

УДК 532.5

## ГИДРАВЛИЧЕСКИЕ ПРЫЖКИ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ПОВЕРХНОСТЬЮ

С. Л. Гаврилюк, М. Ю. Казакова<sup>\*,\*\*</sup>

Институт промышленных термических систем Университета Экс-Марселя,  
13453 Марсель, Франция

\* Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

\*\* Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск

E-mails: sergey.gavrilyuk@polytech.univ-mrs.fr, m.u.kazakova@gmail.com

Представлено замыкающее соотношение, описывающее гидравлические прыжки в двухслойной жидкости со свободной поверхностью над плоским дном. Это соотношение получено из уравнений импульса каждого слоя, которые при выполнении условия сохранения полного импульса и массы каждого слоя становятся в некотором смысле консервативными. Показано, что выбор данного соотношения обеспечивает уменьшение полной энергии на скачке.

Ключевые слова: уравнения двухслойной мелкой воды, законы сохранения, соотношения Рэнкина — Гюгонио, консервативные уравнения.

**1. Определяющие уравнения.** Рассматривается течение двух тяжелых несмешивающихся слоев жидкости толщиной  $h_1$  и  $h_2$  соответственно над плоским дном (рис. 1). В приближении мелкой воды может быть получена следующая модель [1, 2]:

$$(\gamma_1 h_1)_t + (\gamma_1 h_1 u_1)_x = 0, \tag{1}$$

$$(\gamma_2 h_2)_t + (\gamma_2 h_2 u_2)_x = 0;$$

$$\gamma_1 h_1 (u_{1t} + u_1 u_{1x}) + g h_1 (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)_x = 0, \tag{2}$$

$$\gamma_2 h_2 (u_{2t} + u_2 u_{2x}) + g h_2 \gamma_2 (h_1 + h_2)_x = 0.$$

Здесь  $\gamma_1, \gamma_2$  — постоянные плотности ( $\gamma_1 > \gamma_2$ );  $u_1, u_2$  — скорости жидкости в каждом слое;  $g$  — ускорение свободного падения.

В работах [3, 4] показано, что система (1), (2) наряду с законами сохранения массы каждого слоя допускает только законы сохранения полного импульса

$$(\gamma_1 h_1 u_1 + \gamma_2 h_2 u_2)_t + (\gamma_1 h_1 u_1^2 + \gamma_2 h_2 u_2^2 + E)_x = 0, \tag{3}$$

полной энергии

$$(\gamma_1 h_1 u_1^2/2 + \gamma_2 h_2 u_2^2/2 + E)_t + (u_1 h_1 (\gamma_1 u_1^2/2 + g(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)) + u_2 h_2 (\gamma_2 u_2^2/2 + g\gamma_2 (h_1 + h_2)))_x = 0$$

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки России (соглашение № 2012-1.5-8503) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (грант № НШ-2133.2014.1).

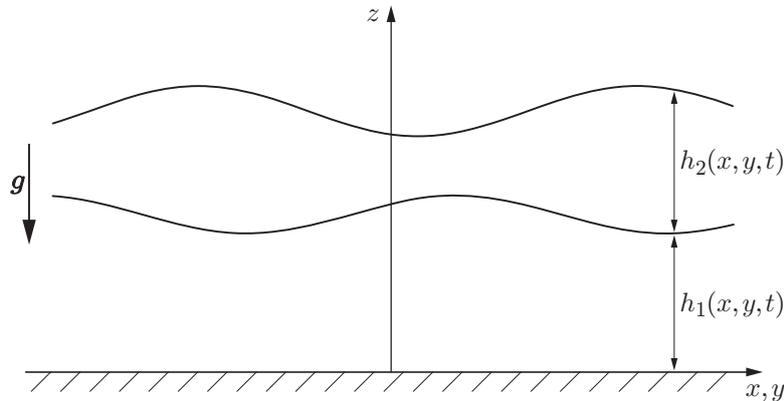


Рис. 1. Схема двухслойного течения со свободной поверхностью над плоским дном

и интегралы Бернулли

$$\begin{aligned} \gamma_1 u_{1t} + (\gamma_1 u_1^2/2 + g(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2))_x &= 0, \\ \gamma_2 u_{2t} + (\gamma_2 u_2^2/2 + g\gamma_2(h_1 + h_2))_x &= 0. \end{aligned} \quad (4)$$

Здесь  $E$  — “внутренняя энергия”, определяемая по формуле

$$E = g\gamma_1 h_1^2/2 + g\gamma_2 h_1 h_2 + g\gamma_2 h_2^2/2.$$

Соответствующий характеристический полином нетрудно получить из (1), (2):

$$((u_1 - \lambda)^2 - gh_1)((u_2 - \lambda)^2 - gh_2) - g^2(\gamma_2/\gamma_1)h_1 h_2 = 0. \quad (5)$$

Система (1), (2) является гиперболической при условии малости относительной скорости  $w = u_1 - u_2$  [2, 4–6]. Вследствие гиперболичности возможно формирование разрывных решений (соответствующих, например, гидравлическому прыжку), даже если начальные данные являются гладкими.

Дисперсионная регуляризация уравнений (1), (2) проведена в [7] и изучена в [8, 9]. В частности, в [8, 9] исследуются солитонные решения дисперсионных уравнений. Установлено, что если на бесконечности скорости жидкости в каждом слое равны, то при определенных значениях числа Фруда дисперсионные уравнения допускают решения в виде внутренней уединенной волны повышения (или понижения). Как правило, амплитуда волн на свободной поверхности существенно меньше амплитуды внутренних волн. Некоторые из таких волн повышения можно рассматривать как регулярные гидравлические прыжки, для которых полный импульс и энергия сохраняются.

Модель гидравлических прыжков для системы (1), (2), описывающей двухслойную мелкую воду, есть некоторое упрощение модели волнового бора, имеющего нестационарный осциллирующий “хвост” за передним гладким фронтом, представляющим собой уединенную волну. Такие волновые боры изучались в случае однослойных течений жидкости [10, 11], однако их нестационарный анализ для двухслойных течений не проводился.

