УДК 532; 536.66

ЛОКАЛЬНОЕ НЕАВТОМОДЕЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ВОЗДЕЙСТВИИ ХИМИЧЕСКОЙ РЕАКЦИИ НА ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС ПРИ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ТЕЧЕНИИ НА ПОРИСТОМ КЛИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ОТСОСА (ВДУВА)

И. Мухэймин, Р. Кэндэзэми

Университет Тун Хуссейн Онн, 86400 Бату-Пахат, Джохор, Малайзия
E-mails: muh003@yahoo.com, future990@gmail.com

Исследован тепломассоперенос в случае свободной, вынужденной и смешанной конвекции при течении вдоль пористого клина в магнитном поле с учетом влияния химической реакции. С использованием метода Рунге — Кутты — Джилля, метода стрельбы и метода локальной неавтомодельности проведен анализ характеристик поля течения. Управляющие уравнения пограничного слоя записаны в безразмерной форме в соответствии с преобразованиями Фолкнер — Скэна. При учете силы плавучести, степенного закона температуры и концентрации, наличия отсоса (вдува) на стенке клина поле течения является локально-неавтомодельным. Выполнены численные расчеты до третьего порядка разложения по неавтомодельности при различных значениях безразмерных параметров. Исследовано влияние напряженности магнитного поля при наличии химической реакции с переменными температурой стенки и концентрацией на безразмерную скорость, температуру и концентрацию. Показано, что полученные результаты расчетов хорошо согласуются с известными данными.

Ключевые слова: локальная неавтомодельность, химическая реакция, сила плавучести, магнитное поле и отсос на стенке клина.

Введение. Интерес к изучению гидродинамического течения электропроводящей жидкости на нагретой поверхности обусловлен тем, что такие течения встречаются в различных прикладных задачах (исследование плазмы, разработка нефтяных месторождений, проектирование магнитогидродинамических (МГД) генераторов энергии, охлаждение ядерных реакторов, управление пограничным слоем в задачах аэродинамики, выращивание кристаллов). Стационарная вынужденная, свободная и смешанная конвекция МГД-течения в пограничном слое на горизонтальной, вертикальной, наклонной поверхностях и клине изучалась во многих работах (см., например, [1–8]). Конвективный теплоперенос применяется на химических фабриках, в нагревателях и охладителях электрических и механических устройств, при смазке частей машин и т. д. В последнее время исследуются также задачи тепломассопереноса в МГД-течении в случае свободной конвекции, поскольку такая конвекция, индуцируемая одновременным действием сил плавучести в результате тепловой и массовой диффузии, представляет интерес при объяснении различных природных явлений, а также находит широкое применение в промышленности. Одними из первых работ в этой области являются работы [9, 10], в которых получены автомодельные

Работа выполнена при финансовой поддержке MOSTI (гранты № FRGS0405, FRGS0406).

решения для свободноконвективного течения на вертикальной и горизонтальной поверхностях соответственно. В [11, 12] эта задача изучена для случая наклонной поверхности и клина. Многие задачи тепломассопереноса не имеют автомодельных решений [13–15]. Неавтомодельность пограничных слоев может быть обусловлена различными факторами, такими как массообмен на поверхности, неоднородность температуры и концентрации на стенке, неоднородность градиента давления и т. д.

Разработаны численные методы получения неавтомодельных решений в пограничных слоях. Среди этих методов одним из наиболее известных является метод локальной неавтомодельности [16, 17], используемый при решении различных неавтомодельных задач о пограничном слое [18–20]. Численная схема была применена при решении нескольких характерных задач анализа пограничного слоя [21–23]. Установлено, что полученные результаты хорошо согласуются. Однако в опубликованных работах по этой теме не показаны возможности использования метода локальной неавтомодельности для решения любой задачи неавтомодельного конвективного тепломассопереноса в пограничном слое на клине. Химическая реакция, в зависимости от того, происходит ли она на поверхности раздела фаз или как однофазная объемная реакция, может классифицироваться либо как гетерогенный, либо как гомогенный процесс. Существует ряд областей, в которых важную роль играет тепломассоперенос при наличии химической реакции и с учетом термофореза: проектирование химического технологического оборудования, формирование и рассеивание тумана, регулирование температуры и влажности на сельскохозяйственных угодьях, защита зерновых культур от заморозков, производство холодильного оборудования для пищевой промышленности, охлаждение больших количеств воды в градирнях. Кроме того, изучение тепломассопереноса при наличии химической реакции имеет большое значение в химической и гидрометаллургической отраслях промышленности. Например, образование смога — это гомогенная химическая реакция первого порядка. Оксид азота NO_2 в виде выхлопов от автомобилей и дымовых труб реагирует в атмосфере с несожженными углеводородами (производимыми солнечным светом), в результате чего образуется пероксиацетилнитрат (фотохимический смог).

Целью настоящей работы является изучение влияния химической реакции и магнитных эффектов на нелинейные пограничные течения на пористом клине с учетом силы плавучести и неравномерного градиента давления. Управляющие уравнения получены в терминах локальных неавтомодельных уравнений. Численные решения найдены с использованием метода локальной неавтомодельности и метода Рунге — Кутты — Джилля. Для того чтобы были выполнены условия на границе пограничного слоя, используется метод стрельбы. Таким образом, следует ожидать, что локальный неавтомодельный подход даст более точные результаты (поля скорости, температуры и концентрации), чем локальная модель подобия. Результаты исследования позволят предсказывать течения, процессы тепломассопереноса и распределения растворенного вещества или концентрации вблизи интрузивных тел, таких как соляные купола, магнитные включения, трубопровод, система разгрузки и др.

