

**ОПТИМАЛЬНАЯ ФИЛЬТРАЦИЯ ЧАСТОТЫ СИГНАЛА
НА ФОНЕ ФЛИККЕР-ШУМОВ****Б. Д. Борисов***Институт лазерной физики СО РАН, г. Новосибирск**E-mail: borisov@laser.nsc.ru*

Рассмотрена задача оптимальной фильтрации частоты сигнала на выходе частотного детектора на фоне шумов фликкерного типа со степенной спектральной плотностью $\omega^{-\gamma}$. В стационарном приближении предложена простая дробно-рациональная модель спектров частотных фликкер-шумов с конечной мощностью. Получена оптимальная импульсная переходная функция измерителя, обеспечивающая эффективную, несмещенную и состоятельную оценку параметра с учетом краевых эффектов на концах интервала измерения, и дисперсия оптимальной оценки частоты. Сравниваются точности оценок для различных видов шумов и типов измерителей.

Введение. Задача оптимальной оценки постоянного значения частоты по сигналу на выходе частотного детектора (ЧД) на фоне нестационарного фликкер-шума со спектральной плотностью мощности (СПМ) типа $1/\omega$ рассматривалась в [1]. Для импульсной переходной функции (ИПФ) сглаживающего фильтра численно была получена несмещенная, состоятельная, но не эффективная оценка частоты.

В данной работе задача определения оптимальной ИПФ измерителя, обеспечивающей несмещенную, эффективную и состоятельную оценку частоты с учетом краевых эффектов на концах интервала измерения решается в стационарном приближении при различных частотных шумах фликкерного типа.

Модели фликкер-шумов. Особое место в измерениях частот высокостабильных генераторов и стандартов частоты, а также характеристик долговременной стабильности частоты занимают фликкер-шумы, СПМ которых подчинена степенному закону

$$S(\omega) = \omega^\gamma, \quad -2 \leq \gamma \leq 2, \quad (1)$$

где $\omega = 2\pi f$ – круговая спектральная частота, γ – параметр.

В работе [2] для моделей СПМ в виде степенных функций с каждым целочисленным значением γ связан определенный тип шума: частотный шум случайных блужданий ($\gamma = -2$), частотный фликкер-шум ($\gamma = -1$), белый частотный шум ($\gamma = 0$), фазовый фликкер-шум ($\gamma = +1$) и белый фазовый шум ($\gamma = +2$). Их характерной особенностью является то, что дисперсия фликкер-

шума может превышать уровни теплового и дробового шумов и ограничивать точность измерений на их фоне. Дисперсия шума на выходе измерителя оценивается известным выражением

$$\sigma_{\gamma}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} S(\omega) |H(\omega)|^2 d\omega, \quad (2)$$

где $|H(\omega)|^2$ – квадрат модуля передаточной функции измерителя. Кроме того, интеграл (2) для точных моделей шума (1) расходится для многих измерителей с различными $|H(\omega)|^2$, в частности для электронно-счетного частотомера (ЭСЧ). Корреляционной функции для идеальных моделей (1) не существует [2].

При выборе метода измерений нужна физически реалистичная модель фликкер-шума с конечной мощностью и корреляционной функцией, сохраняющая его основные свойства в рабочей полосе частот СПМ, включающей и нулевые частоты. В качестве такой модели рассмотрим модель стационарных частотных фликкер-шумов с дробно-рациональным спектром общего вида:

$$S(\omega) = \frac{a^{\mu} + |\omega^{\mu}|}{a^{\nu} + |\omega^{\nu}|}, \quad 0 \leq \nu, \mu \leq 2, \mu \leq \nu, a > 0, \quad (3)$$

где a – нижняя спектральная граница фликкер-шумов.

Модели СПМ стационарных фликкер-шумов рассматривались в [3, 4]. Характерным и общим для этих моделей является наличие низкой граничной частоты a , на которой существует конечное значение СПМ – «полка». Модель (3) близка к модели [4], но в отличие от нее представлена в более простой, дробно-рациональной, форме и не содержит специальных функций.