При описании гидравлических прыжков в двухслойной жидкости важной проблемой является выбор соотношений Рэнкина — Гюгонио, определяющих скачок. Такими соотношениями могут быть законы сохранения массы (1) и полного импульса системы (3), закон сохранения энергии, играющий роль неравенства энтропии на скачке (случай однослойной жидкости рассмотрен в [12]), один из интегралов Бернулли. Подобная проблема возникает при описании двухслойных течений под твердой крышкой [2, § 3.5]. В этом случае одним из возможных способов для замыкания является использование интеграла Бернулли для сжимающегося слоя. Однако, как отмечается в [2], такое предположение не может быть

строго корректным, поскольку диссипация происходит в каждом слое. Таким образом, возможность использования интегралов Бернулли для двухслойных течений со свободной поверхностью не обоснована.

В [13] при изучении сдвиговых течений в однородных жидкостях для замыкания соотношений на скачке предложено использовать локальную завихренность. В случае двухслойной жидкости аналогом завихренности является разность скоростей. В [14] доказано, что при выборе в качестве основных переменных толщин слоев  $h_1$ ,  $h_2$ , полного импульса  $\gamma_1 h_1 u_1 + \gamma_2 h_2 u_2$  и разности скоростей  $u_1 - u_2$  размер области выпуклости полной энергии как функции этих переменных будет наибольшим по сравнению с другими вариантами выбора консервативных переменных (например,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ). Этот факт был принят в качестве математического обоснования выбора закона сохранения для относительной скорости. В [13] в случае очень слабой стратификации ( $\gamma_1 \approx \gamma_2$ ) использование закона сохранения для относительной скорости позволило построить решение задачи Римана в области гиперболичности, удовлетворяющее на скачке условию устойчивости Лакса.

В [6] при численном исследовании двухслойных течений над неровным дном использовалось приближение твердой крышки. В [15] неконсервативные члены оценивались с помощью процедуры интегрирования вдоль линейного пути в пространстве состояний. В последних двух случаях условия на скачке априори несовместны с энтропийным неравенством. Однако это неравенство всегда проверялось апостериори.

В настоящей работе реализована идея, предложенная В. М. Тешуковым в 2007 г. Он заметил, что неконсервативные уравнения импульса для каждого слоя становятся консервативными на многообразии, на котором масса каждого слоя и полный импульс системы сохраняются. В частности, в данной работе показано, что такое замыкание совместно с энтропийным неравенством.

**2. Основные соотношения.** Будем считать, что гидравлический прыжок является неподвижным в связанной с ним системе координат. Уравнения масс и импульсов (1), (3) могут быть проинтегрированы:

$$\begin{aligned} \gamma_1 h_1 u_1 = Q_1 = \text{const}, \quad \gamma_2 h_2 u_2 = Q_2 = \text{const}, \\ \gamma_1 h_1 u_1^2 + \gamma_2 h_2 u_2^2 + g\gamma_1 h_1^2/2 + g\gamma_2 h_1 h_2 + g\gamma_2 h_2^2/2 = M = \text{const}. \end{aligned} \quad (6)$$

Исключив скорости из уравнения импульсов, получаем

$$\frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1} + \frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_2} + \frac{g\gamma_1 h_1^2}{2} + g\gamma_2 h_1 h_2 + \frac{g\gamma_2 h_2^2}{2} = M = \text{const}.$$

Для заданных  $\gamma_1$ ,  $\gamma_2$  ( $\gamma_1 > \gamma_2$ ) и малых  $Q_1$ ,  $Q_2$  функция

$$M(h_1, h_2) = \frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1} + \frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_2} + \frac{g\gamma_1 h_1^2}{2} + g\gamma_2 h_1 h_2 + \frac{g\gamma_2 h_2^2}{2} \quad (7)$$

имеет только одну невырожденную критическую точку, которая является точкой минимума. Рассмотрим функцию  $M(h_1, h_2)$ , определенную в (7). Ее гессиан, обозначенный  $M''(h_1, h_2)$ , положительно определен:

$$M''(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 2Q_1^2/(\gamma_1 h_1^3) + g\gamma_1 & g\gamma_2 \\ g\gamma_2 & 2Q_2^2/(\gamma_2 h_2^3) + g\gamma_2 \end{pmatrix} > 0,$$

поскольку  $\gamma_1 > \gamma_2$ . Координаты точки минимума  $M(h_1, h_2)$  определяются из уравнений

$$h_1^2 \left( h_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_2 \right) = \frac{Q_1^2}{g\gamma_1^2}, \quad h_2^2 (h_2 + h_1) = \frac{Q_2^2}{g\gamma_2^2}. \quad (8)$$

Линии уровня функции  $M(h_1, h_2)$  в окрестности критической точки замкнуты.

Рассмотрим выражение для полной энергии

$$e = \frac{\gamma_1 h_1 u_1^2}{2} + \frac{\gamma_2 h_2 u_2^2}{2} + \frac{g \gamma_1 h_1^2}{2} + g \gamma_2 h_1 h_2 + \frac{g \gamma_2 h_2^2}{2}.$$

Частные производные полной энергии по скоростям  $u_i$  и толщинам  $h_i$  задают потоки интегралов Бернулли (4) и массовые потоки (1) [16]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial e}{\partial h_1} &= \frac{\gamma_1 u_1^2}{2} + g(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2) = R_1, & \frac{\partial e}{\partial u_1} &= \gamma_1 h_1 u_1 = Q_1, \\ \frac{\partial e}{\partial h_2} &= \frac{\gamma_2 u_2^2}{2} + g \gamma_2 (h_1 + h_2) = R_2, & \frac{\partial e}{\partial u_2} &= \gamma_2 h_2 u_2 = Q_2. \end{aligned}$$

Выражение для потока энергии имеет вид

$$\begin{aligned} D(h_1, h_2) &= \frac{Q_1}{\gamma_1} R_1 + \frac{Q_2}{\gamma_2} R_2 = \\ &= \frac{Q_1}{\gamma_1} \left( \frac{Q_1^2}{2\gamma_1 h_1^2} + g(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2) \right) + \frac{Q_2}{\gamma_2} \left( \frac{Q_2^2}{2\gamma_2 h_2^2} + g \gamma_2 (h_1 + h_2) \right). \end{aligned} \quad (9)$$

