

УДК 532.529.534.2

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЕРЕГРЕТОЙ ЖИДКОСТИ, СОДЕРЖАЩЕЙ ПАРОГАЗОВЫЕ ЗАРОДЫШИ

В. Ш. Шагапов^{*,**}, В. В. Коледин^{**}, Н. К. Вахитова^{***}

* Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа

** Бирский филиал Башкирского государственного университета, 452450 Бирск

*** Башкирский государственный университет, 450074 Уфа

E-mails: Shagapov@rambler.ru, vikoled@mail.ru, vnk-55@mail.ru

Рассмотрена проблема устойчивости перегретой жидкости, содержащей зародыши нерастворимого газа. Определены критические условия для массы газовых зародышей, их радиусов и объемных концентраций в случае устойчивого состояния системы жидкость — парогазовые зародыши. Построена теория спонтанных решений, описывающая выход перегретой пузырьковой парогазожидкостной системы из неустойчивого состояния. На основе таких решений изучена динамика перехода перегретой жидкости в устойчивое состояние.

Ключевые слова: устойчивость, метастабильная жидкость, парогазовый пузырек, инкремент, критическая масса зародыша.

Введение. В последнее время активно изучаются состояние и поведение наноразмерных пузырьков включений в жидкости. Большое количество работ посвящено исследованию поведения нанопузырьков вблизи границы между жидкостью и твердым телом [1–6].

Наличие микропузырьков свободного газа (с радиусами порядка 1 мкм) в отстоявшейся в течение нескольких суток дистиллированной воде отмечено в работах [7–13]. Однако эксперименты, проводимые с использованием современной физической аппаратуры, меняют традиционное представление о процессе растворения газов в жидкостях. Например, характерное время жизни пузырьков размером порядка 1 мкм, оцениваемое по формуле $t_D = a^2/D$ (a — радиус пузырька; D — коэффициент диффузии), может составлять несколько секунд, однако в опытах устойчивое состояние пузырьков с размерами порядка 100 нм наблюдалось в течение достаточно длительного времени. В состав большинства жидкостей, в частности воды, входят газовые зародыши с очень низкой растворимостью. Наличие таких зародышей, по-видимому, оказывает существенное влияние на характер вскипания жидкости при давлении, меньшем равновесного значения при данной исходной температуре. По-видимому, наличие таких зародышей играет важную роль в процессе закипания жидкости, находящейся в метастабильном состоянии [14, 15]. Поэтому глубокая очистка жидкости от газовых зародышей или введение их в жидкость в нужном объеме и с требуемыми размерами в ряде случаев позволяет задерживать вскипание жидкости и выдерживать метастабильные перегрузки, обусловленные понижением давления.

На основе экспериментальных исследований показано, что при периодическом тепловыделении на поверхностях, находящихся в жидком азоте (криогенной жидкости), характер вскипания жидкости существенно зависит от времени между импульсами тепловыде-

ления: при больших временах (более $10 \div 60$ с) и температурах, близких к температуре предельного перегрева жидкости, вскипание имеет гомогенный характер; при меньших временах и существенно меньших перепадах температур вследствие дезактивации парогазовых зародышей вскипание имеет гетерогенный характер. Теоретические оценки показывают, что критическая величина нестационарного теплового потока (при котором происходит переход к пленочному режиму кипения в нестационарных условиях) непосредственно зависит от перепада температур при вскипании жидкости [16].

В [17, 18] также на основе экспериментальных исследований установлено, что при пленочном течении дистиллированной воды в условиях нестационарного тепловыделения даже при достаточно больших плотностях теплового потока вскипание воды происходит на готовых центрах парообразования (имеет гетерогенный характер) вследствие наличия очень мелких газовых зародышей. Это оказывает существенное влияние на динамику кризисных явлений и критическую величину теплового потока в стекающей пленке воды при ступенчатом тепловыделении (принципиальное отличие от криогенных жидкостей, вскипание которых в данных условиях имеет гомогенный характер при достижении предельного перегрева жидкости). В работе [18] также показано, что при истечении воды из сосуда высокого давления через короткие каналы гомогенный характер вскипания наблюдается лишь при предельно больших перепадах давления, соответствующих существенно метастабильному состоянию.