Из выражения (3) для γ из (1) получим модели стационарных частотных фликкер-шумов:

$$S(\omega) = \frac{2}{a^2 + \omega^2} \quad \text{для } \gamma = -2 \quad (\nu=2, \mu=0), \quad (4)$$

$$S(\omega) = \frac{a + \omega}{a^2 + \omega^2} = \frac{a}{a^2 + \omega^2} + \frac{\omega}{a^2 + \omega^2} \quad \text{для } \gamma = -1 \quad (\nu=2, \mu=1), \quad (5)$$

$$S(\omega) = N_0 \quad \text{для } \gamma = 0 \quad (\nu=0, \mu=0), \quad (6)$$

где через N_0 обозначена постоянная спектральная плотность белого частотного шума.

Отметим, что для частотного фликкер-шума с $\gamma = -1$ в (5) значения СПМ в области нулевых частот $0 < \omega < a$ определяются в основном первым членом. В области частот $\omega > a$ превалирует второй член, который хорошо воспроизводит закон $1/\omega$ для всех частот $\omega \geq a$. Наконец при $a=0$ (4) и (5) переходят в соответствующие точные модели частотных фликкер-шумов. Графики моде-

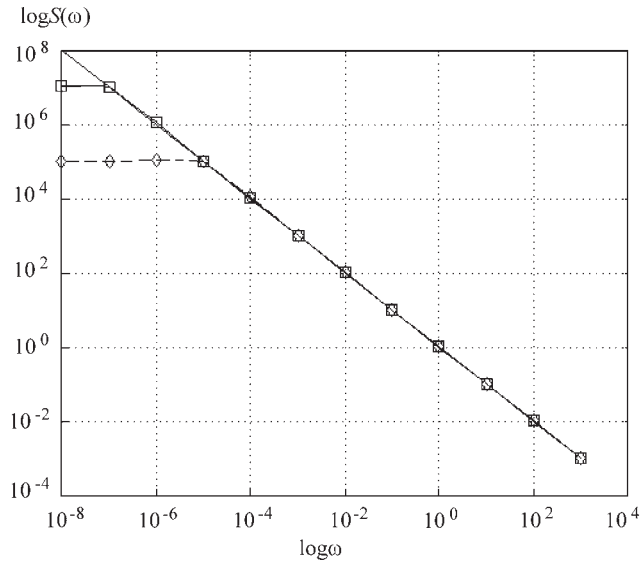


Рис. 1. Модели спектральной плотности мощности $S(\omega)$: идеальная модель спектра нестационарного процесса ω^{-1} в диапазоне $10^{-8} - 10^{+3}$ Гц (сплошная линия), модели спектра (5) стационарного процесса с $a = 10^{-7}$ Гц ($1/a = 100$ суток) (линия с квадратами) и $a = 10^{-5}$ Гц ($1/a = 1$ сутки) (штриховая линия с ромбами)

лей этой спектральной плотности мощности приведены на рис. 1 в двойном логарифмическом масштабе. Практическую оценку a для частот выше $1/T_{\max}$ можно получить, используя известную частотно-временную зависимость $a = 1/T_{\max}$, где T_{\max} – длительность максимального интервала измерения [5].

В отличие от идеальных моделей с неинтегрируемыми спектрами (1), фурье-образы (4)–(6) существуют и равны соответственно [6]:

$$R(\tau) = \exp(-a|\tau|), \quad (7)$$

$$R(\tau) = \pi e^{-a|\tau|} - \frac{1}{2} [e^{-a|\tau|} \bar{E}i(a\tau) + e^{a|\tau|} Ei(-a\tau)], \quad (8)$$

$$R(\tau) = \frac{N_0}{2} \delta(\tau), \quad (9)$$

где $\bar{E}i$ и Ei – модифицированная и обычная интегральные показательные функции, $\delta(\tau)$ – дельта-функция.