Вычислим гессиан функции  $D$ :

$$D''(h_1, h_2) = \begin{pmatrix} 3Q_1^3/(\gamma_1^2 h_1^4) & 0 \\ 0 & 3Q_2^3/(\gamma_2^2 h_2^4) \end{pmatrix}.$$

Критические точки функции  $D$  задаются уравнениями

$$\frac{Q_1}{\gamma_1} \left( -\frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1^3} + g \gamma_1 \right) + \frac{Q_2}{\gamma_2} g \gamma_2 = 0, \quad \frac{Q_1}{\gamma_1} g \gamma_2 + \frac{Q_2}{\gamma_2} \left( -\frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_2^3} + g \gamma_2 \right) = 0,$$

или

$$h_1^3 = \frac{Q_1^3}{g \gamma_1^2 (Q_1 + Q_2)}, \quad h_2^3 = \frac{Q_2^3}{g \gamma_2^2 ((\gamma_2/\gamma_1) Q_1 + Q_2)}. \quad (10)$$

Возможны два случая:

1. Течение в слоях происходит в одном направлении, т. е. знаки массовых потоков одинаковы. Для определенности предположим, что потоки положительны (течение происходит слева направо):

$$Q_1 > 0, \quad Q_2 > 0. \quad (11)$$

2. Знаки массовых потоков противоположны, например:

$$Q_1 > 0, \quad Q_2 < 0. \quad (12)$$

Случай (12) более сложный, поскольку в (10) могут возникнуть дополнительные особенности в знаменателе. Далее рассматривается только случай (11), для которого критическая точка является минимумом, а линии уровня функции  $D(h_1, h_2)$  также замкнуты.

В точках минимума функций  $M(h_1, h_2)$  и  $D(h_1, h_2)$ , обозначенных  $M_M$  и  $D_M$  соответственно, скорости каждого слоя  $u_1, u_2$  определены по соответствующим толщинам  $h_1, h_2$  в (8) и (10). Можно показать, что точки  $M_M$  и  $D_M$  всегда принадлежат области гиперболичности (в этих точках соответствующий характеристический полином (5) имеет три положительных корня и один нулевой). Рассмотрим более подробно случай, соответствующий нулевому корню. Запишем уравнение для критической кривой

$$C(h_1, h_2) = \left( \frac{Q_1^2}{\gamma_1^2 h_1^2} - g h_1 \right) \left( \frac{Q_2^2}{\gamma_2^2 h_2^2} - g h_2 \right) - g^2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_1 h_2 = 0, \quad (13)$$

полученное из характеристического полинома (5) при  $\lambda = 0$ .

**Теорема 1.** Если  $(h_1, h_2)$  — координаты точки экстремума функции  $M(h_1, h_2)$  или  $D(h_1, h_2)$ , определенные соответственно в (8) или (10), то  $C = 0$ , т. е. точки экстремума принадлежат критической кривой.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Точка минимума  $M(h_1, h_2)$  определяется уравнениями (8) и удовлетворяет соотношениям

$$\frac{Q_1^2}{\gamma_1^2 h_1^2} = g\left(h_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_2\right), \quad \frac{Q_2^2}{\gamma_2^2 h_2^2} = g(h_2 + h_1).$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{Q_1^2}{\gamma_1^2 h_1^2} - gh_1\right) \left(\frac{Q_2^2}{\gamma_2^2 h_2^2} - gh_2\right) - g^2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_1 h_2 = \\ &= \left(g\left(h_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_2\right) - gh_1\right) (g(h_2 + h_1) - gh_2) - g^2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_1 h_2 = 0. \end{aligned}$$

Точка минимума  $D$  определяется уравнениями (10) и удовлетворяет соотношениям

$$\frac{Q_1^2}{\gamma_1^2 h_1^2} = \frac{g(Q_1 + Q_2)}{Q_1} h_1, \quad \frac{Q_2^2}{\gamma_2^2 h_2^2} = \frac{g((\gamma_2/\gamma_1)Q_1 + Q_2)}{Q_2} h_2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} C &= \left(\frac{Q_1^2}{\gamma_1^2 h_1^2} - gh_1\right) \left(\frac{Q_2^2}{\gamma_2^2 h_2^2} - gh_2\right) - g^2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_1 h_2 = \\ &= \left(\frac{g(Q_1 + Q_2)}{Q_1} h_1 - gh_1\right) \left(\frac{g((\gamma_2/\gamma_1)Q_1 + Q_2)}{Q_2} h_2 - gh_2\right) - g^2 \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_1 h_2 = 0. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

ЗАМЕЧАНИЕ. Линия равных скоростей  $u_1 = u_2$ , которая может быть описана формулой

$$\frac{Q_1}{\gamma_1 h_1} - \frac{Q_2}{\gamma_2 h_2} = 0,$$

всегда проходит выше точек минимума функций  $M(h_1, h_2)$  и  $D(h_1, h_2)$  на плоскости  $(h_1, h_2)$ .

Рассмотрим точку минимума функции  $M(h_1, h_2)$ , для которой справедливы соотношения

$$\frac{Q_1^2}{\gamma_1^2 h_1^2} = u_1^2 = g\left(h_1 + \frac{\gamma_2}{\gamma_1} h_2\right), \quad \frac{Q_2^2}{\gamma_2^2 h_2^2} = u_2^2 = g(h_2 + h_1).$$

Тогда

$$\frac{Q_1^2}{\gamma_1^2 h_1^2} - \frac{Q_2^2}{\gamma_2^2 h_2^2} = u_1^2 - u_2^2 = gh_2 \left(\frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1\right) < 0,$$

т. е. в точке минимума функции  $M(h_1, h_2)$   $u_1 - u_2 < 0$ .

