УДК 532.5

МАССОПЕРЕНОС ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОГО РАСТВОРА В ОКРЕСТНОСТИ ЛОБОВОЙ ТОЧКИ НА СЖИМАЮЩЕЙСЯ ПЛАСТИНЕ ПРИ НАЛИЧИИ ДИФФУЗИОННОГО ПОТОКА МАССЫ

К. Бхаттачарья

Университет г. Бурдвана, 713104 Бурдван, Индия E-mail: krish.math@yahoo.com

Исследуется массоперенос в пограничном слое химически активного раствора в окрестности лобовой точки на сжимающейся поверхности при наличии однородного диффузионного потока массы. Рассматривается химическая реакция первого порядка. С использованием преобразований подобия система управляющих уравнений в частных производных сводится к системе автомодельных нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которые решаются численно с помощью метода пристрелки. Найдены двойные решения уравнений для концентрации раствора. Показано, что с увеличением отношения скоростей в случае первого решения концентрация раствора в точке увеличивается, а в случае второго решения — уменьшается. При наличии потока массы с увеличением числа Шмидта и параметра скорости реакции концентрация и толщина концентрационного пограничного слоя уменьшаются.

Ключевые слова: диффузионный поток массы, течение в окрестности лобовой точки, пограничный слой, массоперенос в химически активном растворе, сжимающаяся пластина, двойные решения.

Введение. Развитие течения в пограничном слое вследствие сжатия пластины впервые описано в работе [1] при исследовании поведения нестационарной пленки жидкости на растягивающейся пластине. Течение на сжимающейся пластине имеет различные технические применения, например при обработке полимерных материалов и при упаковке объемных предметов. В [2] показано, что существование и единственность стационарного течения на сжимающейся пластине зависят от наличия отсоса массы. В работе [3] методом гомотопического анализа (МГА) получено аналитическое решение задачи для случая закрученного магнитогидродинамического (МГД) течения неньютоновской жидкости второго класса на сжимающейся пластине. В [4, 5] найдено точное решение задачи в замкнутой форме для случая стационарного МГД-течения на пористой сжимающейся пластине при наличии пристенного массообмена, а также точное аналитическое решение для теплового пограничного слоя на сжимающейся пластине при наличии массообмена. В работе [6] с использованием МГА получено решение в виде ряда для трехмерных магнитогидродинамического и закрученного течений на сжимающейся пористой пластине. Для модели второго порядка задача о вязком течении со скольжением на пористой сжимающейся пластине аналитически решена в [7]. В [8] изучено нестационарное течение на

Работа выполнена при финансовой поддержке Государственного совета по высшей математике и Министерства атомной энергии правительства Индии.

сжимающейся пластине при наличии отсоса массы, а в [9] исследовано МГД-течение на сжимающейся пластине с граничными условиями скольжения. В работах [10, 11] изучено влияние наличия теплового излучения и источника (стока) тепла на нестационарное течение в пограничном МГД-слое и теплообмен на сжимающейся пластине при наличии вдува (отсоса), а также проведен анализ течения в пограничном слое на пластине, сжимающейся по экспоненциальному закону. Стационарное двумерное МГД-течение закрученной неньютоновской жидкости второго порядка на пористой сжимающейся пластине описано в [12]. В [13] изучено стационарное течение в пограничном слое неньютоновской жидкости, подчиняющейся степенному закону на пористой сжимающейся пластине. В [14] рассмотрено течение микрополярной жидкости на сжимающейся пластине, а в [15] исследовано влияние теплового излучения на теплообмен в течении микрополярной жидкости на сжимающейся пластине. В работе [16] получено аналитическое решение для течения в пограничном слое жидкости Кэссона на водопроницаемой растягивающейся (сжимающейся) пластине при наличии магнитного поля.

В [17] рассмотрено течение вблизи лобовой точки на сжимающейся пластине и для двумерных, и для осесимметричных случаев течения. Стационарное течение микрополярной жидкости в пограничном слое в окрестности лобовой точки на сжимающейся пластине изучено в [18]. В [19] проведен анализ влияния вдува (отсоса) на течение и теплообмен в пограничном слое вблизи лобовой точки на сжимающейся пластине при наличии тепловыделения. В работе [20] исследовано влияние скольжения на течение и теплообмен в окрестности лобовой точки на сжимающейся пластине. В [21] нестационарное течение пограничного слоя вблизи точки растекания на сжимающейся пластине изучено с использованием МГА, в то время как в [22] эта задача решена численно, причем для определенных значений управляющих параметров получены двойные решения. В работе [23] исследованы течение и теплообмен в окрестности лобовой точки на пластине, сжимающейся по экспоненциальному закону. Течение и теплообмен вблизи лобовой точки на сжимающейся по вой точки на сжимающейся (растягивающейся) пластине исследованы в работах [25–29].