1. Математическая модель. Рассматривается двумерное ламинарное течение в пограничном слое вязкой несжимаемой жидкости на клине (рис. 1). Предполагается, что как температура, так и концентрация на стенке изменяются по степенному закону в зависимости от расстояния от передней кромки вдоль пластины. Предполагается, что жидкость является ньютоновской электропроводящей. В уравнении импульса учитываются изменение плотности и эффекты плавучести (приближение Буссинеска). Ось x направлена вдоль образующей клина, ось y — по нормали к ней. Параллельно оси y действует однородное поперечное магнитное поле с интенсивностью $\boldsymbol{B}_0$, в течении имеет место химическая реакция. Эффект вязкой диссипации и джоулево тепло не учитываются, поскольку жидкость

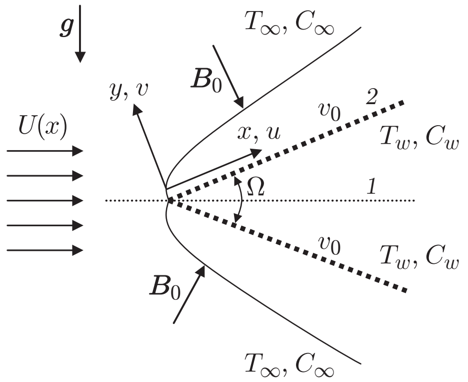


Рис. 1. Схема течения вдоль грани клина:
1 — клин, *2* — пористая стенка

имеет конечную проводимость. Предполагается, что наведенное магнитное поле, внешнее электрическое поле и электрическое поле, возникающее вследствие поляризации зарядов, незначительны. На поверхности клина задается постоянный отсос или вдув (см. рис. 1). В соответствии с этими предположениями управляющие уравнения задачи имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$u\,\frac{\partial u}{\partial x} + v\,\frac{\partial u}{\partial y} = \nu\,\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + U\,\frac{dU}{dx} + [g\beta(T - T_\infty) + g\beta^*(C - C_\infty)]\sin\frac{\Omega}{2} - \Big(\frac{\sigma B_0^2}{\rho} + \frac{\nu}{K}\Big)(u - U); \tag{2}$$

$$u\,\frac{\partial T}{\partial x} + v\,\frac{\partial T}{\partial y} = \alpha\,\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}; \tag{3}$$

$$u\,\frac{\partial C}{\partial x} + v\,\frac{\partial C}{\partial y} = D\,\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - k_1 C. \tag{4}$$

Граничные условия:

$$u = 0, \quad v = -v_0, \quad T = T_w(x) = T_\infty + b_1 x^n, \quad C = C_w(x) = C_\infty + b_2 x^n \quad \text{при} \quad y = 0,$$
$$u = U, \quad T = T_\infty, \quad C = C_\infty \quad \text{при} \quad y \to \infty.$$

Здесь u, v — компоненты скорости в направлениях осей x, y соответственно; U — скорость потока на внешней границе пограничного слоя; ν — кинематическая вязкость; g — ускорение свободного падения; β — температурный коэффициент линейного расширения; β^* — температурный коэффициент объемного расширения; T, T_w, T_∞ — температура в тепловом пограничном слое, температура пластины и температура в свободном потоке соответственно; C, C_w, C_∞ — соответствующие концентрации; Ω — угол раствора клина; B_0 — напряженность постоянного магнитного поля; σ — электропроводность; K — проницаемость стенки клина; k_1 — скорость химической реакции ($k_1 > 0$ в случае деструктивного влияния реакции, $k_1 = 0$ в отсутствие реакции, $k_1 < 0$ в случае порождающей реакции); α — теплопроводность жидкости; D — эффективный коэффициент диффузии; v_0 — скорость отсоса (вдува). Третий и последующие члены в правой части уравнения (2) представляют собой силу плавучести, магнитное поле и пористость стенки клина, действующие на элементы жидкости.

Следуя работе [15], выполним замену переменных

$$\psi(x,\eta) = \sqrt{\frac{2U\nu x}{1+m}}\,f, \quad \eta = y\sqrt{\frac{(1+m)U}{2\nu x}}, \quad \theta(x,\eta) = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty}, \quad \varphi(x,\eta) = \frac{C - C_\infty}{C_w - C_\infty}$$

($U = ax^m$; $m = \beta_1/(2 - \beta_1) \geqslant 0$; $\beta_1 = \Omega/\pi$ — параметр градиента давления Хартри).

Уравнение неразрывности (1) выполняется, если ввести функцию тока $\psi(x,y)$, такую что

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Компоненты скорости могут быть представлены в следующем виде:

$$u = U\,\frac{\partial f}{\partial\eta}, \qquad v = -\Big(\frac{2}{1+m}\,\frac{\nu U}{x}\Big)^{1/2}\Big(\frac{1}{2}\,f + \frac{1}{2}\,\frac{x}{U}\,\frac{dU}{dx}\,f + \frac{\partial f}{\partial\eta}\,\frac{\partial\eta}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial x}\Big).$$

Вводя параметр плавучести $\gamma_1 = g\beta b_1/(ak^{2(n+1-2m)/(1-m)})$ и параметр клина $\xi = kx^{(1-m)/2} = |-v_0|[(m+1)x/(2\nu U)]^{1/2}$, управляющие дифференциальные уравнения задачи в частных производных можно записать в виде

$$\begin{gathered}
f''' + ff'' + \frac{2m}{1+m}\,(1-f'^2) + \\
+ \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}(\theta+N\varphi)\sin\frac{\Omega}{2} - \frac{2}{1+m}\,\xi^2(M+\lambda)(f'-1) = \\
= \frac{1-m}{1+m}\,\xi\Big(\frac{\partial f}{\partial\eta}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\xi\,\partial\eta} - \frac{\partial f}{\partial\xi}\,\frac{\partial^2 f}{\partial\eta^2}\Big), \\
\theta'' - \frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,f'\theta + \mathrm{Pr}\,f\theta' = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Pr}\,\xi\Big(\frac{\partial f}{\partial\eta}\,\frac{\partial\theta}{\partial\xi} - \frac{\partial\theta}{\partial\eta}\,\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big), \\
\varphi'' - \frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,f'\varphi + \mathrm{Sc}\,f\varphi' - \frac{2\,\mathrm{Sc}}{1+m}\,\xi^2\gamma\varphi = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,\xi\Big(\frac{\partial f}{\partial\eta}\,\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - \frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\,\frac{\partial f}{\partial\xi}\Big).
\end{gathered} \tag{5}$$