Рассмотрим точку минимума функции  $D(h_1, h_2)$ , для которой справедливы соотношения

$$\frac{Q_1^3}{\gamma_1^3 h_1^3} = \frac{g(Q_1 + Q_2)}{\gamma_1}, \quad \frac{Q_2^3}{\gamma_2^3 h_2^3} = \frac{g((\gamma_2/\gamma_1)Q_1 + Q_2)}{\gamma_2}.$$

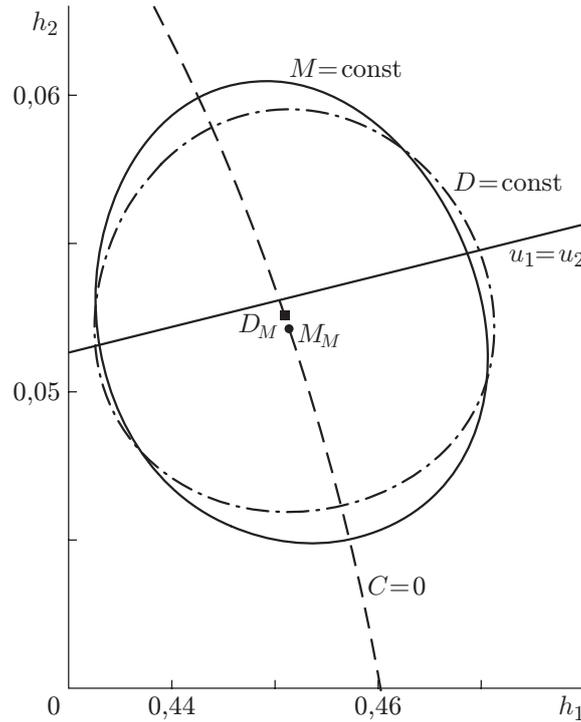


Рис. 2. Типичное расположение кривых  $C = 0$ ,  $M = \text{const}$ ,  $D = \text{const}$ ,  $u_1 = u_2$  на плоскости  $(h_1, h_2)$

Таким образом,

$$\frac{Q_1^3}{\gamma_1^3 h_1^3} - \frac{Q_2^3}{\gamma_2^3 h_2^3} = u_1^3 - u_2^3 = \frac{g(Q_1 + Q_2)}{\gamma_1} - \frac{g((\gamma_2/\gamma_1)Q_1 + Q_2)}{\gamma_2} = g \frac{Q_2}{\gamma_2} \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) < 0,$$

т. е. также в точке минимума функции  $D(h_1, h_2)$   $u_1 - u_2 < 0$ . Можно показать, что точка  $D_M$  расположена выше точки  $M_M$ . На рис. 2 показано типичное расположение кривых  $C = 0$ ,  $M = \text{const}$ ,  $D = \text{const}$ ,  $u_1 = u_2$  и точек минимума  $D_M$  и  $M_M$  на плоскости  $(h_1, h_2)$ . Точки минимума  $D_M$  и  $M_M$  всегда находятся ниже кривой  $u_1 = u_2$ , причем точка  $M_M$  — всегда ниже точки  $D_M$ .

**Теорема 2.** Кривые  $M(h_1, h_2) = \text{const}$  и  $D(h_1, h_2) = \text{const}$  касаются в точке  $(h_1, h_2)$  тогда и только тогда, когда  $u_1 = u_2$  или  $C = 0$ .

**ДОКАЗАТЕЛЬСТВО.** Рассмотрим кривые  $M(h_1, h_2) = \text{const}$  и  $D(h_1, h_2) = \text{const}$ , определяемые уравнениями (7), (9):

$$M(h_1, h_2) = \frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1} + \frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_2} + \frac{g\gamma_1 h_1^2}{2} + g\gamma_2 h_1 h_2 + \frac{g\gamma_2 h_2^2}{2},$$

$$D(h_1, h_2) = \frac{Q_1}{\gamma_1} \left( \frac{Q_1^2}{2\gamma_1 h_1^2} + g(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2) \right) + \frac{Q_2}{\gamma_2} \left( \frac{Q_2^2}{2\gamma_2 h_2^2} + g\gamma_2 (h_1 + h_2) \right).$$

Кривые касаются, если

$$0 = \frac{\partial M}{\partial h_1} \frac{\partial D}{\partial h_2} - \frac{\partial D}{\partial h_1} \frac{\partial M}{\partial h_2} = \left( -\frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1^2} + g\gamma_1 h_1 + g\gamma_2 h_2 \right) \left( g(Q_2 + Q_1 \frac{\gamma_2}{\gamma_1}) - \frac{Q_2^3}{\gamma_2^2 h_2^3} \right) -$$

$$- \left( -\frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_2^2} + g\gamma_2 h_1 + g\gamma_2 h_2 \right) \left( g(Q_2 + Q_1) - \frac{Q_1^3}{\gamma_1^2 h_1^3} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{Q_2\gamma_1 h_1 - Q_1\gamma_2 h_2}{h_1^3 h_2^3 \gamma_1^2 \gamma_2^2} (Q_1^2(-Q_2^2 + gh_2^3 \gamma_2^2) + gh_1^3 \gamma_1(Q_2^2 \gamma_1 + gh_2^3 \gamma_2^2(\gamma_2 - \gamma_1))) = \\
&= g^2(Q_2\gamma_1 h_1 - Q_1\gamma_2 h_2) \left( \left( \frac{Q_2^2}{gh_2^3 \gamma_2^2} - 1 \right) \left( \frac{Q_1^2}{gh_1^3 \gamma_1^2} - 1 \right) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} \right).
\end{aligned}$$

Таким образом, матрица Якоби вырождена, если

$$Q_2\gamma_1 h_1 - Q_1\gamma_2 h_2 = 0$$

или

$$\left( \frac{Q_2^2}{gh_2^3 \gamma_2^2} - 1 \right) \left( \frac{Q_1^2}{gh_1^3 \gamma_1^2} - 1 \right) - \frac{\gamma_2}{\gamma_1} = 0,$$

что эквивалентно соотношениям  $u_2 = u_1$  или  $C = 0$ .