Определение импульсной переходной функции измерителя. Специфика получения оценки (отсчета) частоты на конечном интервале измерения заключается в необходимости учета значений измеряемого частотного процесса и его производных на концах интервала, особенно при малых T . В практических приложениях для исключения избыточности числа отсчетов и повышения точности измерений частотных параметров, в частности модулированных, как правило, вместо обработки сигнала на высокой несущей частоте используется частотное детектирование узкополосного сигнала генератора $s(t)$ и прямо обрабатывается шумоподобный процесс $F(t)$ на выходе ЧД. На-

строенный на частоту F_0 ЧД дает возможность получить уже аддитивную смесь частотных компонент

$$F(t) = F_0 + F_c(t) \quad (10)$$

и оптимизировать характеристику фильтра, сглаживающего процесс на выходе ЧД в измерителе, где F_0 – постоянное значение частоты, $F_c(t)$ – флуктуационная компонента (частотный фликкер-шум).

Из (10) следует, что задача оценки искомой F_0 по сигналу $F(t)$ на интервале T сводится к синтезу фильтра с конечной памятью, минимизирующего дисперсию оценки неизвестного постоянного параметра $F_0 = \text{const}$:

$$\sigma^2 = \langle [F(t) - F_0]^2 \rangle, \quad (11)$$

где угловые скобки означают усреднение по времени с учетом нормировки, исключающей смещенность самой оценки

$$\int_0^T k(\theta) d\theta = 1 \quad (12)$$

($k(\theta)$ – ИПФ измерителя).

Общее решение задачи дает метод определения ИПФ для систем с конечной памятью (развитый Заде и Рагаццини), обеспечивающий минимум среднеквадратической ошибки [7]. ИПФ $k(\theta)$, удовлетворяющая условиям физической реализуемости $k(t) = 0, t < 0$, и качеству – времени переходного процесса $k(t) = 0, t > T$, находится из решения интегрального уравнения (8.23) в [7] для модели сигнала, в общем случае содержащего детерминированную составляющую полиномиального типа, полезную стохастическую составляющую и аддитивную помеху. В нашем случае при отсутствии полезной случайной составляющей в сигнале и постоянном значении сигнала (полинома нулевой степени) на выходе ЧД уравнение принимает вид

$$\int_0^T R_F(t - \theta) k(\theta) d\theta = \lambda_0 t^0, \quad (13)$$

где $R_F(\tau)$ – корреляционная функция частотного шума; t^0 – полиномиальная составляющая полезного сигнала; λ_0 – неопределенный множитель Лагранжа, возникающий в результате решения вариационной задачи на условный минимум среднеквадратической ошибки. Этот минимум ошибки (дисперсия) оценки определяется общим выражением (8.21) в [7] и для нашего случая имеет вид

$$\sigma^2 = \int_0^T k(\tau) d\tau \int_0^T R_F(\tau - \theta) k(\theta) d\theta, \quad (14)$$

откуда, учитывая (13), получим

$$\sigma^2 = \lambda_0 \int_0^T k(\tau) d\tau. \quad (15)$$

С учетом нормировки (12) будем иметь

$$\sigma^2 = \lambda_0. \quad (16)$$

Хотя показатель степени γ может принимать дробные значения, найдем частные решения уравнения (13) для трех уже известных типов частотных фликкер-шумов, соответствующих целым значениям γ и корреляционным функциям (7)–(9).

Частотный шум случайных блужданий ($\gamma = -2$). Из формулы (8.53) в [7] для общего решения уравнения (13), определяющего вид оптимальной ИПФ, с учетом отсутствия случайной составляющей в полезном сигнале (интеграл по СПМ этой составляющей в (8.53) равен нулю) и «нулей» в СПМ (4) (все члены с коэффициентами B в (8.53) равны нулю), а также с учетом $F_0 = \text{const}$ в (10), что соответствует t^0 , следует

$$k(t) = A + C\delta(t) + D\delta(t - T), \quad 0 \leq t \leq T; \quad k(t) = 0, \quad T < t, \quad (17)$$

где A, C, D – коэффициенты, подлежащие определению, а дельта-функции обусловлены действием оператора ИПФ на разрывы непрерывности функции $F(t)$ на концах интервала $t = 0$ и $t = T$.