Процесс диффузии примесей при наличии химической реакции в течении в пограничном слое имеет применение при очистке воды и воздуха от загрязнений, а также в различных химических технологиях. В работе [30] рассмотрена диффузия химически активной примеси в ламинарном течении в пограничном слое, который развивается на поверхности тела. В [31] исследован процесс массопереноса химически активных веществ в ламинарном течении на растягивающейся пластине. Течение и характеристики массообмена в вязкой электрически проводящей жидкости на непрерывно растягивающейся поверхности при наличии магнитного поля изучены в [32]. В [33] рассмотрены процессы тепломассообмена в МГД-течении вязкоупругой жидкости на пористой растягивающейся пластине при заданных температуре и концентрации примеси на стенке, потоках тепла и массы. В работе [34] исследованы свободноконвективное МГД-течение и массообмен в вязкой несжимаемой жидкости на растягивающейся пластине при наличии химической реакции. В [35] получено решение задачи о диффузии химически активных веществ в течении неньютоновской жидкости на растягивающейся пластине, погруженной в пористую среду, а в [36] исследованы движение и массообмен для двух типов вязкоупругой жидкости с химически активными примесями на пористой растягивающейся пластине. Характер распределения химически активного раствора в пограничном МГД-слое на водопроницаемой растягивающейся пластине и влияние скольжения на течение и массообмен на поверхности вертикальной растягивающейся полости изучены в [37, 38]. В работе [39] рассмотрен процесс массообмена в стационарном двумерном пограничном МГД-слое жидкости Максвелла на пористой сжимающейся пластине при наличии химической реакции. Массообмен в пограничном слое вблизи лобовой точки сжимающейся пластины изучен в работе [40]. В [41] исследован процесс переноса химически активного раствора в пограничном МГД-слое в окрестности точки торможения жидкости на растягивающейся пластине при наличии вдува (отсоса) массы на стенке.

Диффузия химически активного раствора существенно зависит от наличия потока массы с поверхности. Поэтому в данной работе изучается процесс переноса раствора в пограничном слое вблизи лобовой точки на сжимающейся пластине при наличии однородного потока массы. При этом учитывается наличие химической реакции первого порядка. Проводятся преобразования подобия. Полученные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения решаются с использованием метода пристрелки.

1. Математическая формулировка задачи. Рассмотрим процесс переноса химически активного раствора в вязкой несжимаемой жидкости в окрестности лобовой точки на сжимающейся пластине при наличии однородного потока массы. С использованием приближения пограничного слоя управляющие уравнения движения и уравнение для концентрации записываются в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \tag{1}$$

$$u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} = U_s\frac{dU_s}{dx} + v\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \qquad u\frac{\partial C}{\partial x} + v\frac{\partial C}{\partial y} = D\frac{\partial^2 C}{\partial y^2} - R(C - C_\infty), \tag{2}$$

где u, v — компоненты скорости в направлениях x, y соответственно; $\nu = \mu/\rho$ — кинематическая вязкость жидкости; ρ — плотность жидкости; μ — динамическая вязкость жидкости; U_s — скорость деформирования; C — концентрация примеси; C_{∞} — постоянная концентрация примеси в свободном потоке; D — коэффициент диффузии; R — скорость реакции в растворе.

Соответствующие граничные условия для компонент скорости и концентрации имеют вид

$$y = 0: \quad u = U_w(x) = bx, \quad v = 0, \qquad y \to \infty: \quad u \to U_s(x), \quad U_s(x) = ax,$$

$$y = 0: \quad \frac{\partial C}{\partial y} = -\frac{m_w}{D}, \qquad y \to \infty: \quad C \to C_\infty.$$
(3)

Здесь U_w — скорость сжатия пластины; b < 0, a > 0 — постоянные сжатия и деформирования пластины соответственно; m_w — однородный поток массы.