**3. Сверхкритическое и докритическое состояния.** Рассмотрим кусочно-постоянное разрывное решение уравнений (1), (2)

$$(h_1(x), h_2(x), u_1(x), u_2(x))^T = \begin{cases} (h_{10}, h_{20}, u_{10}, u_{20})^T, & x < 0, \\ (h_1, h_2, u_1, u_2)^T, & x > 0. \end{cases}$$

Для переменных характеристик состояния справа от скачка будем использовать те же обозначения, что и для основных переменных. Критическая кривая  $C(h_1, h_2) = 0$ , разделяющая состояния перед скачком и за ним, определена в (13). Течение является сверхкритическим, если  $C > 0$ , и докритическим, если  $C < 0$ . Предположим, что выполнено условие  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 > 0$  и состояние  $(h_{10}, h_{20})$  слева от скачка сверхкритическое. Для сопряженных состояний, удовлетворяющих соотношениям (6), дополнительно должно выполняться естественное диссипативное неравенство (в теории гиперболических уравнений называемое энтропийным неравенством)

$$\begin{aligned}
[D(h_1, h_2)] &= \left[ \frac{Q_1}{\gamma_1} R_1 + \frac{Q_2}{\gamma_2} R_2 \right] = \\
&= \left[ \frac{Q_1}{\gamma_1} \left( \frac{Q_1^2}{2\gamma_1 h_1^2} + g(\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2) \right) + \frac{Q_2}{\gamma_2} \left( \frac{Q_2^2}{2\gamma_2 h_2^2} + g\gamma_2(h_1 + h_2) \right) \right] \leq 0,
\end{aligned}$$

где

$$[D] = D(h_1, h_2) - D(h_{10}, h_{20}).$$

Из энтропийного неравенства следует, что область докритического состояния должна располагаться внутри кривой  $D(h_1, h_2) = D(h_{10}, h_{20})$ , поскольку она замкнута. В частности, энтропийное неравенство обеспечивает докритическое состояние справа от скачка.

Для заданных  $Q_1 > 0$ ,  $Q_2 > 0$  выберем точку  $(h_{10}, h_{20})$ , так чтобы замкнутая кривая  $M(h_1, h_2) = M(h_{10}, h_{20})$  полностью находилась в области гиперболичности (рис. 3). В области эллиптичности характеристический полином (5) имеет два вещественных и два комплексно-сопряженных собственных значения.

Кривую  $M(h_1, h_2) = M(h_{10}, h_{20})$  можно параметризовать, введя полярные координаты  $(r, \theta)$ :

$$h_1 = r(\theta) \cos \theta, \quad h_2 = r(\theta) \sin \theta, \quad \theta \in (\theta^-, \theta^+).$$

Здесь функция  $r(\theta)$  определяется полиномом третьей степени, полученным из соотношения

$$\frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1} + \frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_2} + \frac{g\gamma_1 h_1^2}{2} + g\gamma_2 h_1 h_2 + \frac{g\gamma_2 h_2^2}{2} = M = \text{const}$$

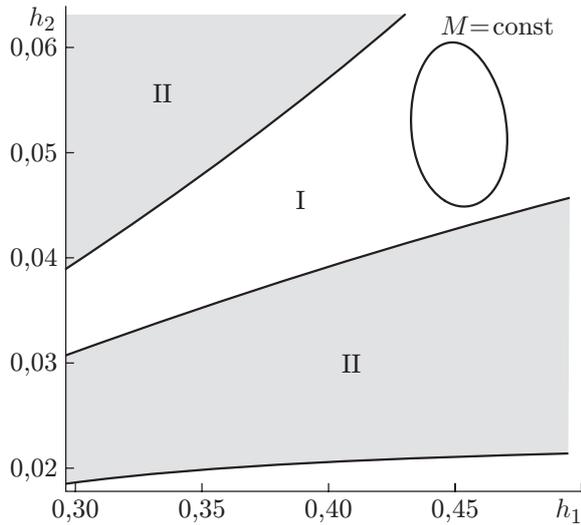


Рис. 3

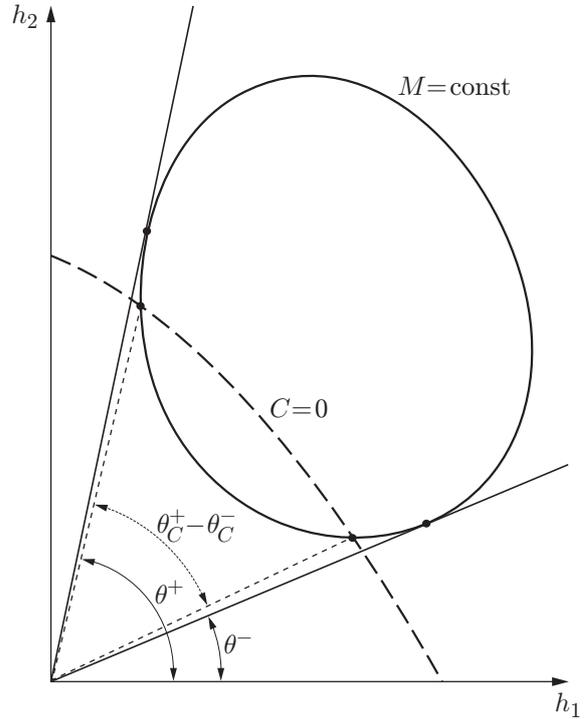


Рис. 4

Рис. 3. Области гиперболичности (I) и эллиптичности (II) системы (1), (2)

Рис. 4. Кривая полного импульса  $M = \text{const}$  в полярных координатах на плоскости  $(h_1, h_2)$

и имеющим вид

$$r^3 g \left( \gamma_1 \frac{\cos^2 \theta}{2} + \gamma_2 \cos \theta \sin \theta + \gamma_2 \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) - Mr + \frac{Q_1^2}{\gamma_1 \cos \theta} + \frac{Q_2^2}{\gamma_2 \sin \theta} = 0. \quad (14)$$

Один из корней данного полинома всегда отрицательный (следовательно, он не имеет физического смысла), два других корня действительны и положительны:  $r_1(\theta) < r_2(\theta)$  при  $\theta \in (\theta^-, \theta^+)$ . Объединение кривых  $r_1 = r_1(\theta)$  и  $r_2 = r_2(\theta)$  представляет собой гладкую замкнутую кривую  $M = \text{const}$  на плоскости  $(r, \theta)$ :  $r_1(\theta^-) = r_2(\theta^-)$ ,  $r_1(\theta^+) = r_2(\theta^+)$  (рис. 4). Критическая кривая  $C = 0$  пересекает кривую  $M = \text{const}$  в точках, соответствующих углам  $\theta_C^- < \theta_C^+$ , таким что  $\theta^- < \theta_C^- < \theta_C^+ < \theta^+$ .