Граничные условия:

$$\eta = 0: \qquad \frac{\partial f}{\partial\eta} = 0, \quad f = \frac{2}{1+m}\,\xi, \quad \theta(0) = \varphi(0) = 1,$$

$$\eta \to \infty: \qquad \frac{\partial f}{\partial\eta} = 1, \quad \theta(\infty) = \varphi(\infty) = 0.$$

Здесь штрихи обозначают частные производные по η; Sc — число Шмидта; Pr — число Прандтля; Gr_x — число Грасгофа; Re_x — число Рейнольдса; N — отношение плавучести; M — магнитный параметр; λ — параметр пористости; γ — параметр химической реакции:

$$\mathrm{Gr}_x = \frac{g\beta(T_w-T_\infty)x^3}{\nu^2}, \quad \mathrm{Re}_x = \frac{Ux}{\nu}, \quad N = \frac{\beta^*(C_w-C_\infty)}{\beta(T_w-T_\infty)},$$

$$M = \frac{\sigma B_0^2}{\rho a}, \quad \lambda = \frac{\nu}{Ka}, \quad \gamma = \frac{\nu k_1}{U^2}.$$

Заметим, что уравнения (5) после преобразования остаются дифференциальными уравнениями в частных производных с членами в правой части, содержащими $\partial/\partial\xi$. Из этой системы уравнений следует, что неавтомодельность задачи содержится в членах с частными производными по ξ. Сформулированная задача не допускает автомодельных решений. Таким образом, для получения решения системы уравнений, в которой сохранены члены с производными по ξ, необходимо использовать численную схему для дифференциальных уравнений в частных производных.

2. Методы решений. В настоящей работе с помощью метода Рунге — Кутты — Джилля, метода стрельбы и метода локальной неавтомодельности исследуется задача, описываемая связанными неавтомодельными уравнениями (5).

В данном пункте используется метод локальной неавтомодельности, развитый в работе [24] и применяемый для решения различных неавтомодельных краевых задач. Сформулируем систему уравнений для локальной неавтомодельной модели для рассматриваемой задачи.

На первом уровне усечения системы (5) члены, содержащие $\xi\,\partial/\partial\xi$, являются малыми. Это, в частности, справедливо при $\xi \ll 1$. Следовательно, члены с $\xi\,\partial/\partial\xi$ в правой части уравнений (5) можно отбросить. В результате получаем систему уравнений

$$
\begin{gathered}
f''' + ff'' + \frac{2m}{1+m}\,(1 - f'^2) + \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\,(\theta + N\varphi)\sin\frac{\Omega}{2} - {} \\
{} - \frac{2}{1+m}\,\xi^2(M+\lambda)(f'-1) = 0, \\
\theta'' - \frac{2n}{1+m}\,\Pr f'\theta + \Pr f\theta' = 0, \qquad (6) \\
\varphi'' - \frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Sc}\, f'\varphi + \mathrm{Sc}\, f\varphi' - \frac{2\,\mathrm{Sc}}{1+m}\,\xi^2\gamma\varphi = 0.
\end{gathered}
$$

Уравнения (6) можно рассматривать как систему обыкновенных дифференциальных уравнений для функций f, θ, φ. Переменная ξ рассматривается как параметр. На следующем уровне усечения введем функции

$$
f_1 = \frac{\partial f}{\partial\xi}, \quad \theta_1 = \frac{\partial\theta}{\partial\xi}, \quad \varphi_1 = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi}, \quad f_2 = \frac{\partial f_1}{\partial\xi}, \quad \theta_2 = \frac{\partial\theta_1}{\partial\xi}, \quad \varphi_2 = \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi}.
$$

В результате получим уравнения вплоть до третьего уровня усечения:

$$
\begin{gathered}
f''' + ff'' + \frac{2m}{1+m}\,(1 - f'^2) + \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\,(\theta + N\varphi)\sin\frac{\Omega}{2} - {} \\
{} - \frac{2}{1+m}\,\xi^2(M+\lambda)(f'-1) = \frac{1-m}{1+m}\,\xi(f'f_1' - f_1 f''), \\
\theta'' - \frac{2n}{1+m}\,\Pr f'\theta + \Pr f\theta' = \frac{1-m}{1+m}\,\Pr\xi(f'\theta_1 - \theta' f_1), \qquad (7) \\
\varphi'' - \frac{2n}{1+m}\,\mathrm{Sc}\, f'\varphi + \mathrm{Sc}\, f\varphi' - \frac{2\,\mathrm{Sc}}{1+m}\,\xi^2\gamma\varphi = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,\xi(f'\varphi_1 - \varphi' f_1);
\end{gathered}
$$