1. Основные уравнения динамики одиночного газового зародыша в метастабильной жидкости. Пусть в жидкости с температурой T_0 , находящейся под давлением p_0 , имеется газовый зародыш радиусом a_0 . Будем полагать, что жидкость метастабильна, т. е. ее температура T_0 больше равновесной температуры $T_s(p_0)$ ($T_0 > T_s(p_0)$). Тогда при механическом и тепловом равновесии системы парогазовый пузырек — жидкость имеют место равенства

$$p_{v0} + p_{g0} = p_0 + 2\sigma/a_0; \quad (1.1)$$

$$p_{v0} = p_s(T_0), \quad (1.2)$$

где p_{v0} , p_{g0} — парциальное давление пара и газа в пузырьке соответственно; σ — поверхностное натяжение; нижний индекс 0 соответствует состоянию равновесия. Согласно (1.2) парциальное давление пара p_{v0} равно равновесному значению [19] для температуры жидкости T_0 без учета кривизны межфазной поверхности.

Рассмотрим радиально-симметричное движение системы в окрестности равновесного состояния, определяемого уравнениями (1.1), (1.2). Для этого запишем уравнение Рэлея — Лэмба

$$\rho_l^0 \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2}\dot{a}^2 + \frac{4\nu_l^{(\mu)}\dot{a}}{a} \right) = p_v + p_g - p_l - \frac{2\sigma}{a}, \quad (1.3)$$

где ρ_l^0 , p_l — плотность и давление жидкости; $\nu_l^{(\mu)}$ — кинематическая вязкость жидкости.

В дальнейшем парциальные давления пара p_v и газа p_g будем считать однородными и подчиняющимися уравнению Клапейрона — Менделеева

$$p_v = \rho_v^0 R_v T_v, \quad p_g = \rho_g^0 R_g T_g \quad (T_g = T_v). \quad (1.4)$$

Эти допущения означают, что в процессе фазовых переходов между паром и жидкостью диффузионное сопротивление газа в пузырьках несущественно. Массу газового зародыша m_g будем считать постоянной ($m_g = m_{g0}$). Тогда

$$\frac{4}{3}\pi a^3 \rho_g^0 = \frac{4}{3}\pi a_0^3 \rho_{g0}^0 = m_{g0}. \quad (1.5)$$

С учетом (1.5) выражение для давления (1.4) можно представить в виде

$$p_g = p_{g0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \frac{T_v}{T_0}. \quad (1.6)$$

Будем полагать, что парциальное давление пара p_v равно равновесному значению при температуре поверхности пузырька T_σ ($p_v = p_s(T_\sigma)$), которая в свою очередь равна температуре пузырька ($T_\sigma = T_v$).

В предположении, что состояние жидкости не является околоскритическим ($\rho_l^0 \gg \rho_v^0$), уравнение Клапейрона — Клаузиуса можно записать в виде

$$\frac{dp_v}{dT_v} = \frac{\rho_v^0 l}{T_v}. \quad (1.7)$$

Здесь l — удельная теплота фазовых переходов. Из (1.7) с учетом уравнения состояния пара (1.4) следует

$$p_v = p_* e^{-T^*/T_v} \quad (T_* = l/R_v), \quad (1.8)$$

где p_* — эмпирический параметр.

Считая, что растворимость газа в пузырьке очень низкая, запишем уравнение сохранения массы в пузырьке, полагая, что интенсивность испарения жидкости (или конденсации пара) определяется из условия теплового баланса

$$\frac{dm_v}{dt} = 4\pi a^2 \frac{\lambda_l}{l} \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_a, \quad m_v = \frac{4}{3} \pi a^3 \rho_v^0, \quad (1.9)$$

где λ_l — теплопроводность.

Для определения теплового потока на поверхности пузырька со стороны жидкости необходимо записать уравнение теплопроводности

$$\rho_l^0 c_l \left(\frac{\partial T_l}{\partial t} + w_l \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) = \lambda_l \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right) \quad (a < r < \infty) \quad (1.10)$$

и систему граничных условий

$$r = a: \quad T_l = T_v, \quad r = \infty: \quad T_l = T_\infty,$$

где c_l , w_l — теплоемкость и радиальная скорость жидкости.

2. Линейный анализ состояния одиночного пузырька. Пусть давление в жидкости p_l постоянное и равно исходному значению p_0 ($p_l = p_0$). Рассмотрим малые отклонения радиуса пузырька от исходного значения. Выражения для радиуса, давления пара и температуры представим в виде

$$a = a_0 + a', \quad p_v = p_{v0} + p'_v, \quad T_v = T_{v0} + T'_v, \quad T_l = T_0 + T'_l. \quad (2.1)$$