Рассмотрим стационарные неконсервативные уравнения импульсов для каждого слоя (2):

$$\begin{aligned} \gamma_1 h_1 u_1 u_{1x} + g h_1 (\gamma_1 h_1 + \gamma_2 h_2)_x &= 0, \\ \gamma_2 h_2 u_2 u_{2x} + g h_2 \gamma_2 (h_1 + h_2)_x &= 0, \end{aligned}$$

которые являются консервативными вдоль кривой  $M = \text{const}$ . Действительно, неконсервативное произведение  $h_1(h_2)_x$  записывается в виде

$$\begin{aligned} h_1(h_2)_x &= r(\theta) \cos \theta \left( \frac{dr(\theta)}{d\theta} \theta_x \sin \theta + r(\theta) \theta_x \cos \theta \right) = \\ &= \left( \frac{r^2(\theta)}{2} \sin \theta \cos \theta + \frac{1}{2} \int_{\theta_*}^{\theta} r^2(\theta) d\theta \right)_x = \left( \frac{h_1 h_2}{2} + \frac{1}{2} \int_{\theta_*}^{\theta} r^2(\theta) d\theta \right)_x, \end{aligned}$$

аналогично

$$\begin{aligned} h_2(h_1)_x &= r(\theta) \sin \theta \left( \frac{dr(\theta)}{d\theta} \theta_x \cos \theta - r(\theta) \theta_x \sin \theta \right) = \\ &= \left( \frac{r^2(\theta)}{2} \sin \theta \cos \theta - \frac{1}{2} \int_{\theta_*}^{\theta} r^2(\theta) d\theta \right)_x = \left( \frac{h_1 h_2}{2} - \frac{1}{2} \int_{\theta_*}^{\theta} r^2(\theta) d\theta \right)_x. \end{aligned}$$

Здесь  $\theta_*$  — произвольная константа, принадлежащая интервалу  $(\theta^-, \theta^+)$ . Поскольку уравнения записываются в консервативной форме, может быть выбрана одна из следующих сохраняющихся величин:

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1} + g \left( \frac{\gamma_1 h_1^2}{2} + \gamma_2 \left( \frac{h_1 h_2}{2} + \frac{1}{2} \int_{\theta_*}^{\theta} r^2(\theta) d\theta \right) \right) &= \\ = \frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_{10}} + g \left( \frac{\gamma_1 h_{10}^2}{2} + \gamma_2 \left( \frac{h_{10} h_{20}}{2} + \frac{1}{2} \int_{\theta_*}^{\theta_0} r^2(\theta) d\theta \right) \right) &= M_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_2} + g \left( \frac{\gamma_2 h_2^2}{2} + \gamma_2 \left( \frac{h_1 h_2}{2} - \frac{1}{2} \int_{\theta_*}^{\theta} r^2(\theta) d\theta \right) \right) &= \\ = \frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_{20}} + g \left( \frac{\gamma_2 h_{20}^2}{2} + \gamma_2 \left( \frac{h_{10} h_{20}}{2} - \frac{1}{2} \int_{\theta_*}^{\theta_0} r^2(\theta) d\theta \right) \right) &= M_2. \end{aligned}$$

Данная система совместна с законом сохранения полного импульса. Действительно, суммируя уравнения, получаем

$$M_1 + M_2 = M.$$

В качестве дополнительного замыкающего соотношения можно выбрать закон сохранения импульса одного слоя ( $M_1$  или  $M_2$ ). Далее, необходимо показать, что соответствующее сопряженное состояние принадлежит докритической области и энтропийное неравенство выполнено. Для определенности выберем закон сохранения импульса первого слоя, который, очевидно, не зависит от выбора  $\theta_*$ . Наконец, для заданного сверхкритического состояния, соответствующего выбранной точке  $(h_{10}, h_{20})$ , можно определить сопряженное докритическое состояние  $(h_1, h_2)$  из следующей системы уравнений:

$$\frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1} + \frac{g\gamma_1 h_1^2}{2} + \frac{g\gamma_2 h_1 h_2}{2} + \frac{g\gamma_2}{2} \int_{\theta_0}^{\theta} r^2(\theta) d\theta = \frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_{10}} + \frac{g\gamma_1 h_{10}^2}{2} + \frac{g\gamma_2 h_{10} h_{20}}{2}; \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_1} + \frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_2} + \frac{g\gamma_1 h_1^2}{2} + g\gamma_2 h_1 h_2 + \frac{g\gamma_2 h_2^2}{2} &= \\ = \frac{Q_1^2}{\gamma_1 h_{10}} + \frac{Q_2^2}{\gamma_2 h_{20}} + \frac{g\gamma_1 h_{10}^2}{2} + g\gamma_2 h_{10} h_{20} + \frac{g\gamma_2 h_{20}^2}{2}. \end{aligned} \quad (16)$$

Здесь  $\theta_0 = \arctg(h_{20}/h_{10})$ ;  $\theta = \arctg(h_2/h_1)$ ; функция  $r(\theta)$  определяется формулой (14).

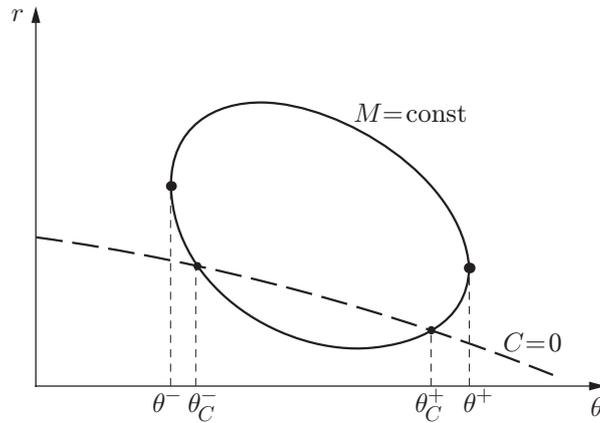


Рис. 5. Типичное расположение кривых  $C = 0$ ,  $M = \text{const}$  в плоскости  $(r, \theta)$

**4. Алгоритм определения докритического состояния.** Для расчета постоянной функции  $M(h_{10}, h_{20})$  были выбраны параметры  $h_{10} = 0,45$ ,  $h_{20} = 0,045$ ,  $Q_1 = 10$ ,  $Q_2 = 1,1$ ,  $\gamma_1 = 10$ ,  $\gamma_2 = 9,5$ , которые задают замкнутую кривую  $M(h_1, h_2) = M(h_{10}, h_{20})$ , полностью принадлежащую области гиперболичности. Далее  $(h_{10}, h_{20})$  — некоторая произвольная точка на этой неподвижной кривой. Более целесообразно рассмотреть структуру решения в плоскости  $(r, \theta)$  (рис. 5).