Вводятся следующие преобразования подобия:

$$\psi = \sqrt{a\nu} x f(\eta), \qquad C - C_{\infty} = \frac{m_w}{D} \left(\frac{\nu}{a}\right)^{1/2} \varphi(\eta), \qquad \eta = y \sqrt{\frac{a}{\nu}}$$
(4)

 $(\psi - \phi y$ нкция тока, определяемая выражениями $u = \partial \psi / \partial y, v = \partial \psi / \partial x; \eta$ — переменная подобия).

В силу (4) уравнение (1) выполняется тождественно. Подставляя (4) в уравнения (2), получаем автомодельные обыкновенные дифференциальные уравнения

$$f''' + ff'' - f'^2 + 1 = 0, \qquad \varphi'' + \operatorname{Sc}(f\varphi' - \beta\varphi) = 0,$$
(5)

где штрихи обозначают дифференцирование по η ; Sc = ν/D — число Шмидта; $\beta = R/a$ — параметр скорости реакции.

Граничные условия (3) принимают вид

$$\eta = 0: \quad f(\eta) = 0, \quad f'(\eta) = b/a, \qquad \eta \to \infty: \quad f'(\eta) \to 1, \\ \eta = 0: \quad \varphi'(\eta) = -1, \qquad \eta \to \infty: \quad \varphi(\eta) \to 0,$$
(6)

где *b/a* — отношение скоростей.

2. Численное решение задачи и обсуждение результатов. Нелинейные автомодельные связанные уравнения (5) наряду с граничными условиями (6) формируют двухточечную краевую задачу и решаются с помощью метода пристрелки [40, 42, 43] после преобразования ее в задачу с начальными условиями. При использовании метода пристрелки необходимо выбрать подходящее конечное значение $\eta \to \infty$, например η_{∞} . Уравнения (5) сводятся к системе уравнений первого порядка

$$f' = p, \quad p' = q, \quad q' = p^2 - fq - 1, \quad \varphi' = g, \quad g' = Sc \left(\beta\varphi - fg\right)$$
 (7)

с граничными условиями

$$f(0) = 0, \qquad p(0) = b/a, \qquad g(0) = -1.$$
 (8)

Чтобы решить задачу (7), (8) как задачу с начальными условиями, необходимо задать значения q(0), т. е. f''(0), $\varphi(0)$. Затем используется метод Рунге — Кутты четвертого порядка, после чего расчетные значения $f'(\eta)$, $\varphi(\eta)$ при $\eta_{\infty} = 15$ сравниваются с заданными граничными условиями $f'(\eta_{\infty}) = 0$ и $\varphi(\eta_{\infty}) = 0$. Далее начальные значения f''(0) и $\varphi(0)$ корректируются с использованием метода секущих. Размер шага выбирался равным $\Delta \eta = 0,01$. Процесс повторялся до тех пор, пока не был получен результат с заданной погрешностью 10^{-5} .

Численно получены распределения концентрации в течении вблизи лобовой точки на сжимающейся пластине при наличии однородного массового потока. Так же как в случае заданной постоянной поверхностной концентрации [40], найдены два решения для концентрации и скорости при $-1,24657 \leq b/a \leq -1,00000$, единственное решение при b/a > -1и установлено отсутствие решения при b/a < -1,24657. Течение на сжимающейся пластине существенно отличается от течения на пластине, растягивающейся в направлении набегающего потока. Завихренность, возникающая вследствие сжатия, диффундирует за пределы пограничного слоя, разрушая структуру его течения. Чтобы поддерживать стационарный режим течения в пограничном слое, предотвращая диффузию завихренности, необходимо использовать другую внешнюю силу. Вследствие деформирования течения в окрестности лобовой точки возникающая завихренность остается в области пограничного слоя, но если скорость сжатия очень большая, завихренность диффундирует, преодолевая сопротивление потока. В результате в зависимости от диапазона значений b/a (отношения постоянной сжатия к постоянной деформирования) возможны различные случаи: наличие двух решений, единственного решения или отсутствие решений. Если скорость сжатия меньше скорости деформирования (b/a > -1), то решение единственное. Если скорость сжатия больше скорости деформирования (b/a < -1), то устойчивость течения нарушается, поэтому имеют место два решения. Из этих двух решений в диапазоне $-1,24657 \leq b/a \leq -1,00000$ первое решение физически устойчиво, а второе физически неустойчиво, так как первое решение — единственное решение при b/a > -1. При b/a < -1.24657 структура пограничного слоя разрушается и, следовательно, решение отсутствует.