Используя известные приемы решения уравнения (13), методом неопределенных коэффициентов (разд. 8.8 в [7]) найдем значения коэффициентов

$$A = a/(aT + 2); \quad C = D = 1/(aT + 2) \quad (18)$$

и, подставив их в (17), определим ИПФ оптимального фильтра для этого типа фликкер-шума (рис. 2):

$$k(t) = [a + \delta(t) + \delta(t - T)]/(aT + 2), \quad 0 \leq t \leq T. \quad (19)$$

Кроме того, определим дисперсию (16) оценки параметра F_0 , где $\lambda_0 = \text{const}$ приравнивается из условия тождественности частей (13) к постоянному члену, содержащему A , в левой части решения (13):

$$\sigma_{-2}^2 = \lambda_0 = 2A/a = 2/(aT + 2). \quad (20)$$

Из рис. 2 видно, что полученная ИПФ по форме совпадает с ИПФ ЭСЧ – идеальным интегратором (ИИ), но существенно отличается на концах интервала наличием двух дельта-функций, которые учитывают краевые эффекты на концах интервала T и улучшают точность измерений. Соответствующая передаточная функция (ПФ) прямо определяется по

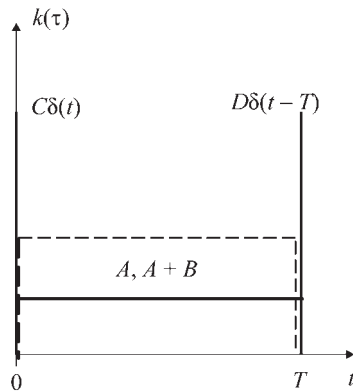


Рис. 2. Формы импульсной переходной функции $k(\tau)$ измерителя на конечном интервале T : оптимальный фильтр (сплошная линия), идеальный интегратор (пунктирная линия)

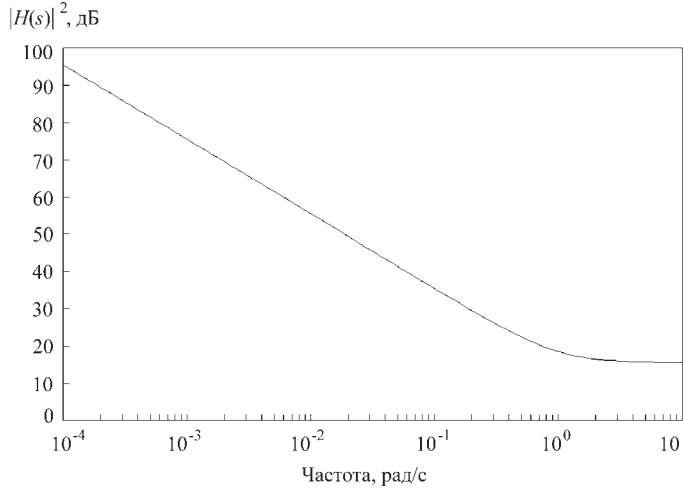


Рис. 3. АЧХ оптимального фильтра при $a = 1, T = 1$

(8.55) в [7] и с учетом коэффициентов (18) имеет вид

$$H(s) = \frac{1}{aT + 2} \left[\frac{s + a}{s} + \frac{e^{-sT}(s - a)}{s} \right], \quad s = j\omega. \quad (21)$$

На рис. 3 приведен $|H(s)|^2$ АЧХ этого оптимального фильтра. Практическое применение полученных характеристик измерителя возможно либо с использованием стандартных программ свертки выходного сигнала ЧД с (19), либо с помощью таблиц стандартного Z-преобразования по аналитической форме ИПФ (или ПФ), т. е. определяются соответствующие функции цифровых фильтров с конечной импульсной характеристикой по (19) или (21) [5].