Линеаризуя систему (1.3), (1.9), (1.10), после ряда преобразований получаем

$$\rho_l^0 \left(a_0 \ddot{a} + \frac{4\nu_l^{(\mu)}}{a_0} \dot{a} \right) = (\rho_{v0}^0 l + p_{g0}) \frac{T_v}{T_0} + \left(\frac{2\sigma}{a_0} - 3p_{g0} \right) \frac{a}{a_0}, \quad \dot{a} = w; \quad (2.2)$$

$$\frac{3\dot{a}}{a_0} + \left(\frac{d \ln \rho_v^0(T_v)}{dT_\sigma} \right)_{T_0} \dot{T}_\sigma = \frac{3\lambda_l}{\rho_{v0}^0 l a_0} \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_{a_0}, \quad (2.3)$$

$$\rho_{v0}^0 = \frac{p_s(T_v)}{R_v T_{v0}}, \quad \left(\frac{d \ln \rho_v^0(T_v)}{dT_v} \right)_{T_0} \approx \frac{\rho_{v0}^0 l}{p_{v0}} \frac{1}{T_0};$$

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} = \nu_l^{(T)} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T_l}{\partial r} \right), \quad \nu_l^{(T)} = \frac{\lambda_l}{\rho_l^0 c_l}, \quad a_0 < r < \infty; \quad (2.4)$$

$$r = a_0: \quad T_l = T_v, \quad r = \infty: \quad T_l = 0. \quad (2.5)$$

Здесь и далее штрих, обозначающий возмущения параметров, опущен. Решение системы (2.2)–(2.5) будем искать в виде

$$a = A^{(a)} e^{\lambda t}, \quad w = A^{(w)} e^{\lambda t}, \quad T_v = A_v^{(T)} e^{\lambda t}, \quad T_l = A_l^{(T)}(r) e^{\lambda t}. \quad (2.6)$$

Тогда для амплитуды температуры жидкости вокруг пузырька на основе (2.4), (2.5) имеем

$$A_l^{(T)}(r) = A_v^{(T)} \frac{a}{r} \exp \left(y \left(1 - \frac{r}{a_0} \right) \right), \quad y = \left(\frac{a_0^2 \lambda}{\nu_l^{(T)}} \right)^{1/2}. \quad (2.7)$$

Используя это решение, на основе уравнений (2.2), (2.3) из условия существования нетривиального решения вида (2.6) получаем уравнение для определения λ

$$\psi(\lambda) = \rho_l^0 a_0^2 \lambda^2 + 4\rho_l^0 \nu_l^{(\mu)} \lambda + \frac{3\gamma p_{v0}(1 + p_{g0}/\rho_{v0}^0 l) y^2}{\gamma y^2 + \beta(1 + y)} + 3p_{g0} - \frac{2\sigma}{a_0} = 0, \quad (2.8)$$

$$\beta = 3(\gamma - 1) \left(\frac{c_v T_0}{l} \right)^2 \frac{\rho_l^0 c_l}{\rho_{v0}^0 c_v}, \quad c_v = \frac{\gamma R_v}{\gamma - 1},$$

где γ , c_v — показатель адиабаты и теплоемкость пара при постоянном давлении. Уравнение (2.8) имеет положительный корень λ , следовательно, пузырек неустойчив при условии

$$p_{g0} < 2\sigma/(3a_0). \quad (2.9)$$

Если парциальное давление газа в зародыше не удовлетворяет условию (2.9), то состояние пузырька является устойчивым. При этом значение корня, называемое инкрементом, определяет скорость развития неустойчивости на начальной линейной стадии. Существование положительного корня означает, что решение вида (2.6) является спонтанным [20].

Рассмотрим физический механизм данной неустойчивости. При выполнении условия (2.9) положительное возмущение радиуса пузырька при постоянном значении давления жидкости приводит к уменьшению давления пара и, следовательно, температуры на межфазной поверхности. Это в свою очередь обуславливает наличие теплового потока, который расходуется на испарение жидкости с поверхности пузырька, а значит, на его дальнейший рост. Аналогичные рассуждения можно провести для отрицательного возмущения радиуса, когда будет происходить схлопывание пузырька.