$$
\begin{gathered}
f_1''' + f_1 f'' + f f_1'' - \frac{4m}{1+m}\,f'f_1' + {} \\
{} + \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\Big(\frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{-1}(\theta + N\varphi) + (\theta_1 + N\varphi_1)\Big)\sin\frac{\Omega}{2} - {} \\
{} - \frac{2}{1+m}\,(M+\lambda)(2\xi(f'-1) + \xi^2 f_1') = \frac{1-m}{1+m}\,(f'f_1' - f''f_1 + \xi(f_1'f_1' - f_1''f_1)), \\
\theta_1'' - \frac{2n}{m+1}\,\Pr(f_1'\theta + f'\theta_1) + \Pr(f_1\theta' + f\theta_1') = \frac{1-m}{1+m}\,\Pr(f'\theta_1 - \theta' f_1 + \xi(f_1'\theta_1 - \theta_1' f_1)), \qquad (8) \\
\varphi_1'' - \frac{2n}{m+1}\,\mathrm{Sc}\,(f_1'\varphi + f'\varphi_1) + \mathrm{Sc}\,(f_1\varphi' + f\varphi_1') - \frac{2\,\mathrm{Sc}}{1+m}\,\xi^2(\gamma\varphi_1 + 2\xi^{-1}\gamma\varphi) = {} \\
{} = \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,(f'\varphi_1 - \varphi' f_1 + \xi(f_1'\varphi_1 - \varphi_1' f_1));
\end{gathered}
$$

$$f_2''' + f_2 f'' + 2f_1\, f_1'' + f f_2'' - \frac{4m}{1+m}\,(f' f_2' + f_1' f_1') +$$
$$+ \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\,\frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\xi^{-1}\,\times$$
$$\times\Big(\frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{-1}(\theta+N\varphi) + (\theta_1+N\varphi_1)\Big)\sin\frac{\Omega}{2} +$$
$$+ \frac{2}{1+m}\,\gamma_1\xi^{2(n+1-2m)/(1-m)}\Big(-\frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{-2}(\theta+N\varphi) + \theta_1 + N\varphi_1 +$$
$$+ \frac{2(n+1-2m)}{1-m}\,\xi^{-1}(\theta_1+N\varphi_1) + \theta_2 + N\varphi_2\Big)\sin\frac{\Omega}{2} -$$
$$- \frac{2}{1+m}\,(M+\lambda)(2(f'-1) + 4\xi f_1' + \xi^2 f_2') =$$
$$= \frac{1-m}{1+m}\,(f' f_2' + f_1' f_1' - f_1'' f_1 - f'' f_2 + \xi(2f_1' f_2' - f_1'' f_2 - f_2'' f_1)),$$

$$\theta_2'' - \frac{2n}{m+1}\,\Pr(2f_1'\theta_1 + f_2'\theta + f'\theta_2) + \Pr(2f_1\theta_1' + f_2\theta' + f\,\theta_2') = \tag{9}$$
$$= \frac{1-m}{1+m}\,\Pr(f'\theta_2 + f_1'\theta_1 - \theta' f_2 - \theta_1' f_1 + \xi(f_1'\theta_2 + f_2'\theta_1 - \theta_1' f_2 - \theta_2' f_1)),$$

$$\varphi_2'' - \frac{2n}{m+1}\,\mathrm{Sc}\,(2f_1'\varphi_1 + f_2'\varphi + f'\varphi_2) + \mathrm{Sc}\,(2f_1\varphi_1' + f_2\varphi' + f\varphi_2') - \frac{2\,\mathrm{Sc}}{1+m}\,(\xi^2\gamma\varphi_2 + 4\xi\gamma\varphi_1 + 2\gamma\varphi) =$$
$$= \frac{1-m}{1+m}\,\mathrm{Sc}\,(f'\varphi_2 + f_1'\varphi_1 - \varphi' f_2 - \varphi_1' f_1 + \xi(f_1'\varphi_2 + f_2'\varphi_1 - \varphi_1' f_2 - \varphi_2' f_1)).$$

Система уравнений (8) получена дифференцированием системы уравнений (7) по ξ. В системе (8) в правой части уравнений сохранены все члены. Вновь дифференцируя уравнения (8) по ξ, получаем систему уравнений (9), в которой не учитываются производные по ξ от функций f_2, θ_2, φ_2. Полученные системы уравнений удовлетворяют следующим граничным условиям:

$$\begin{gathered}
f(\xi,0) = 2s/(1+m), \qquad f'(\xi,0) = 0, \qquad \theta(\xi,0) = \varphi(\xi,0) = 1,\\
f'(\xi,\infty) = 1, \qquad \theta(\xi,\infty) = \varphi(\xi,\infty) = 0,\\
f_1(\xi,0) = f_1'(\xi,0) = \theta_1(\xi,0) = \varphi_1(\xi,0) = 0, \qquad f_1'(\xi,\infty) = \theta_1(\xi,\infty) = \varphi_1(\xi,\infty) = 0,\\
f_2(\xi,0) = f_2'(\xi,0) = \theta_2(\xi,0) = \varphi_2(\xi,0) = 0, \qquad f_2'(\xi,\infty) = \theta_2(\xi,\infty) = \varphi_2(\xi,\infty) = 0.
\end{gathered} \tag{10}$$

Так же как и на более низких уровнях усечения, система уравнений (7)–(9) с граничными условиями (10) содержит девять взаимосвязанных функций (f, f_1, f_2, θ, θ_1, θ_2, φ, φ_1, φ_2). Порядок этой системы равен 21. При заданных значениях параметров задачи эти уравнения можно рассматривать как обыкновенные дифференциальные уравнения, которые содержат параметр ξ. Из полученных уравнений найдем решения только для функций f, θ, φ и их производных. Система уравнений (7)–(9) решается с использованием метода Рунге — Кутты — Джилля и метода стрельбы. Подробно вычислительный метод обсуждался в работах [25, 26]. Следует отметить, что для достижения сходимости к решению с точностью до 10^{-6} требовалось выполнить 5–7 итераций.