Численно показано, что для любого сверхкритического начального состояния, принадлежащего кривой  $r_1(\theta)$  ( $\theta_C^- < \theta < \theta_C^+$ ), не существует нетривиального решения системы (15), (16) при угле  $\theta$ , принадлежащем той же кривой  $r_1(\theta)$  ( $\theta^- < \theta < \theta^+$ ). Следовательно, решение может принадлежать только кривой  $r_2(\theta)$  ( $\theta^- < \theta < \theta^+$ ). Представим интеграл в (15) в виде

$$\int_{\theta_0}^{\theta} r^2(\theta) d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_C^-} r_1^2(\theta) d\theta + \int_{\theta_C^-}^{\theta} r_2^2(\theta) d\theta$$

и найдем нетривиальное решение  $\theta$  на кривой  $r = r_2(\theta)$ . Установлено, что такое решение  $\theta$  всегда единственно и удовлетворяет энтропийному неравенству. Характерное расположение кривых  $C = 0$ ,  $M = \text{const}$ ,  $D = \text{const}$  и точек решения показано на рис. 6 ( $S$  — начальное сверхкритическое состояние;  $J$  — сопряженное докритическое состояние). Точки, соответствующие сверхкритическому состоянию  $S$  и сопряженному докритическому состоянию  $J$ , принадлежат одной и той же замкнутой кривой  $M = \text{const}$ . Состояние  $J$  удовлетворяет энтропийному неравенству: оно располагается внутри замкнутой кривой  $D = \text{const}$ , проходящей через точку  $S$ .

Также выявлено следующее свойство: если начальные данные, соответствующие сверхкритическому состоянию, изменяются монотонно с изменением угла  $\theta_0$  (точки 1–8 на рис. 7), то монотонно изменяются и докритические состояния (точки 1'–8').

**5. Сравнение предлагаемого подхода с подходом, основанным на использовании интегралов Бернулли.** Альтернативный подход к решению рассматриваемой задачи состоит в выборе уравнения для разности скоростей  $u_1$ ,  $u_2$  в качестве замыкающего соотношения на скачке (разность двух уравнений Бернулли):

$$(u_1 - u_2)_t + \left( \frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + gh_2 \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) \right)_x = 0.$$

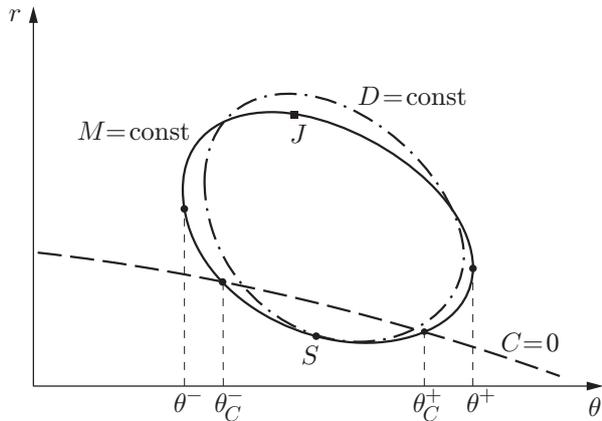


Рис. 6

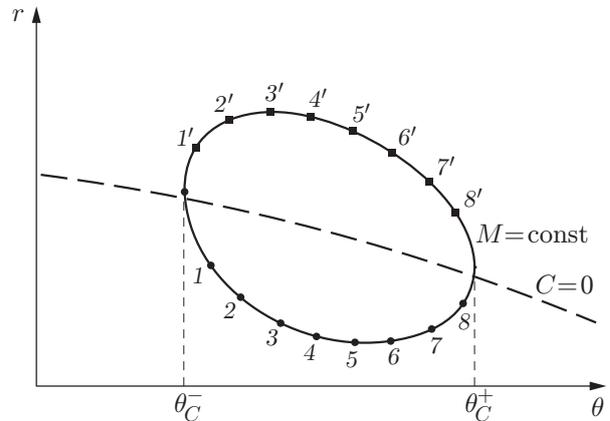


Рис. 7

Рис. 6. Характерное расположение кривых  $C = 0$ ,  $M = \text{const}$ ,  $D = \text{const}$  и точек  $S, J$ , соответствующее решению, удовлетворяющему энтропийному неравенству

Рис. 7. Сверхкритические начальные состояния, равномерно распределенные на кривой  $M = \text{const}$  (1–8), и соответствующие им докритические состояния (1'–8')

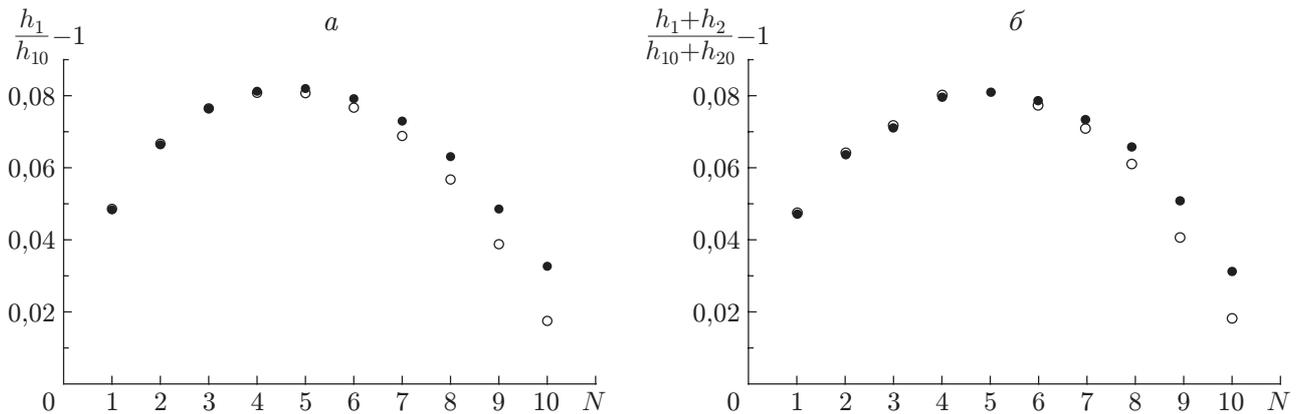


Рис. 8. Амплитуды внутреннего (а) и поверхностного (б) скачков, полученные с помощью предложенного подхода (темные точки) и подхода, основанного на использовании интегралов Бернулли (светлые точки)