Частотный фликкер-шум ($\gamma = -1$). Найдем оптимальную ИПФ и дисперсию оценки частоты для этого наиболее известного типа фликкер-шума. Как и для случая $\gamma = -2$, рассмотрим ситуацию в стационарном приближении, но с использованием модели СПМ (5) и корреляционной функции (8).

Исходя из монотонности функций $Ei, \bar{E}i$ в (8) и экспоненциального характера их нелинейности [8], представим (8) в виде, упрощающем вычисления:

$$R(\tau) = \pi e^{-a|\tau|} + \pi e^{-5a|\tau|}. \quad (22)$$

Табулированные значения функции (8) и ее аппроксимация (22) представлены на рис. 4.

В отличие от (4) дробно-рациональная функция СПМ фликкер-шума (5) содержит не только полюсы, но и нули, т. е. в общем решении уравнения (13) коэффициенты $B_i \neq 0$. Поэтому в данном случае ИПФ из (8.53) [7] примет вид

$$k(t) = A + 2Be^{\theta t} + C\delta(t) + D\delta(t - T), \quad 0 \leq t \leq T, \quad (23)$$

где A, B, C, D – коэффициенты, подлежащие определению. Члены с коэффициентами B в (23) определяются корнями θ_i (λ_i в [7, (8.53)]) – нулями харак-

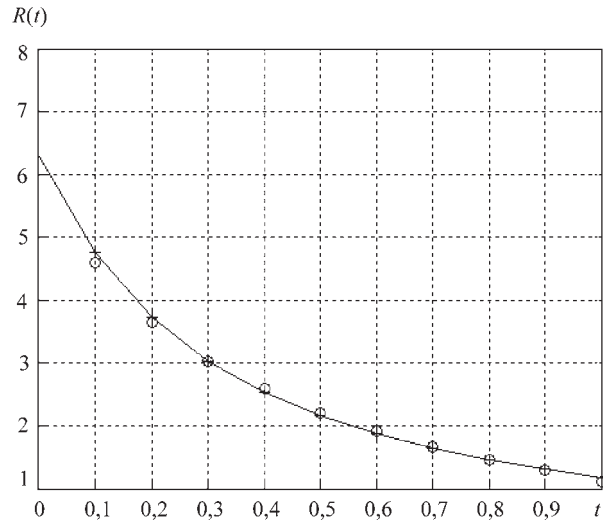


Рис. 4. Табулированные значения корреляционной функции (8) (кружки) и ее аппроксимация (22) (кривая с крестиками)

теристического уравнения с четными степенями, заданного числителем (5). Представим характеристическое уравнение $a + \omega = 0$ в иной (по четной степени), иррациональной, форме: $a + (\sqrt{\omega})^2 = 0$. Оно имеет два вещественных отрицательных корня $\theta_1 = \theta_2 = -a$, что и определяет в (23) удвоение коэффициента B .

Как и в случае $\gamma = -2$, оптимальная ИПФ находится из решения (13), но с ядром (23). Подставляя (22) и (23) в (13) и интегрируя почленно, получим восемь интегралов. Складывая их значения и приравнявая к правой части (13), будем иметь

$$\left(\frac{2\pi A}{a} - \frac{2\pi A}{5a}\right) + e^{-at} \left(-\frac{\pi A}{a} + \frac{1,7\pi B}{2a} + \frac{\pi B T}{2a} + \pi B T + \pi C\right) + e^{-a(T-t)} \left(\frac{\pi B}{2a} - \frac{\pi A}{a} + \pi D\right) + e^{-5at} \left(\pi C - \frac{\pi B}{2a} - \frac{\pi A}{5a}\right) = \lambda_0. \quad (24)$$