3. Результаты исследования и их обсуждение. В данном исследовании результаты получены двумя методами, а именно методом Рунге — Кутты — Джилля совместно

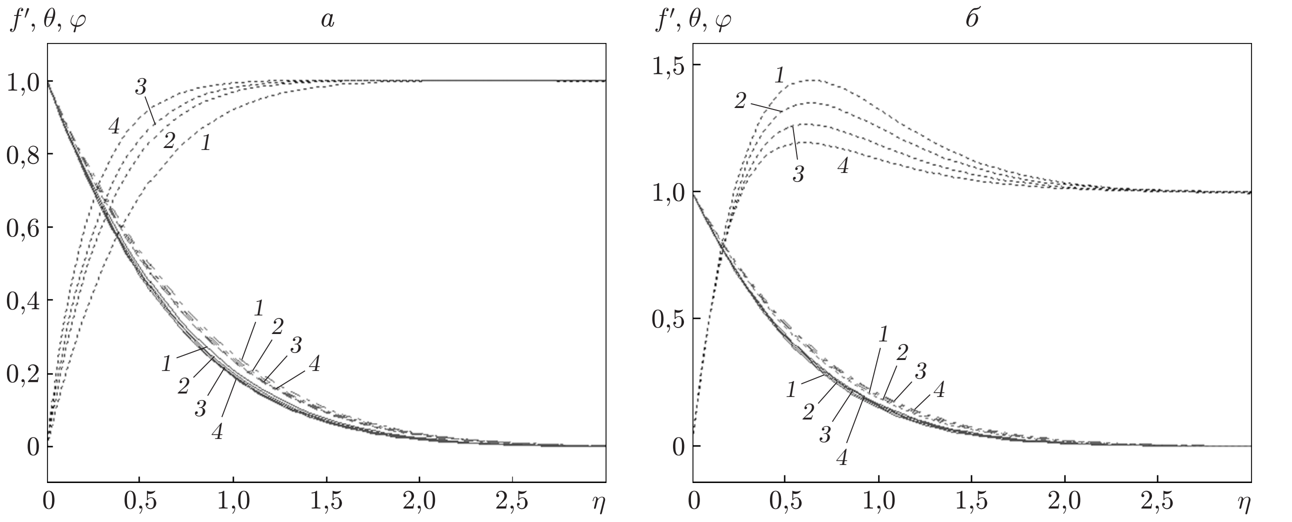
Значения величин $f''(\xi,0)$ и $-\theta'(\xi,0)$ при различных значениях $\mathrm{Gr}_x / \mathrm{Re}_x^2$

$\mathrm{Gr}_x / \mathrm{Re}_x^2$	Данные работы [27]		Данные настоящей работы	
	$f''(\xi,0)$	$-\theta'(\xi,0)$	$f''(\xi,0)$	$-\theta'(\xi,0)$
0	0,332 06	0,292 68	0,332 06	0,292 68
0,2	0,557 13	0,332 13	0,332 13	0,332 25
0,4	0,750 41	0,358 79	0,750 07	0,359 10
0,6	0,925 25	0,379 37	0,924 49	0,379 86
0,8	1,087 92	0,396 40	1,087 00	0,396 85
1,0	1,241 70	0,411 06	0,240 62	0,411 49
2,0	1,928 15	0,465 24	1,926 89	0,465 51
10,0	5,937 27	0,649 56	5,936 65	0,649 59

с методом стрельбы и методом локальной неавтомодельности с третьим уровнем усечения. Двухточечная краевая задача для неавтомодельной системы обыкновенных дифференциальных уравнений получена преобразованием Фолкнер — Скэна. Полученная система обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями с учетом приповерхностного трения и скорости тепломассопереноса интегрируется методом Рунге — Кутты — Джилля. Зависимости безразмерной скорости, температуры и концентрации от η при различных заданных параметрах представлены в виде графиков. Численные расчеты выполнены при следующих значениях параметров: $\mathrm{Pr} = 0{,}72$, $N = 1$, $\mathrm{Sc} = 0{,}62$, $\gamma = 1$, показатель в степенном законе температуры и концентрации $n = 0{,}4$, $\lambda = 0{,}1$. С целью проверки предлагаемого метода решена стационарная задача и проведено сравнение полученных значений приповерхностного трения $f''(0)$ и скорости теплообмена $-\theta'(0)$ при различных значениях $\mathrm{Gr}_x / \mathrm{Re}_x^2$ (см. таблицу) с данными работы [27]. Установлено, что эти результаты хорошо согласуются.

На рис. 2 представлены зависимости, показывающие влияние поперечного магнитного поля вблизи ребра атаки $\xi = 1$ на тепломассоперенос в случаях вынужденного, свободного и смешанного конвективного течений на пористом клине при наличии отсоса ($S = 1$). Магнитное поле оказывает различное влияние на различные виды конвекции. Из рис. 2 следует, что увеличение магнитного поля приводит к существенному увеличению скорости в случае вынужденной конвекции, незначительному ее увеличению при смешанном конвективном течении и к уменьшению скорости течения в пограничном слое в случае естественной конвекции. Наложение поперечного магнитного поля на электропроводящую жидкость приводит к увеличению силы сопротивления, называемой силой Лоренца. Эта сила вызывает замедление движения жидкости и уменьшение ее температуры и концентрации. Кроме того, с увеличением магнитного поля температура и концентрация в пограничном слое в случае свободной и смешанной конвекции несколько уменьшаются, а в случае естественной конвекции незначительно увеличиваются.

На рис. 3 показано влияние показателя в степенном законе скорости потока вблизи ребра атаки $\xi = 1$ на тепломассоперенос в конвективном течении на пористом клине при наличии силы плавучести и отсоса. Показатель степени m в законе изменения скорости свободного потока оказывает различное влияние на скорость в пограничном слое в случае свободной, вынужденной и смешанной конвекции. Установлено, что в случаях свободной и смешанной конвекции с увеличением m скорость внутри пограничного слоя увеличивается (см. рис. 3,*а,в*). В случае вынужденной конвекции увеличение m приводит к незначительному уменьшению скорости в пограничном слое (см. рис. 3,*б*). Кроме того, увеличение показателя степени m в законе скорости свободного потока приводит к уменьшению как температуры, так и концентрации в пограничном слое для всех конвективных мод (свободной, вынужденной и смешанной конвекции).