Амплитуды возмущений $A^{(a)}$, $A^{(w)}$, $A^{(T)}$ образуют однопараметрическое семейство. Задавая значение одной из них, значения остальных можно определить из линейной системы уравнений, следующей из (2.2), (2.3) после подстановки решений вида (2.6). Если в качестве независимой амплитуды принять $A^{(a)}$, то выражения для остальных амплитуд можно записать в виде

$$A^{(w)} = \lambda A^{(a)}, \quad \frac{A_v^{(T)}}{T_0} = -\frac{3\gamma p_{v0}}{\rho_{v0}^0 l} \frac{y^2}{\gamma y^2 + \beta(1 + y)} \frac{A^{(a)}}{a_0}. \quad (2.10)$$

На основе уравнения состояния (1.4) для газового зародыша в исходном состоянии с учетом (1.5) получаем

$$p_{g0} = m_{g0} R_g T_0 / (4\pi a_0^3 / 3). \quad (2.11)$$

В случае отсутствия газового зародыша в пузырьке ($m_{g0} = 0$, $p_{g0} = 0$) из условия (1.1) можно найти значение радиуса пузырька при заданных значениях давления жидкости p_0 и температуры перегретой жидкости T_0 ($T_0 > T_s(p_0)$):

$$a_0^{(M)} = \frac{2\sigma}{p_{v0} - p_0}, \quad p_{v0} = p_s(T_0). \quad (2.12)$$

Заметим, что данное значение радиуса $a_0^{(M)}$ соответствует критическому размеру парового пузырька в жидкости, вычисляемому по теории Гиббса [21], при образовании новой фазы. Из условия механического равновесия (1.1) следует, что в случае наличия газа в зародыше ($m_{g0} > 0$, $p_{g0} > 0$) радиус a_0 всегда меньше значения, определяемого выражением (2.12) ($a_0 < a_0^{(M)}$). Определим нижнее предельное значение радиуса a_0 зародышей в равновесном состоянии, в случае когда парогазовый пузырек неустойчив, т. е. выполняется условие (2.9). Очевидно, для этого радиуса помимо (1.1) должно выполняться условие

$$p_{g0} = 2\sigma/(3a_0). \quad (2.13)$$

Исключая из (1.1), (2.13) p_{g0} , находим выражение для минимального радиуса $a_0^{(m)}$ в виде

$$a_0^{(m)} = \frac{2}{3} a_0^{(M)} = \frac{4\sigma}{3(p_{v0} - p_0)}.$$

В то же время, используя выражения (2.11), (2.13), получаем формулу для критической массы газового зародыша

$$m_{g0}^* = \frac{128\pi\sigma^3}{81R_gT_0(p_{v0} - p_0)^2}, \quad p_{v0} = p_s(T_0). \quad (2.14)$$

На рис. 1 представлена зависимость критической массы m_{g0}^* пузырьков воздуха от температуры воды при различных значениях давления жидкости p_0 . Кривым 1–3 соответствуют максимальные значения температуры жидкости $T_0^* = 373, 450, 570$ К. Заметим, что выражение (2.14) можно интерпретировать как выражение для максимальной температуры жидкости T_0 , которая может быть достигнута, если масса газовых зародышей

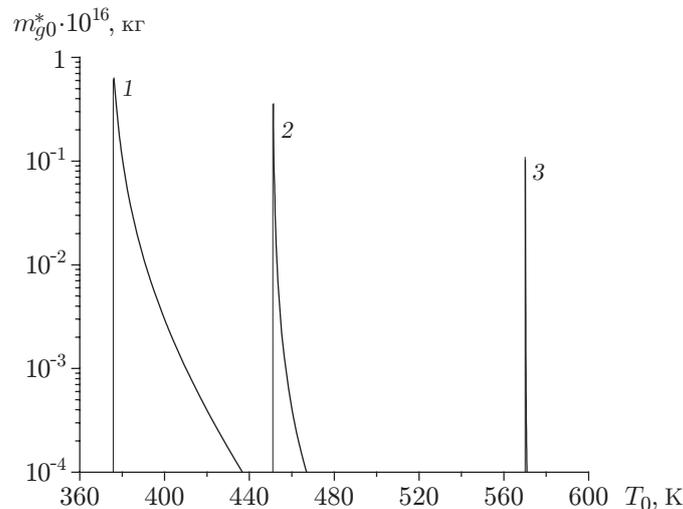


Рис. 1. Зависимость критической массы газового зародыша от температуры при различных значениях давления в жидкости:
1 — $p_0 = 0,1$ МПа; 2 — $p_0 = 1$ МПа; 3 — $p_0 = 10$ МПа

равна m_{g0}^* . Из рис. 1 следует, что с уменьшением массы зародышей увеличивается величина перегрева $\Delta T = T_0 - T_s(p_v)$, которая может быть достигнута в жидкости. Кроме того, разность давлений $p_{v0} - p_0$ характеризует способность жидкости выдерживать уменьшение давления до значения p_0 при температуре T_0 , являющейся равновесной температурой фазовых переходов при $p_{v0} = p_s(T_{v0})$. Чем меньше масса газового зародыша, тем больший перепад давления может выдержать жидкость до момента объемного закипания.

