

ЭФФЕКТИВНЫЕ УПРУГИЕ МОДУЛИ ВОЛОКНИСТОГО КОМПОЗИТА, ИЗОТРОПНОГО В СРЕДНЕМ

В. В. Колокольчиков, Г. Н. Сапего

(Куйбышев)

Существует ряд методов нахождения эффективных модулей композитов (см., например, [1, 2]). Точный расчет эффективных модулей композита является затруднительным. Анизотропные эффективные упругие модули некоторых волокнистых структур с трансверсально-изотропной или ортотропной симметрией найдены в корреляционном приближении в [3, 4], при использовании схемы Ройсса в [5], а также в [6] на основе упрощенного варианта теории [7]. Существуют [8] простейшие формулы для эффективного модуля Юнга композита из волокна, находящегося в цилиндрической оболочке матрицы в случае осевого нагружения и однородного распределения давления.

1. Рассмотрим композиционный материал, хаотически армированный изотропными волокнами. Вследствие хаотичности ориентации волокон композит будет в среднем изотропным.

Индексами c , f , m обозначим величины, характеризующие соответственно композит, волокно, матрицу. Получение эффективных упругих модулей основано на обобщенном правиле смешивания при последовательном и параллельном соединении некоторых элементов. Для его применения вводится N_f (N_f — число волокон в композите) элементов, состоящих из волокна, окруженного эффективным цилиндрическим слоем материала матрицы. Объем эффективного слоя равен объему матрицы V_m^a , деленному на N_f .

Выражение эффективной плотности свободной энергии F в пренебрежении взаимодействия смолы и борного волокна является суммой энергий матрицы и изотропного волокна:

$$(1.1) \quad F = \sum_{\xi=m,f} \frac{V_{\xi}}{3} \left[\frac{\lambda_{\xi}}{2} \sum_{j=1}^3 (\varepsilon_{ii}^{\prime(\xi j)})^2 + \mu_{\xi} \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ij}^{\prime(\xi k)} \varepsilon_{ij}^{\prime(\xi k)} - (3\lambda_{\xi} + 2\mu_{\xi}) \alpha_{\xi} \vartheta \sum_{j=1}^3 \varepsilon_{ii}^{\prime(\xi j)} \right],$$

где λ_m , μ_m , λ_f , μ_f — постоянные Ламэ матрицы и волокна, зависящие от температуры; V_m , V_f — относительные объемные содержания матрицы и волокна в композите; α_m , α_f — коэффициенты линейного теплового расширения матрицы и волокна; $\vartheta = T - T_0$ — перепад температур; T_0 — температура, при которой отсутствуют напряжения и деформации; T — абсолютная равновесная температура, не зависящая от координат; $\varepsilon_{ij}^{\prime(mk)}$ ($i, j, k = 1, 2, 3$) — компоненты деформаций матрицы для элементов k -го вида, являющиеся средними компонентами по всем параллельным или последовательным элементам. В (1.1) эффективная плотность свободной энергии композита находится при помощи суперпозиции энергий элементов, зависящих от деформаций, различных для разных типов элементов и разных компонентов композита. В формуле (1.1) и ниже по повторяющимся латинским индексам происходит суммирование.

Вследствие предположения об изотропии композита в среднем запись (1.1) соответствует трем ($k = 1, 2, 3$) равноправным видам средних эле-

ментов. Элементы каждого вида параллельны друг другу и перпендикулярны элементам другого вида.

Направим оси трех типов элементов по осям координат; тогда, если относительно какого-то нагружения элементы одного типа будут находиться между собой в параллельном соединении, элементы двух других типов будут находиться как внутри типа элементов, так и между собой в последовательном соединении.

Обозначим через $\varepsilon_{ij}^{(mk)}$, $\varepsilon_{ij}^{(fk)}$ ($k = 1, 2, 3$) компоненты тензоров деформаций (называемых ниже элементарными деформациями), осредненные по элементу k -го типа соответственно матрицы и волокна, для которых справедливы правила суммирования деформаций элементов, участвующих в последовательном соединении, для получения деформаций композита и правило равенства деформаций элементов, участвующих в параллельном соединении, деформациям композита.