Для исследования влияния определяющих параметров задачи (отношения скоростей, числа Шмидта и параметра скорости реакции) на распределение концентрации выполнен численный расчет в случае, когда задан однородный поток массы. Получены распределения концентрации для различных значений определяющих физических параметров при наличии потока массы. Кроме того, поскольку возникновение течения обусловлено конвекцией, массовый поток не оказывает влияния на поле скорости, поэтому гидродинамическая часть задачи не рассматривается.

На рис. 1 показано влияние отношения скоростей на профили концентрации и градиента концентрации при наличии однородного потока массы. Видно, что в случае двойного решения толщина пограничного слоя раствора для второго решения всегда больше, чем



Рис. 1. Профили концентрации $\varphi(\eta)$ (*a*) и градиента концентрации $\varphi'(\eta)$ (*б*) в случае двойного решения при Sc = 0,7, $\beta = 0,5$ и различных значениях b/a: 1 — первое решение, 2 — второе решение; сплошные линии — b/a = -1,12, штриховые — b/a = -1,18, штрихпунктирные — b/a = -1,24



Рис. 2. Профили концентрации $\varphi(\eta)$ (*a*) и градиента концентрации $\varphi'(\eta)$ (*б*) в случае двойного решения при $b/a = -1, 2, \beta = 0, 5$ и различных значениях числа Шмидта Sc:

1 — первое решение, 2 — второе решение; сплошные линии — Sc = 0,3, штриховые — Sc = 0,6, штрихпунктирные — Sc = 1

для первого. Из рис. 1,*a* следует, что для первого решения с увеличением значения b/a концентрация $\varphi(\eta)$ увеличивается, а для второго уменьшается. При этом толщина концентрационного пограничного слоя для первого решения увеличивается, а для второго решения уменьшается. Кроме того, для первого решения при малых значениях η с увеличением b/a градиент концентрации $\varphi'(\eta)$ увеличивается, а при больших η уменьшается, что свидетельствует об увеличении толщины пограничного слоя. Для второго решения с увеличением значения b/a значение $\varphi'(\eta)$ сначала уменьшается, затем увеличивается.

На рис. 2 показано влияние числа Шмидта Sc на концентрацию и ее градиент. Для обоих решений при фиксированном значении η концентрация уменьшается с увеличением Sc. При этом толщина пограничного слоя раствора уменьшается. В случае однородного потока массы с увеличением Sc градиент концентрации возрастает.

Влияние параметра скорости реакции β на концентрацию показано на рис. 3. Так же как в случае увеличения числа Шмидта, для обоих решений при увеличении параметра



Рис. 3. Профили концентрации $\varphi(\eta)$ (a) и градиента концентрации $\varphi'(\eta)$ (б) в случае двойного решения при b/a = -1,2, Sc = 0,7 и различных значениях β : 1 — первое решение, 2 — второе решение; сплошные линии — $\beta = 0,5$, штриховые — $\beta = 0,7$, штрихпунктирные — $\beta = 1$

скорости реакции концентрация и толщина концентрационного пограничного слоя уменьшаются. Кроме того, с увеличением β градиент концентрации в точке увеличивается.

В обоих решениях граничное условие для концентрации на бесконечности выполняется асимптотически с заданной точностью, что обеспечивает точность решения, найденного с помощью данной численной схемы, а также сходимость полученных решений.

Заключение. В работе изучено влияние однородного массового потока на распределение концентрации химически активного вещества в пограничном слое в окрестности лобовой точки сжимающейся пластины. Учитывается химическая реакция первого порядка. С использованием преобразований подобия управляющие уравнения преобразованы в автомодельные нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения, которые решены численно методом пристрелки. Установлено, что наличие потока массы оказывает основное влияние на концентрацию раствора. Для первого решения с увеличением отношения скоростей концентрация и толщина концентрационного пограничного слоя увеличиваются, а для второго решения — уменьшаются. При наличии однородного потока массы для обоих решений с увеличением числа Шмидта и параметра скорости реакции концентрация и толщина пограничного слоя раствора уменьшаются. Таким образом, наличие однородного потока массы оказывает основное влияние на массообмен химически активного вещества в пограничном слое вблизи лобовой точки на сжимающейся пластине.