Подставляя выражение (2.11) в условие механического равновесия (1.1), получаем уравнение для определения равновесного радиуса a_0 при заданном значении массы m_{g0} газового зародыша:

$$f(a_0) = (p_0 - p_{v0})a_0^3 + 2\sigma a_0^2 - 3m_{g0}R_gT_0/(4\pi) = 0. \quad (2.15)$$

В случае недогретой жидкости ($p_{v0} < p_0$) это уравнение имеет единственный положительный корень при любом значении m_{g0} . Из анализа уравнения (2.15) следует, что при любом значении $m_{g0} > 0$ для перегретой жидкости ($p_{v0} > p_0$) оно имеет один отрицательный корень, лишенный физического смысла. Кроме того, при $0 < m_{g0} < m_{g0}^*$ уравнение (2.15) имеет два положительных корня $a_0^{(m)} < a_{01} < a_0^{(M)}$ и $0 < a_{02} < a_0^{(m)}$, причем при большем значении радиуса a_{01} система пузырьков — жидкость неустойчива, а при меньшем значении радиуса a_{02} устойчива.

На рис. 2 представлена зависимость равновесного радиуса парогазового пузырька (зародыша) от его массы, полученная с использованием уравнения (2.15) для перегретой воды при $p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К. Далее во всех случаях, за исключением оговоренных особо, рассматривается перегретая вода при указанных параметрах. Из формулы (2.14) для критической массы зародыша воздуха ($R_g = 287$ Дж/(кг · К)) получаем значение $m_{g0}^* = 6,7 \cdot 10^{-17}$ кг. В случае когда масса зародыша газа равна нулю ($m_{g0} = 0$), максимальное значение равновесного радиуса $a_0^{(M)}$ составляет 10^{-5} м. При этом верхней ветви кривой зависимости радиуса от массы газового зародыша соответствует неустойчивое состояние равновесия парогазового пузырька, нижней ветви — устойчивое состояние.

На рис. 3 представлена зависимость инкремента (положительного корня уравнения (2.8)), соответствующего верхней ветви зависимости, представленной на рис. 2, от массы газового зародыша. Нижней ветви кривой на рис. 2 соответствуют комплексно-сопряженные корни уравнения (2.8), отвечающие устойчивым состояниям зародышей.

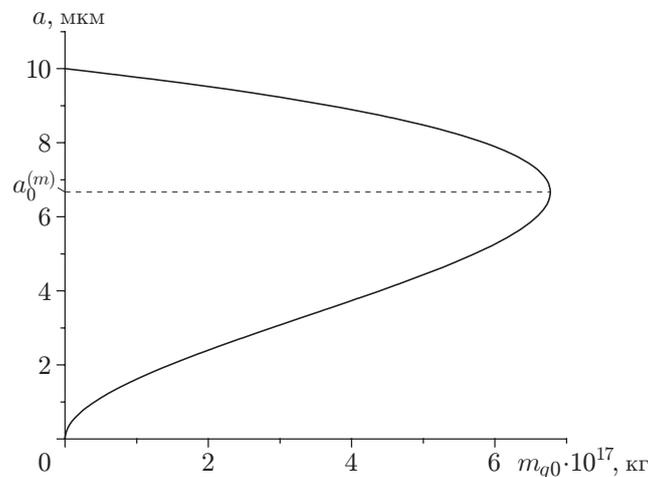


Рис. 2. Зависимость равновесного радиуса от массы газового зародыша в перегретой воде при $p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К

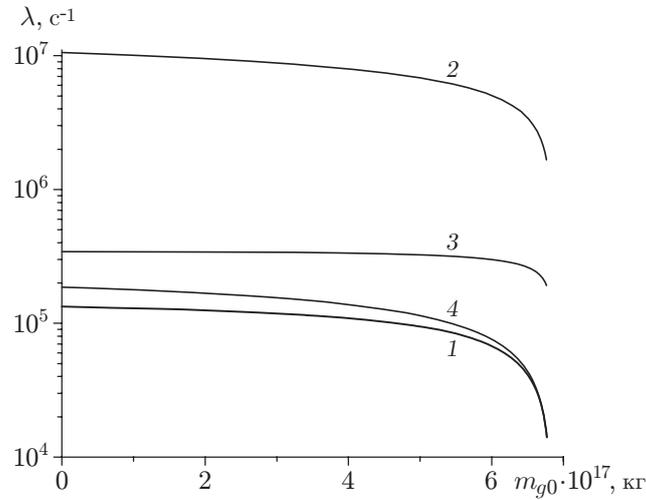


Рис. 3. Зависимость инкрементов неустойчивых равновесных радиусов от массы газового зародыша при $p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К:
 1 — общее решение уравнения (2.8), 2–4 — решения уравнения (2.8) (2 — с учетом вязкости, 3 — с учетом радиальной инерции, 4 — с учетом тепломассообмена)