Деформации композита, которым сопротивляются элементы, будучи соединенными параллельно, равны элементарным деформациям матрицы и волокна. Деформации композита, которым сопротивляются два типа элементов, соединенных последовательно, равны сумме элементарных деформаций матриц и волокон элементов этих двух типов, т. е.

$$(1.2) \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(c)} = \frac{N_f}{3} (\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m\beta)} + \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(f\beta)} + \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m\gamma)} + \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(f\gamma)}) = \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m\alpha)} = \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(f\alpha)},$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(c)} = \frac{N_f}{3} (\varepsilon_{\alpha\beta}^{(m\alpha)} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(f\alpha)} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m\beta)} + \varepsilon_{\alpha\beta}^{(f\beta)}) = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m\gamma)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(f\gamma)},$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3; \alpha \neq \beta \neq \gamma.$$

В равенствах (1.2) и ниже по повторяющимся греческим индексам суммирование не происходит. Средние деформации элементов одного вида предполагаются одинаковыми для области одинаковых компонентов.

Для определения эффективных упругих модулей достаточно найти их в ходе каких-нибудь процессов. При произвольных процессах выражение (1.1) может соответствовать анизотропным материалам, если для них не выполняются равенства

$$(1.3) \quad \varepsilon_{ii}^{(\xi\alpha)} = \varepsilon_{ii}^{(\xi\beta)} = \kappa_{ii}^{\xi} \varepsilon_{ii}^{(c)}, \quad \xi = m, f;$$

$$\varepsilon_{ij}^{(\xi\alpha)} \varepsilon_{ij}^{(\xi\alpha)} = \varepsilon_{ij}^{(\xi\beta)} \varepsilon_{ij}^{(\xi\beta)} = \eta_{ij}^{\xi} \varepsilon_{ij}^{(c)} \varepsilon_{ij}^{(c)} + \zeta_{ij}^{\xi} (\varepsilon_{ii}^{(c)})^2,$$

$$\alpha, \beta = 1, 2, 3$$

$$\kappa_{ii}^{\xi} = \text{const}, \quad \eta_{ij}^{\xi} = \text{const}, \quad \zeta_{ij}^{\xi} = \text{const}.$$

Возможность невыполнения (1.3) имеется вследствие неэквивалентной замены изотропного композита системой трех типов элементов. Чтобы устранить эту неэквивалентность, ограничимся процессами, приводящими к (1.3). В качестве таких процессов рассмотрим два процесса, при которых

$$(1.4) \quad \varepsilon_{11}^{(c)} = \varepsilon_{22}^{(c)} = \varepsilon_{33}^{(c)} \neq 0; \quad \varepsilon_{12}^{(c)} = \varepsilon_{13}^{(c)} = \varepsilon_{23}^{(c)} = 0;$$

$$(1.5) \quad \varepsilon_{11}^{(c)} = \varepsilon_{22}^{(c)} = \varepsilon_{33}^{(c)} = 0; \quad \varepsilon_{12}^{(c)} = \varepsilon_{13}^{(c)} = \varepsilon_{23}^{(c)} \neq 0.$$

Для величин, входящих в (1.2), вследствие равноправия осей можно положить

$$(1.6) \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\beta)} = \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\gamma)}; \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\alpha)} = \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\beta)}, \quad \xi = m, f, \quad \alpha \neq \beta.$$

Деформации $\varepsilon_{ij}^{(\xi h)}$, входящие в (1.1), зависят от элементарных деформаций $\varepsilon_{ij}^{(\xi h)}$ при процессах (1.4), (1.5) так же, как деформации композита $\varepsilon_{ij}^{(c)}$ зависят от $\varepsilon_{ij}^{(mh)}$ или от $\varepsilon_{ij}^{(fh)}$ в случае процессов (1.4), (1.5), когда композит является мономером m или f . Последнее утверждение

вытекает из того, что в случае мономера $\varepsilon_{ij}^{(\xi k)}$ совпадает с $\varepsilon_{ij}^{(c)}$, а из деформаций $\varepsilon_{ij}^{(\xi k)}$ имеются либо $\varepsilon_{ij}^{(mb)}$, либо $\varepsilon_{ij}^{(fk)}$.

Отсюда и из (1.2), (1.6) следует, что элементарные деформации и входящие в (1.1) деформации элементов какого-нибудь типа будут равны друг другу, если они соответствуют нагрузкам, относительно которых элементы находятся между собой в параллельном соединении. Если элементы находятся между собой в последовательном соединении, то из (1.1) деформации, соответствующие нагружению последовательных элементов, будут больше элементарных деформаций в $(2/3)N_f$ раз ($(2/3)N_f$ — число последовательных элементов). Таким образом, деформации $\varepsilon_{ij}^{(\xi k)}$ определяются через элементарные при помощи соотношений

$$(1.7) \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi k)} = \begin{cases} \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\alpha)} & \text{при } k = \alpha, \\ \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\beta)} & \text{при } k = \beta, \\ \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\gamma)} & \text{при } k = \gamma, \xi = m, f; \end{cases}$$