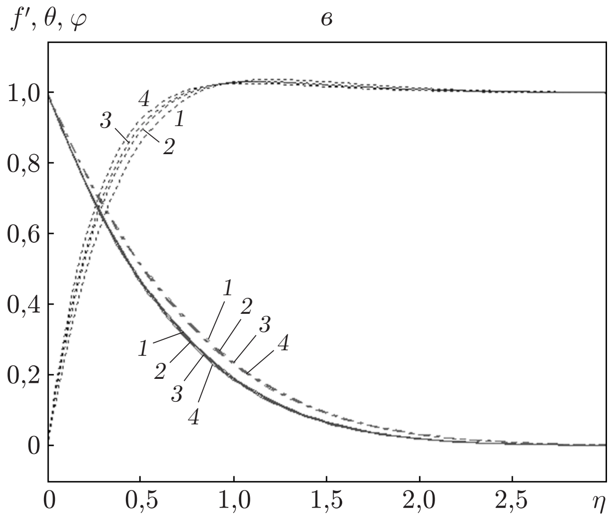
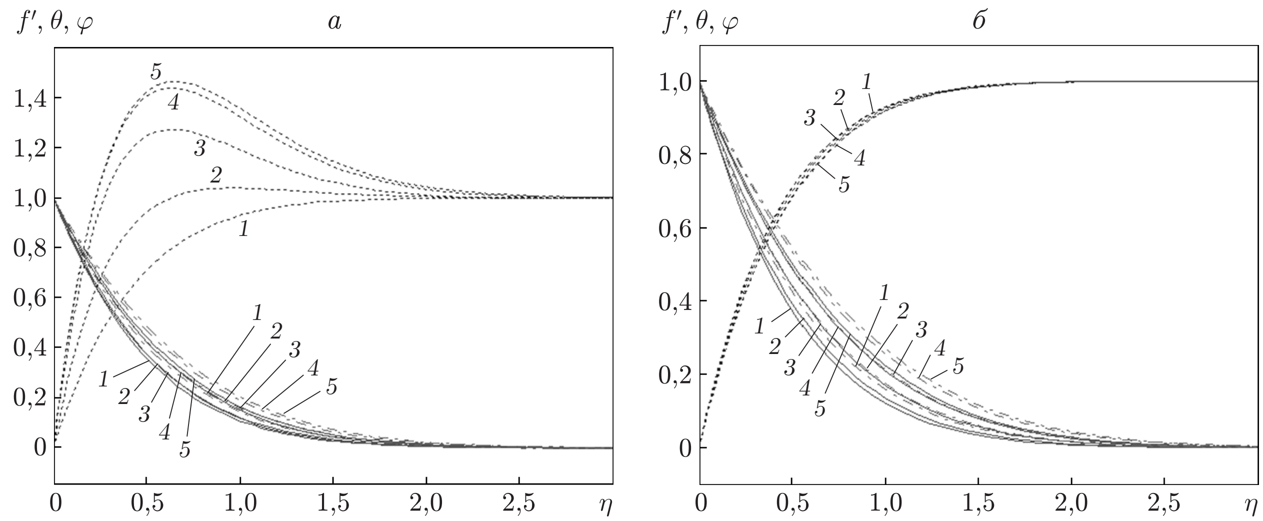


Рис. 2. Влияние магнитного поля на профили скорости (пунктирные линии), температуры (сплошные) и концентрации (штрихпунктирные) при $m = 0{,}6667$, $n = 0{,}4$, $\xi = 1$, $\lambda = 0{,}1$, $\gamma = 1$:
а — вынужденная конвекция ($\gamma_1 = 0{,}1$): *1* — $M = 0{,}1$, *2* — $M = 3{,}0$, *3* — $M = 5{,}0$, *4* — $M = 10$; *б* — свободная конвекция ($\gamma_1 = 5$): *1* — $M = 0{,}1$, *2* — $M = 2{,}0$, *3* — $M = 5{,}0$, *4* — $M = 10$; *в* — смешанная конвекция ($\gamma_1 = 1$): *1* — $M = 0{,}1$, *2* — $M = 2{,}0$, *3* — $M = 3{,}0$, *4* — $M = 5{,}0$

Влияние числа Шмидта на профили скорости, температуры и концентрации показано на рис. 4. Видно, что с увеличением числа Шмидта концентрация жидкости уменьшается, тогда как скорость и температура существенно не меняются. Это приводит к уменьшению концентрационной плавучести, обусловливающему незначительное уменьшение скорости жидкости. Влияние увеличения числа Шмидта Sc на уменьшение концентрации можно показать, например, заменяя водород (Sc = 0,32) водяным паром (Sc = 0,62) и аммиаком (Sc = 1,0) в указанной последовательности. Уменьшение концентрации вследствие увеличения Sc можно объяснить совместным действием магнитного поля и силы плавучести на стенке клина.

При наличии магнитного поля химические реакции оказывают существенное влияние на концентрацию. На рис. 5 показаны профили безразмерной скорости, температуры и концентрации при различных параметрах химической реакции. Видно, что с увеличением параметра γ скорость, температура и концентрация жидкости уменьшаются. Кроме того, значения скорости вдоль потока уменьшаются, и точка перегиба на кривой скоростей удаляется от поверхности. Очевидно, что при увеличении деструктивного влияния химической реакции концентрация резко уменьшается.