ЛИТЕРАТУРА

- Wang C. Y. Liquid film on an unsteady stretching sheet // Quart. Appl. Math. 1990. V. 48. P. 601–610.
- Miklavcic M., Wang C. Y. Viscous flow due a shrinking sheet // Quart. Appl. Math. 2006. V. 64. P. 283–290.
- Hayat T., Javed T., Sajid M. Analytic solution for MHD rotating flow of a second grade fluid over a shrinking surface // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 3264–3273.
- 4. Fang T., Zhang J. Closed-form exact solution of MHD viscous flow over a shrinking sheet // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2009. V. 14. P. 2853–2857.
- Fang T., Zhang J. Thermal boundary layers over a shrinking sheet: an analytic solution // Acta Mech. 2010. V. 209. P. 325–343.

- Hayat T., Abbas Z., Javed T., Sajid M. Three-dimensional rotating flow induced by a shrinking sheet for suction // Chaos, Solitons Fractals. 2009. V. 39. P. 1615–1626.
- Fang T., Yao S., Zhang J., Aziz A. Viscous flow over a shrinking sheet with a second order slip flow model // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2010. V. 15. P. 1831–1842.
- Fang T., Zhang J., Yao S. Viscous flow over an unsteady shrinking sheet with mass transfer // Chinese Phys. Lett. 2009. V. 26. 014703.
- Fang T., Zhang J., Yao S. Slip magnetohydrodynamic viscous flow over a permeable shrinking sheet // Chinese Phys. Lett. 2010. V. 27. 124702.
- Bhattacharyya K. Effects of radiation and heat source/sink on unsteady MHD boundary layer flow and heat transfer over a shrinking sheet with suction/injection // Front. Chem. Sci. Engng. 2011. V. 5. P. 376–384.
- 11. Bhattacharyya K. Boundary layer flow and heat transfer over an exponentially shrinking sheet // Chinese Phys. Lett. 2011. V. 28. 074701.
- Faraz N., Khan Y. Analytical solution of electrically conducted rotating flow of a second grade fluid over a shrinking surface // Ain Shams Engng J. 2011. V. 2. P. 221–226.
- Ishak A., Lok Y. Y., Pop I. Non-Newtonian power-law fluid flow past a shrinking sheet with suction // Chem. Engng Comm. 2012. V. 199. P. 142–150.
- Yacob N. A., Ishak A. Micropolar fluid flow over a shrinking sheet // Meccanica. 2012. V. 47. P. 293–299.
- Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C., Pop I. Effects of thermal radiation on micropolar fluid flow and heat transfer over a porous shrinking sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2012. V. 55. P. 2945–2952.
- Bhattacharyya K., Hayat T., Alsaedi A. Analytic solution for magnetohydrodynamic boundary layer flow of Casson fluid over a stretching/shrinking sheet with wall mass transfer // Chinese Phys. B. 2013. V. 22. 024702.
- Wang C. Y. Stagnation flow towards a shrinking sheet // Intern. J. Non-Linear Mech. 2008. V. 43. P. 377–382.
- Ishak A., Lok Y. Y., Pop I. Stagnation-point flow over a shrinking sheet in a micropolar fluid // Chem. Engng Comm. 2010. V. 197. P. 1417–1427.
- Bhattacharyya K., Layek G. C. Effects of suction/blowing on steady boundary layer stagnation-point flow and heat transfer towards a shrinking sheet with thermal radiation // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 302–307.
- Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C. Slip effects on boundary layer stagnation-point flow and heat transfer towards a shrinking sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 308–313.
- Fan T., Xu H., Pop I. Unsteady stagnation flow and heat transfer towards a shrinking sheet // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2010. V. 37. P. 1440–1446.
- 22. Bhattacharyya K. Dual solutions in unsteady stagnation-point flow over a shrinking sheet // Chinese Phys. Lett. 2011. V. 28. 084702.
- Bhattacharyya K., Vajravelu K. Stagnation-point flow and heat transfer over an exponentially shrinking sheet // Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulat. 2012. V. 17. P. 2728–2734.
- Nazar R., Jaradat M., Arifin N. M., Pop I. Stagnation-point flow past a shrinking sheet in a nanofluid // Cent. Eur. J. Phys. 2011. V. 9. P. 1195–1202.
- Yacob N. A., Ishak A., Pop I. Melting heat transfer in boundary layer stagnation-point flow towards a stretching/shrinking sheet in a micropolar fluid // Comput. Fluids. 2011. V. 47. P. 16–21.