Для стационарного гидравлического прыжка это равенство означает, что сохраняется величина

$$\frac{u_1^2}{2} - \frac{u_2^2}{2} + gh_2 \left( \frac{\gamma_2}{\gamma_1} - 1 \right) = \text{const}.$$

Показано, что для обоих подходов выполнено энтропийное неравенство. Для 10 точек, равномерно распределенных на участке кривой  $M = \text{const}$ , соответствующем сверхкритическому состоянию, и пронумерованных в порядке возрастания значений угла  $\theta$ , на рис. 8 приведены результаты расчетов для соответствующих докритических состояний ( $N$  — номер точки). Установлено, что амплитуды внутренних и поверхностных скачков, полученные предлагаемым методом, больше амплитуд, полученных с использованием уравнения для разности скоростей.

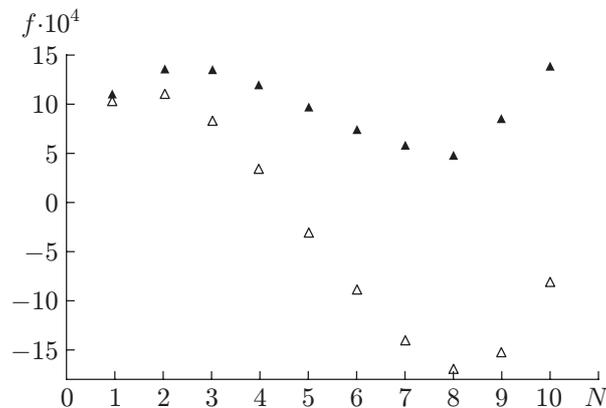


Рис. 9. Амплитуды внутреннего скачка, полученные с использованием предложенного подхода (темные точки) и подхода Бернулли (светлые точки)

Численно показано, что при использовании предлагаемого подхода всегда выполняется неравенство

$$f = \frac{h_1}{h_{10}} - \frac{h_1 + h_2}{h_{10} + h_{20}} > 0. \quad (17)$$

Это означает, что амплитуда внутреннего скачка всегда превышает амплитуду соответствующей поверхностной волны. При использовании уравнения для разности скоростей неравенство (17) выполнено не всегда (рис. 9). Неравенство (17) подтверждает, что поведение двухслойного течения со свободной поверхностью и малой разностью безразмерных плотностей аналогично поведению жидкости под твердой крышкой [17].

Авторы выражают благодарность С. В. Головину и Р. Левеку за обсуждение работы.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Нелинейные** проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Отв. ред. Л. В. Овсянников, В. Н. Монахов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
2. **Baines P. G.** Topographic effects in stratified flows. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
3. **Montgomery P. J., Moodie T. B.** On the number of conserved quantities for the two-layer shallow water equations // *Studies Appl. Math.* 2001. V. 106. P. 229–259.
4. **Barros B.** Conservation laws for one-dimensional shallow water models for one and two-layer flows // *Math. Models Methods Appl. Sci.* 2006. V. 16. P. 119–137.
5. **Овсянников Л. В.** Модели двухслойной “мелкой воды” // *ПМТФ.* 1979. № 2. С. 3–14.
6. **Abgrall R., Karni S.** Two-layer shallow water systems: a relaxation approach // *SIAM J. Sci. Comput.* 2009. V. 31, N 3. P. 1603–1627.
7. **Liska R., Margolin L., Wendroff B.** Nonhydrostatic two-layer models of incompressible flow // *Comput. Math. Appl.* 1995. V. 29. P. 25–37.
8. **Barros R., Gavriluk S., Teshukov V.** Dispersive nonlinear waves in two-layer flows with free surface. Pt 1. Model derivation and general properties // *Studies Appl. Math.* 2007. V. 119, N 3. P. 191–211.
9. **Barros R., Gavriluk S., Teshukov V.** Dispersive nonlinear waves in two-layer flows with free surface. Pt 2. Large amplitude solitary waves embedded into the continuous spectrum // *Studies Appl. Math.* 2007. V. 119, N 3. P. 213–251.

10. **El G. A., Grimshaw R. H. J., Smyth N. F.** Unsteady undular bores in fully nonlinear shallow-water theory // *Phys. Fluids*. 2006. V. 18. 027104.
11. **Le Metayer O., Gavrilyuk S., Hank S.** A numerical scheme for the Green — Naghdi model // *J. Comput. Phys.* 2010. V. 229. P. 2034–2045.
12. **Stoker J. J.** *Water waves*. N. Y.: Intersci., 1957.
13. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
14. **Остапенко В. В.** Устойчивые ударные волны в двухслойной “мелкой воде” // *Прикл. математика и механика*. 2001. Т. 65, вып. 1. С. 94–113.
15. **Mandli K. T.** Finite volume methods for the multilayer shallow water equations with applications to storm surges: PhD thesis. Washington: Univ. of Washington, 2011.
16. **Bridges T. J., Donaldson N. M.** Criticality manifolds and their role in the generation of solitary waves for two-layer flow with a free surface // *Eur. J. Mech. B. Fluids*. 2009. V. 28. P. 117–126.
17. **Armi L.** The hydraulics of two flowing layers with different densities // *J. Fluid Mech.* 1986. V. 163. P. 27–58.

*Поступила в редакцию 28/VI 2013 г.*

---