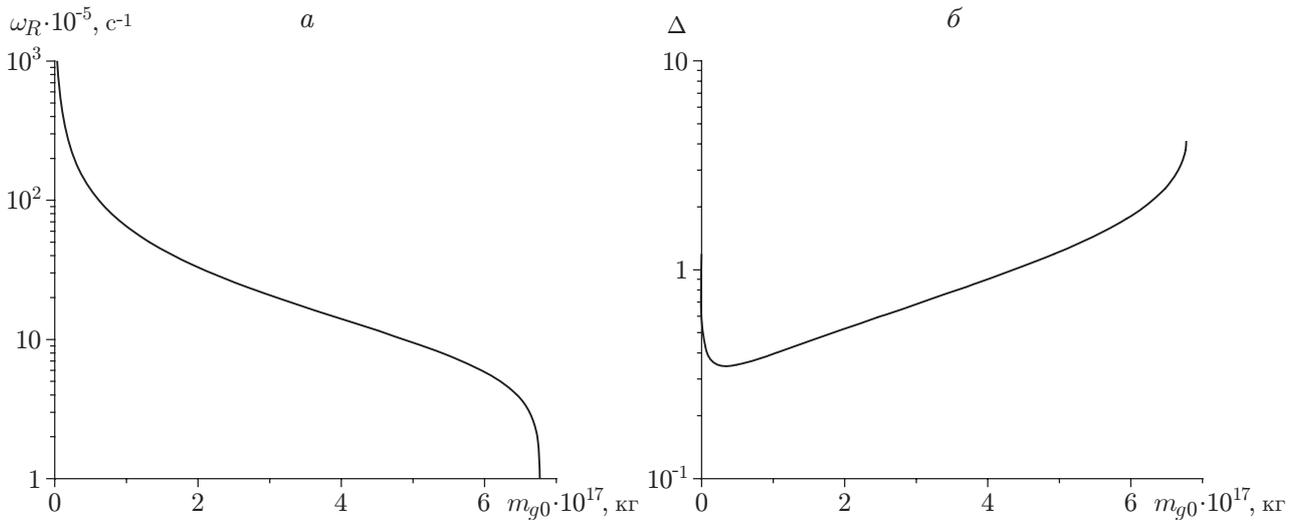


Рис. 4. Зависимости собственной частоты колебаний (*a*) и декремента затухания (*б*) для устойчивых радиусов от массы газа в зародышах при $p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К

На рис. 4 представлены зависимости собственной частоты колебаний $\omega_R = \text{Im}(\lambda)$ и декремента затухания $\Delta = -2\pi \text{Re}(\lambda) / \text{Im}(\lambda)$ от массы зародышей.

В левой части уравнения (2.8) первое, второе и третье слагаемые учитывают влияние радиальной инерции, вязкости жидкости и межфазного тепломассопереноса на развитие неустойчивости на линейной стадии, когда радиус приближенно равен равновесному значению. Если предположить, что развитие неустойчивости ограничено радиальной инерцией, то, пренебрегая вторым и третьим слагаемыми в (2.8), получаем

$$\lambda^{(R)} = \sqrt{\frac{2\sigma/a_0 - 3p_{g0}}{\rho_l^0 a_0^2}}. \quad (2.16)$$

Аналогично, если фактором, ограничивающим развитие неустойчивости, является вязкость жидкости или межфазный тепломассоперенос, из (2.8) находим

$$\lambda^{(\mu)} = \frac{2\sigma/a_0 - 3p_{g0}}{4\mu_l}, \quad \mu_l = \rho_l^0 \nu_l^{(\mu)} \quad (2.17)$$

или

$$\lambda^{(T)} = \frac{y^2 \nu_l^{(T)}}{a_0^2}, \quad y = \frac{\beta A + \sqrt{\beta^2 A^2 + 4\beta A(1 - \gamma A)}}{2(1 - \gamma A)}, \quad A = \frac{2\sigma/a_0 - 3p_{g0}}{3\gamma p_{v0}(1 + p_{g0}/\rho_{v0}^0 l)}. \quad (2.18)$$

На рис. 3 кривые 2, 3, 4 получены по формулам (2.16), (2.17), (2.18) соответственно.

3. Нелинейная стадия развития неустойчивости парогазового пузырька.