Выражение (24) должно удовлетворяться тождественно, поэтому коэффициенты при e^{-at} , $e^{-a(T-t)}$, e^{-5at} приравниваются к нулю. К определенным таким образом трем уравнениям добавим четвертое из условия нормировки (12). В результате будем иметь систему из четырех уравнений для неизвестных коэффициентов A, B, C, D :

$$\begin{aligned} A - B(0,85 + T + aT) - aC &= 0, \\ A - 0,5B - aD &= 0, \\ A + 2,5B - 5aC &= 0, \\ AaT + B(1 - e^{-aT}) + aC + aD &= a. \end{aligned} \quad (25)$$

Решая ее, найдем:

$$A = \frac{aE}{M}; \quad B = \frac{a}{M}; \quad C = \frac{0,2E + 0,5}{M}; \quad D = \frac{E - 0,5}{M}, \quad (26)$$

$$E = aT + T + 1,35, \quad M = 1 - e^{-aT} + (aT + 1,2)E.$$

Подставляя с учетом (16) значение коэффициента A из (26) в константу левой части (24), получим искомый минимум дисперсии оценки частоты на конечном интервале для фликкер-шума:

$$\lambda_0 = \sigma_{-1}^2 = \left(\frac{2\pi A}{a} - \frac{2\pi A}{5a} \right) = \frac{7,5E}{M} = \frac{7,5(aT + T + 1,35)}{1 - e^{-aT} + (aT + 1,2)(aT + T + 1,35)}. \quad (27)$$

Для сравнения этого результата с полученным в [1] методом структурной функции «предельным» значением $\sigma_{-1}^2 \approx 4,46 \text{ Гц}^2$ для идеальной ω^{-1} модели СПМ примем в (27) $a = 1/T$ и $aT = 1$:

$$\sigma_{-1}^2 \xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{17,62a + 7,5}{43a + 2,2} \rightarrow 3,41 < 4,46 \text{ Гц}^2. \quad (28)$$

При $a \rightarrow 0$ в (28), что соответствует приближению используемой модели СПМ (5) к ω^{-1} (см. рис.1), будем иметь меньшую, чем в [1], оценку дисперсии.

Подставляя значения A, B, C, D в (23), можно определить и точное выражение для оптимальной ИПФ. По форме эта ИПФ, но с коэффициентами (26), имеет тот же характер, что и предыдущая для $\gamma = -2$ (см. рис. 2), из-за малости коэффициента B . Пунктирной линией показана ИПФ ИИ (см. рис. 2), на выходе которого также определим дисперсию оценки параметра F_0 для $\gamma = -1$. Подставляя СПМ (5) и $|H(\omega)|^2 = \frac{\sin^2(\omega T/2)}{(\omega T/2)^2}$ для ИИ в (2) и интегрируя,

получим результат с известным характером зависимости от T [9]:

$$\sigma_{\text{ИИ}}^2 = 2 \int_0^{\infty} \frac{(a + \omega) \sin^2(\omega T/2) d\omega}{(a^2 + \omega^2)(\omega T/2)^2} \approx \frac{\pi}{aT^2} \text{ Гц}^2. \quad (29)$$

На рис. 5 сведены искомые среднеквадратические отклонения (СКО) параметра F_0 на фоне фликкер-шума с $\gamma = -1$ из (27), (29) и значение предельного СКО = 2,11 из [1] как функции безразмерного аргумента aT . Сравнивая их, можно заключить, что степень сглаживания частотных флуктуаций с СПМ вида ω^{-1} оптимальным фильтром дает меньшую ошибку, чем ИИ, используемый в ЭСЧ.

