаренко, А. А. Лебедев. Киев: Наук. думка, 1976.
15. **Остсемин А. А., Уткин П. Б.** Расчет коэффициентов концентрации напряжений внутренних технологических дефектов // Вестн. машиностроения. 2008. № 12. С. 14–17.

*Поступила в редакцию 17/II 2011 г.,  
в окончательном варианте — 1/IX 2011 г.*

---