Пусть давление жидкости постоянное: $p_l = p_0$, исходный радиус a_0 , давление пара p_{v0} и газа p_{g0} удовлетворяют условиям равновесия (1.1), (1.2). Рассмотрим нелинейные радиальные движения пузырька, полагая, что парциальное давление пара в пузырьке остается постоянным. Этот предельный случай соответствует бесконечно большому значению теплопроводности жидкости ($\lambda_l \rightarrow \infty$), когда перегрев (или охлаждение) за счет тепловых эффектов фазовых переходов вблизи межфазной поверхности мгновенно исчезает. Влиянием вязкости также будем пренебрегать. Тогда уравнение Рэлея — Лэмба

$$\rho_l^0 \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) = 2\sigma \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a} \right) + p_{g0} \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^3 - 1 \right) \quad (3.1)$$

можно представить в виде

$$\frac{d}{da} (a^3 \dot{a}^2) = \frac{4\sigma a^2}{\rho_l^0} \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a} \right) + \frac{2p_{g0}}{\rho_l^0} a^2 \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^3 - 1 \right). \quad (3.2)$$

Из выражения (3.2) следует интеграл энергии

$$a^3 \dot{a}^2 = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\rho_l^0 a_0} (2a^3 - 3a_0 a^2 + a_0^3) + \frac{2p_{g0} a_0^3}{\rho_l^0} \left(\ln \frac{a}{a_0} + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \right) \right), \quad (3.3)$$

согласованный с условием равновесия $\dot{a} = 0$ при $a = a_0$. Из уравнения (3.3) для изменения радиуса получаем выражение

$$t = \int_{a^{(0)}}^a \frac{da}{\pm \sqrt{f^{(R)}(a)}}, \quad (3.4)$$

$$f^{(R)}(a) = \frac{2}{3} \frac{\sigma}{\rho_l^0 a_0} \left(2 - 3 \frac{a_0}{a} + \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \right) + \frac{2p_{g0}}{\rho_l^0} \left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \left(\ln \frac{a}{a_0} + \frac{1}{3} \left(1 - \left(\frac{a}{a_0} \right)^3 \right) \right).$$

Здесь $a = a^{(0)}$ — значение радиуса, которому соответствует начало отсчета времени ($t = 0$). Согласно (3.4) исходный радиус $a = a_0$ может достигаться при $t \rightarrow -\infty$. Следовательно, это решение является спонтанным, обобщающим решение (2.6) и соответствует нелинейной стадии развития неустойчивости. В случае если определяющим фактором развития неустойчивости является вязкость жидкости, из (2.2), пренебрегая влиянием радиальной инерции, а также полагая $p_v = p_{v0}$, получаем

$$t = 4\mu_l \int_{a^{(0)}}^a \frac{da}{f^{(\mu)}(a)}, \quad f^{(\mu)} = 2\sigma \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a} \right) + p_{g0} a \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^3 - 1 \right). \quad (3.5)$$

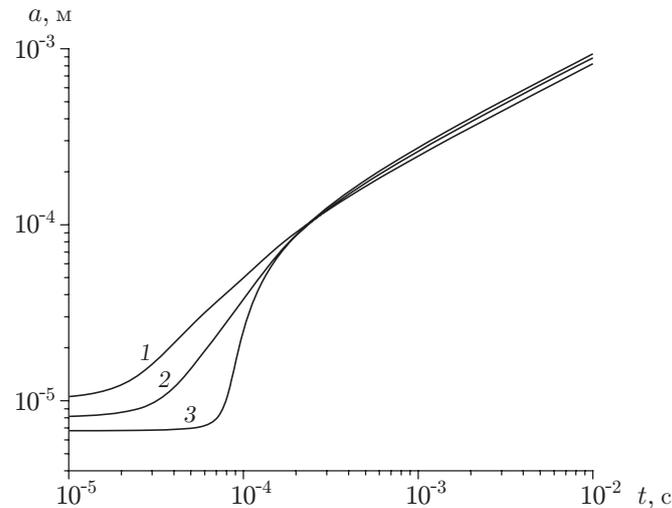


Рис. 5. Динамика роста газовых зародышей в перегретой жидкости при $p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К:

1 — $m_{g0} = 0$; 2 — $m_{g0} = 6 \cdot 10^{-17}$ кг; 3 — $m_{g0} = 6,7 \cdot 10^{-17}$ кг