$$\varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi k)} = \begin{cases} \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\alpha)} & \text{при } k = \alpha, \\ \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\beta)} & \text{при } k = \beta, \\ \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\gamma)} & \text{при } k = \gamma, \xi = m, f, \end{cases}$$

$$\alpha, \beta, \gamma = 1, 2, 3, \alpha \neq \beta \neq \gamma.$$

При процессе (1.4), (1.6) удовлетворение соотношениям (1.3) с учетом (1.7), (1.2) приводит к равенствам

$$(1.8) \quad (1 - \kappa) \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(c)} = \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(f\beta)}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\kappa \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(c)} = \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(m\beta)}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\kappa^f = (3 - 2\kappa)/3, \quad \kappa^m = (1 + 2\kappa)/3,$$

$$\xi^\xi = (1/3)[(\kappa^\xi)^2 - \eta^\xi].$$

В случае процесса (1.5), (1.6) из (1.3), (1.7), (1.2) следует

$$(1.9) \quad (1 - \eta) \varepsilon_{\alpha\beta}^{(c)} = \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\beta}^{(f\alpha)}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\eta \varepsilon_{\alpha\beta}^{(c)} = \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\beta}^{(m\alpha)}, \quad \alpha \neq \beta,$$

$$\eta^f = [1 + 2(1 - \eta)^2]/3, \quad \eta^m = [1 + 2\eta^2]/3.$$

Деформации $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\beta)}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\alpha)}$ ($\alpha \neq \beta$) связаны с истинными средними деформациями ξ -компонента и элементов, участвующих в последовательном соединении, и относительными объемными содержаниями компонентов соотношениями

$$(1.10) \quad \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\beta)} \equiv \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\beta)} = V_\xi \varepsilon_{\alpha\alpha}^{\xi\beta}, \quad \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\alpha)} = \frac{2}{3} N_f \varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\alpha)} = V_\xi \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi\alpha},$$

$$\xi = f, m, V_f + V_m = 1.$$

Формулы (1.10) следуют из (1.7) соответственно при $k = \beta, \gamma$ и $k = \alpha, \beta$, так как $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\beta)}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\alpha)}$ — деформации, осредненные по объему последовательных элементов, а $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{\xi\beta}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi\alpha}$ — деформации, осредненные по объему волокон и матриц соответственно при ξ , равном m и f . Заметим,

что деформации $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{(\xi\alpha)}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^{(\xi\gamma)}$ ($\alpha \neq \beta \neq \gamma$) равны соответственно деформациям $\varepsilon_{\alpha\alpha}^{\xi\alpha}$ и $\varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi\gamma}$ ξ -компонента, участвующего в параллельном соединении.

Величины объемных упругих модулей K_ξ и сдвиговых упругих модулей μ_ξ -компонентов определяются соответственно для процессов (1.4), (1.6) и (1.5), (1.6) в системе последовательно соединенных элементов

$$(1.11) \quad \begin{aligned} 3K_\xi \varepsilon_{\alpha\alpha}^{\xi\beta} &= \sigma_{c\alpha}, \quad \xi = f, m; \\ 2\mu_\xi \varepsilon_{\alpha\beta}^{\xi\alpha} &= \sigma_{\alpha\beta}, \quad \alpha \neq \beta, \end{aligned}$$

где $\sigma_{c\alpha}$ и $\sigma_{\alpha\beta}$ — соответствующие компоненты части тензора напряжений, приходящихся на последовательно соединенные элементы.

Подстановка первых и вторых равенств (1.2), (1.10), (1.11) соответственно во вторые равенства (1.8), (1.9) дает

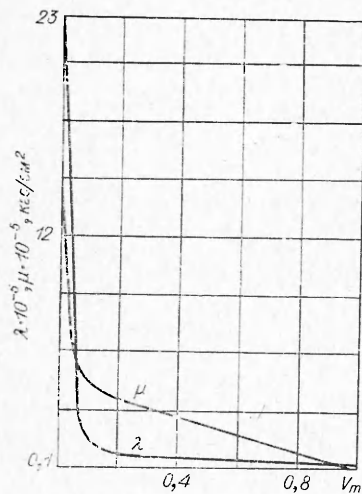
$$(1.12) \quad \kappa = \frac{K_f/V_f}{K_f/V_f + K_m/V_m}, \quad \eta = \frac{\mu_f/V_f}{\mu_f/V_f + \mu_m/V_m}.$$