Все найденные результаты показывают, что дисперсия оценки постоянного параметра на фоне шума с $\gamma = -1$, действительно, слабо зависит от длительности интервала измерения (сглаживания) T , т. е. частотный фликкер-шум практически не подавляется в результате увеличения времени усреднения. Но дисперсию оценки можно уменьшить, применяя оптимальную

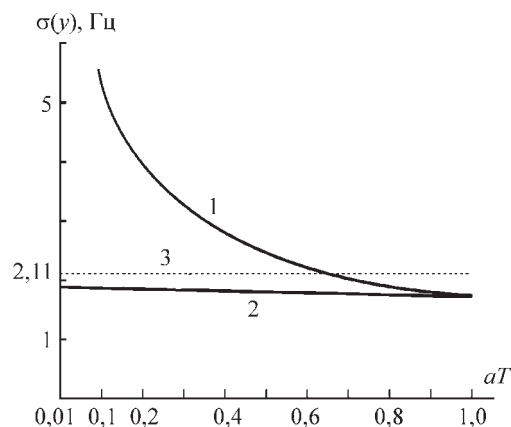


Рис. 5. Среднеквадратические отклонения $\sigma(y)$ оценки средней частоты y на интервале T при $a = 1$, полученные идеальным интегратором (кривая 1), оптимальным фильтром (2) и по структурной функции (3)

ИПФ, которая обеспечивает снижение ошибки. Таким образом, оценка, полученная в [1], является несмещенной, состоятельной, но не эффективной, с большей дисперсией, а оценка для физически обоснованной модели СПМ (5) – несмещенной, эффективной и состоятельной при любых $a > 0$ и $T \leq 1/a$.

Белый частотный шум ($\gamma = 0$). Используя выражения (9) и (13), для этого типа шума нетрудно показать, что

$$\sigma_0^2 = \pi N_0 / T, \quad (30)$$

т. е. идеальный интегратор, используемый в ЭСЧ, является оптимальным фильтром только при оценке постоянного параметра на фоне белого частотного шума с СПМ N_0 .

Предложенная методика применима и для оценки параметра с полиномиальным изменением частоты на фоне шумов фликкерного типа, например при линейной частотной модуляции в (10) появится член $F_m(t) = Ft$, а в правой части (13) – член $\lambda_1 t$.

Закключение. В данной работе предложена модель спектральной плотности мощности стационарных фликкер-шумов с конечной дисперсией и корреляционной функцией. Для оценки частоты сигнала на выходе частотно-го детектора по детектированному с ненулевым средним значением сигналу конечной длительности на фоне аддитивных фликкер-шумов различных типов в стационарном приближении найдена импульсная переходная функция оптимального фильтра с учетом краевых эффектов на концах интервала измерения. Предложенная методика измерений частоты в классе линейных оценок обеспечивает в сравнении с идеальным интегратором и структурной функцией лучшее подавление фликкер-шума и меньшую дисперсию оценки частоты.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Пашев Г. П. О предельной эффективности усреднения фликкер-шума // Изв. вузов. Сер. Радиофизика. 1981. 24, № 8. С. 1030.

2. **Рютман Ж.** Характеристики нестабильности фазы и частоты сигналов высокостабильных генераторов // ТИИЭР. 1978. **66**, № 9. С. 70.
3. **Рютман Ж., Юберсфельд Ж.** Модель частотного фликкер-шума генераторов // ТИИЭР. 1972. **60**, № 2. С 101.
4. **Gray R. M., Tausworthe R. C.** Frequency – counted measurements and phase – locking to noisy oscillators // IEEE Trans. Commun. Technol. 1971. **COM-19**. P. 21.
5. **Макс Ж.** Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях. М.: Мир, 1983. Т. 2. С. 256.
6. **Градштейн И. С., Рыжик И. М.** Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Мир, 1972. С. 352.
7. **Солодовников В. В.** Статистическая динамика линейных систем автоматического управления. М.: Физматгиз, 1960.
8. **Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф.** Специальные функции. М.: Наука, 1977.
9. **Андронов И. С., Снитко Б. Н.** Об измерении частоты по переходам напряжения через нулевой уровень // Радиотехника. 1974. № 6.

Поступила в редакцию 26 января 2007 г.