- 26. Mahapatra T. R., Nandy S. K., Gupta A. S. Momentum and heat transfer in MHD stagnation-point flow over a shrinking sheet // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 2011. V. 78. 021015.
- 27. Rosali H., Ishak A., Pop I. Stagnation point flow and heat transfer over a stretching/shrinking sheet in a porous medium // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2011. V. 38. P. 1029–1032.
- 28. Bhattacharyya K. Heat transfer in unsteady boundary layer stagnation-point flow towards a shrinking sheet // Ain Shams Engng J. 2013. V. 4. P. 259–264.
- 29. Bhattacharyya K., Arif M. G., Ali Pramanik W. MHD boundary layer stagnation-point flow and mass transfer over a permeable shrinking sheet with suction/blowing and chemical reaction // Acta Tech. 2012. V. 57. P. 1–15.
- Chambre P. L., Young J. D. On diffusion of a chemically reactive species in a laminar boundary layer flow // Phys. Fluids. 1958. V. 1. P. 48–54.
- 31. Andersson H. I., Hansen O. R., Holmedal B. Diffusion of a chemically reactive species from a stretching sheet // Intern. J. Heat Mass Transfer. 1994. V. 37. P. 659–664.
- Takhar H. S., Chamkha A. J., Nath G. Flow and mass transfer on a stretching sheet with a magnetic field and chemically reactive species // Intern. J. Engng Sci. 2000. V. 38. P. 1303–1314.
- 33. Khan S. K., Abel M. S., Sonth R. M. Visco-elastic MHD flow, heat and mass transfer over a porous stretching sheet with dissipation of energy and stress work // Heat Mass Transfer. 2003. V. 40. P. 47–57.
- Afify A. MHD free convective flow and mass transfer over a stretching sheet with chemical reaction // Heat Mass Transfer. 2004. V. 40. P. 495–500.
- Akyildiz F. T., Bellout H., Vajravelu K. Diffusion of chemically reactive species in a porous medium over a stretching sheet // J. Math. Anal. Appl. 2006. V. 320. P. 322–339.
- 36. Cortell R. Toward an understanding of the motion and mass transfer with chemically reactive species for two classes of viscoelastic fluid over a porous stretching sheet // Chem. Engng Process. 2007. V. 46. P. 982–989.
- Bhattacharyya K., Layek G. C. Chemically reactive solute distribution in MHD boundary layer flow over a permeable stretching sheet with suction or blowing // Chem. Engng Comm. 2010. V. 197. P. 1527–1540.
- Bhattacharyya K., Layek G. C. Slip effects on diffusion of chemically reactive species in boundary layer flow due to a vertical stretching sheet with suction or blowing // Chem. Engng Comm. 2011. V. 198. P. 1354–1365.
- Hayat T., Abbas Z., Ali N. MHD flow and mass transfer of a upper-convected Maxwell fluid past a porous shrinking sheet with chemical reaction species // Phys. Lett. A. 2008. V. 372. P. 4698–4704.
- Bhattacharyya K. Dual solutions in boundary layer stagnation-point flow and mass transfer with chemical reaction past a shrinking sheet // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2011. V. 38. P. 917–922.
- Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C. Reactive solute transfer in magnetohydrodynamic boundary layer stagnation-point flow over a stretching sheet with suction/blowing // Chem. Engng Comm. 2012. V. 199. P. 368–383.
- Bhattacharyya K., Mukhopadhyay S., Layek G. C. Slip effects on unsteady boundary layer stagnation-point flow and heat transfer towards a stretching sheet // Chinese Phys. Lett. 2011. V. 28. 094702.
- Bhattacharyya K., Layek G. C. Similarity solution of MHD boundary layer flow with diffusion and chemical reaction over a porous flat plate with suction/blowing // Meccanica. 2011. V. 47. P. 1043–1048.

Поступила в редакцию 4/I 2013 г., в окончательном варианте — 6/IX 2013 г.