Подставляя (1.3) в (1.1) и дифференцируя результат по ε_{ij}^c , получим с учетом соотношений (1.8), (1.9) формулы для эффективных постоянных Ламэ λ_c , μ_c и модуля K_c , а также коэффициента линейного теплового расширения α_c волокнистого композита

$$(1.13) \quad \begin{aligned} K_c &= K_m V_m (1 + 2\kappa)^2/9 + K_f V_f (3 - 2\kappa)^2/9; \\ \mu_c &= \mu_m V_m (1 + 2\eta^2)/3 + \mu_f V_f [1 + 2(1 - \eta)^2]/3; \\ \lambda_c &= K_c - (2/3)\mu_c, \quad \alpha_c = \gamma_c/3K_c, \\ \gamma_c &= V_m K_m \alpha_m (1 + 2\kappa) + V_f K_f \alpha_f (3 - 2\kappa) \end{aligned}$$

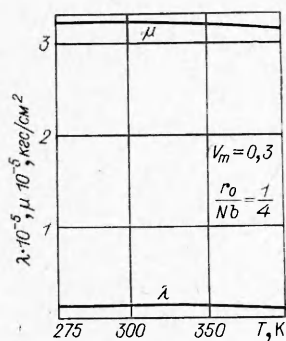
(величины κ и η определяются соотношениями (1.12)).

2. В качестве примера применения формулы (1.13) рассмотрим матрицу — эпоксидную смолу ЭД-6, отвержденную метилтетрагидрофталевым ангидридом и армированную поликристаллическим борным волокном. В работе [9] получены упругие модули, зависящие от T , и коэффициент

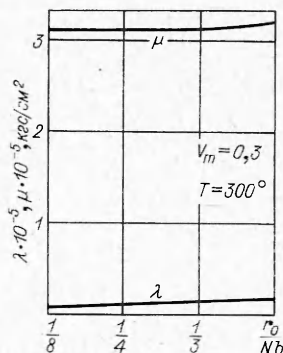


Ф и г. 1

линейного теплового расширения рассматриваемой эпоксидной смолы. Воспользуемся этими данными, а также упругими модулями поликристаллического борного волокна [10], пренебрегая их зависимостью от T по сравнению с соответствующей зависимостью для смолы. На фиг. 1—3 показаны рассчитанные зависимости упругих модулей композита от относительной объемной концентрации, температуры и степени сшивания r_0/Nb , где r_0 — расстояние между концами цепочки смолы — отвердитель; b — средняя длина сегмента; N — число сегментов в цепочке. Как показывает фиг. 1, упругие модули композита равняются упругим модулям компонента, если относительная концентрация последнего равна единице. Ход кривых на фиг. 1 качественно соответствует тому факту, что хаотическая разориента-



Ф и г. 2



Ф и г. 3

ция волокон уменьшает модули упругости композита. Уменьшение упругих модулей (см. фиг. 2, 3) с ростом температуры и с уменьшением степени сшивания также соответствует экспериментальным данным.

Поступила 14 IV 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван Фо Фы Г. А. Теория армированных материалов. Киев, «Наукова думка», 1971.
2. Шермергор Т. Д. Описание релаксационных явлений в структурно-неоднородных полимерах методами корреляционных функций.— В кн.: Релаксационные явления в полимерах. Л., 1972, с. 307.
3. Counto U. J. The effect of the elastic modulus of the aggregate on the elastic modulus, creep and creep recovery of concrete.— «Mag. Concrete Res.», 1964, vol. 16, № 48, p. 129—138.
4. Фокни А. Г., Шермергор Т. Д. Влияние ориентаций армирующих волокон на упругие модули материалов.— «Инж. журн. МТТ», 1967, № 2, с. 93.
5. Шермергор Т. Д., Фокни А. Г. Использование теории случайных функций для определения границ эффективных упругих модулей армированных материалов.— В кн.: Проблемы надежности в строительной механике. Вильнюс, изд. Вильнюсского филиала Каунасского политех. ин-та, 1968, с. 133—138.
6. Аболиныи Д. С. Тензор податливости армированного в двух направлениях упругого материала.— «Механика полимеров», 1966, № 3, с. 372—379.
7. Хашин Ц., Розен Б. В. Упругие свойства материалов, армированных волокнами.— Сб. пер. Прикладная механика. Сер. Е, 1964, № 2, с. 71—82.
8. Холистер Г. С., Томас К. Материалы, упрочненные волокнами. М., «Металлургия», 1969.
9. Колокольчиков В. В., Ли Л. Кубическая упругая модель отвержденной эпоксидной смолы как следствие ее структуры.— В кн.: Механика деформируемого твердого тела. Вып. 1. Куйбышев, изд. Куйбышевск. ун-та, 1975.
10. Масленников К. И. Словарь-справочник. Химия волокон. М., «Химия», 1973.