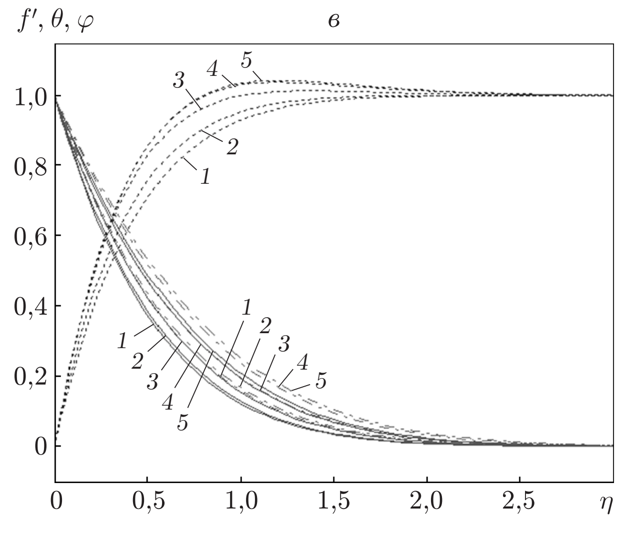


Рис. 3. Влияние показателя в степенном законе скорости свободного потока на профили скорости (пунктирные линии), температуры (сплошные) и концентрации (штрихпунктирные) при $M = 0{,}1$, $n = 0{,}4$, $\lambda = 0{,}1$, $\mathrm{Sc} = 0{,}62$, $\gamma = 1{,}0$:
а — $\gamma_1 = 5$, *б* — $\gamma_1 = 0{,}1$, *в* — $\gamma_1 = 1$; *1* — $m = 0$, *2* — $m = 0{,}0909$, *3* — $m = 0{,}3333$, *4* — $m = 0{,}6667$, *5* — $m = 0{,}8000$

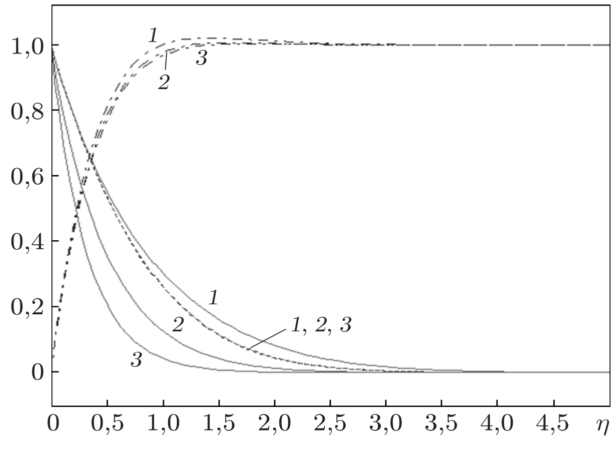


Рис. 4. Влияние числа Шмидта на профили скорости (штрихпунктирные линии), температуры (пунктирные) и концентрации (сплошные) при $N = 1$, $M = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}1$, $\gamma_1 = 1$, $m = 0{,}6667$, $n = 0{,}4$, $\xi = 0{,}1$, $\gamma = 1$:
1 — $\mathrm{Sc} = 0{,}32$, *2* — $\mathrm{Sc} = 0{,}62$, *3* — $\mathrm{Sc} = 1{,}00$

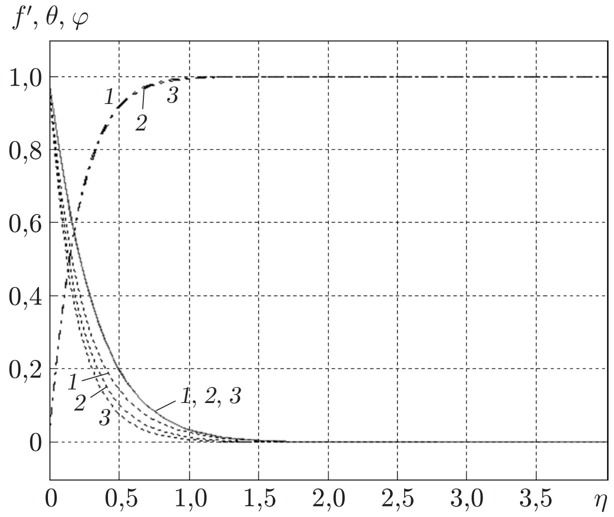


Рис. 5. Влияние наличия химической реакции на профили скорости (штрихпунктирные линии), температуры (сплошные) и концентрации (пунктирные) при $N = 1$, $M = 0{,}1$, $\lambda = 0{,}1$, $\gamma_1 = 1$, $m = 0{,}6667$, $n = 0{,}4$, $\xi = 0{,}1$: *1* — $\gamma = 0{,}1$, *2* — $\gamma = 1{,}0$, *3* — $\gamma = 2{,}0$

Заключение. В настоящей работе при исследовании влияния химической реакции и магнитных эффектов на течение в пограничном слое на пористом клине при наличии отсоса выполнены численные расчеты с использованием метода Рунге — Кутты — Джилля совместно с методом стрельбы и метода локальной неавтомодельности с третьим уровнем усечения. Представлены результаты численных расчетов в широком диапазоне параметров задачи. В частности, установлено, что положительный знак параметра плавучести способствует увеличению скорости потока жидкости, тогда как отрицательный знак параметра плавучести обусловливает замедление потока жидкости. Встречное течение вызовет уменьшение градиента давления и отрыв пограничного слоя. Кроме того, с увеличением показателя степени в законе изменения скорости свободного потока для всех видов конвекции температура и концентрация в пограничном слое увеличиваются. Химическая реакция при наличии магнитного поля и силы плавучести оказывает существенное влияние на поле течения и тем самым на скорость тепломассопереноса от пластины в жидкость. Полученные результаты представляют интерес в геофизике при изучении взаимодействия геомагнитного поля с жидкостью в геотермической области. Предложен метод решения нелинейной задачи о пограничном слое Фолкнер — Скэна. Такого рода численное решение с третьим уровнем усечения для МГД-течения на пористом клине получено впервые.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Yih K. A.** The effect of uniform suction/blowing on heat transfer of magnetohydrodynamic hiemenz flow through porous media // Acta Mech. 1998. V. 130. P. 147–158.
2. **Takhar H. S., Chamkha A. J., Nath G.** Effects of non-uniform wall temperature or mass transfer in finite sections of an inclined plate on the MHD natural convection flow in a temperature stratified high-porosity medium // Intern. J. Thermal Sci. 2003. V. 42. P. 829–836.
3. **Watanabe T.** Thermal boundary layer over a wedge with uniform suction or injection in forced flow // Acta Mech. 1990. V. 83. P. 119–126.
4. **Chamkha A. J.** Non-Darcy magnetohydrodynamic free convection from a cone and a wedge in porous media // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 1996. V. 23, N 6. P. 875–887.
5. **Nanousis N. D.** Theoretical magnetohydrodynamic analysis of mixed convection boundary layer flow over a wedge with uniform suction or injection // Acta Mech. 1999. V. 138. P. 21–30.

6. **Kumari M., Takhar H. S., Nath G.** Mixed convection flow over a vertical wedge embedded in a highly porous medium // Heat Mass Transfer. 2001. V. 37. P. 139–146.
7. **Kandasamy R., Muhaimin I., Ruhaila.** Thermophoresis and chemical reaction effects on non-Darcy mixed convective heat and mass transfer past a porous wedge with variable viscosity in the presence of suction or injection // Nuclear Engng Design. 2008. V. 238. P. 2699–2705.
8. **Muhaimin I., Kandasamy R., Ruhaila.** Influence of thermal stratification and variable viscosity on non-Darcy mixed convective heat transfer past a porous wedge in the presence of viscous dissipation // Intern. J. Appl. Math. Stat. 2008. V. 13, N D08. P. 9–23.
9. **Gebhart B., Pera L.** The nature of vertical natural convection flows resulting from the combined buoyancy effects of thermal and mass diffusion // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1971. V. 14. P. 2025–2050.
10. **Pera L., Gebhart B.** Natural convection boundary layer over horizontal and slightly inclined surfaces // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1972. V. 16. P. 1131–1146.
11. **Chen T. S., Yuh C. F.** Combined heat and mass transfer in mixed convection along vertical and inclined plates // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1980. V. 23. P. 527–537.
12. **Kandasamy R., Devi S. P. A.** Effects of chemical reaction heat and mass transfer on non linear laminar boundary-layer flow over a wedge with suction or injection // J. Comput. Appl. Mech. 2004. V. 5, N 1. P. 21–31.
13. **Yih K. A.** MHD forced convection flow adjacent to non-isothermal wedge // Intern. Commun. Heat Mass Transfer. 1999. V. 26, N 6. P. 819–827.
14. **Watanabe T., Funazaki K., Taniguchi H.** Theoretical analysis on mixed convection boundary layer flow over a wedge with uniform suction or injection // Acta Mech. 1994. V. 105. P. 133–141.
15. **Kafoussias N. G., Nanousis N. D.** Magnetohydrodynamic laminar boundary layer flows over a wedge with suction or injection // Canad. J. Phys. 1997. V. 75. P. 733–745.
16. **Sparrow E. M., Quack H., Boerner C. J.** Local nonsimilarity boundary layer solution // AIAA J. 1970. V. 8. P. 1936–1942.
17. **Sparrow E. M., Yu H. S.** Local nonsimilarity thermal boundary layer solutions // J. Heat Transfer. 1971. V. 93. P. 328–334.
18. **Minkowycz W. J., Sparrow E. M.** Local nonsimilarity solutions for natural convection on a vertical cylinder // J. Heat Transfer. 1974. V. 96. P. 178–183.
19. **Novotny J. L., Bankston J. D., Lloyd J. R.** Local nonsimilarity applied to free convection boundary layers with radiation interaction // Progr. Astronaut. Aeronaut. 1975. V. 39. P. 309–330.
20. **Mucoglu A., Chen T. S.** Mixed convection on inclined surfaces // J. Heat Transfer. 1979. V. 101. P. 426–442.
21. **Minkowycz W. J., Sparrow E. M.** Numerical solution scheme for local nonsimilarity boundary layer analysis // Numer. Heat Transfer. 1978. V. 1. P. 69–85.
22. **Kafoussias N. G., William E. W.** An improved approximation technique to obtain numerical solutions of a class of two-point boundary value similarity problems in fluid mechanics // Intern. J. Numer. Methods Fluid. 1993. V. 17. P. 145–162.
23. **Risbeck W. R., Chen T. S., Armaly B. F.** Laminar mixed convection on horizontal flat plates with variable surface heat flux // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37. P. 699–704.
24. **Sparrow E. M., Yu H. S.** Local nonsimilarity thermal boundary-layer solutions // Trans. ASME. J. Heat Transfer. 1971. V. 93. P. 328–332.

25. **Hossain M. A., Nakayama A.** Non-Darcy free convection flow along a vertical cylinder embedded in a porous medium with surface mass flux // Intern. J. Heat Fluid FI. 1993. V. 14. P. 385–390.
26. **Hossain M. A., Banu N., Nakayama A.** Non-Darcy forced convection flow over a wedge embedded in a porous medium // Numer. Heat Transfer. A. 1994. V. 26. P. 399–414.
27. **Minkowycz W. J.** Handbook of numerical heat transfer / W. J. Minkowycz, E. M. Sparrow, G. E. Schneider, R. H. Pletcher. N. Y.: John Wiley and Sons, 1988.

Поступила в редакцию 10/II 2009 г.,
в окончательном варианте — 6/VII 2009 г.