В пренебрежении влиянием радиальной инерции и вязкости жидкости из уравнений (1.3), (1.6), (1.9) находим

$$\frac{3\dot{a}}{a} + \left(\frac{d \ln \rho_v^0}{dT_v} \right) \dot{T}_v = \frac{3\lambda_l \text{Nu}}{2\rho_v^0 l a^2} (T_0 - T_v), \quad \rho_v^0 = \frac{p_s(T_v)}{R_v T_v}, \quad \text{Nu} = -\frac{2a}{T_0 - T_v} \left(\frac{\partial T_l}{\partial r} \right)_a; \quad (3.6)$$

$$p_s(T_v) - p_s(T_0) + p_{g0} \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^3 \frac{T_v}{T_0} - 1 \right) + 2\sigma \left(\frac{1}{a_0} - \frac{1}{a} \right) = 0. \quad (3.7)$$

На рис. 5 показана динамика роста радиуса пузырька в перегретой воде при различных значениях массы газовых зародышей. Решения получены с использованием полной системы уравнений (3.4)–(3.7). Из рис. 5 следует, что влияние массы зародыша является существенным в основном на начальном этапе роста пузырьков, при этом чем меньше масса газа в зародыше (следовательно, чем меньше начальный равновесный радиус), тем меньше скорость роста. В дальнейшем скорость роста мелких зародышей (но с большой массой) становится больше скорости роста крупных пузырьков. При $t \rightarrow -\infty$ исходное равновесное состояние для системы уравнений (3.4)–(3.7) является особой точкой. Для описания выхода из этого состояния при $0 \leq m_{g0} < m_{g0}^*$ использовались решения вида (2.6) (решение для случая $m_{g0} = m_{g0}^*$ приведено ниже). После нахождения величины инкремента (корня уравнения (2.8)) задавалось возмущение радиуса пузырька $A^{(a)} = 10^{-2} a_0$. Затем для заданного значения $A^{(a)}$ по формулам (2.10) определялись возмущения $A^{(w)}$ и $A^{(T)}$. Эти величины использовались для задания начальных (при $t = 0$) данных задачи Коши для исходной нелинейной системы уравнений. При этом для числа Нуссельта на начальном этапе использовалось значение, вычисленное по формуле

$$\text{Nu} = 2 \left(1 + \sqrt{a_0^2 \lambda / \nu_l^{(T)}} \right), \quad (3.8)$$

следующей из выражения (3.6) с учетом решения вида (2.6). На нелинейной стадии развития неустойчивости решение (3.8) срачивалось с аппроксимацией Д. А. Лабунцова

$$\text{Nu} = 2 + \left(\frac{6 \text{Ja}}{\pi} \right)^{1/3} + \frac{12 \text{Ja}}{\pi}, \quad \text{Ja} = \frac{\rho_l^0}{\rho_v^0} \frac{c_l (T_l - T_v)}{l} \quad (3.9)$$

(Ja — число Якоба), полученной на основе решения Скрайвена [22].

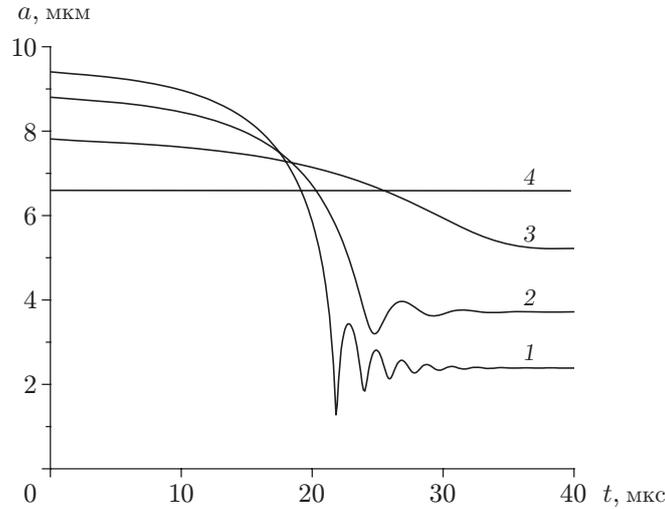


Рис. 6. Динамика перехода пузырьков из неустойчивого состояния в устойчивое в перегретой воде при $p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К:
 1 — $m_{g0} = 2 \cdot 10^{-17}$ кг; 2 — $m_{g0} = 4 \cdot 10^{-17}$ кг; 3 — $m_{g0} = 6 \cdot 10^{-17}$ кг; 4 — $m_{g0} = 6,7 \cdot 10^{-17}$ кг

На рис. 6 приведены численные решения системы (3.4)–(3.7) для радиуса, соответствующие переходу пузырьков из неустойчивого состояния (радиус a_{01}) в устойчивое состояние (радиус a_{02}).

Таким образом, если масса газового зародыша удовлетворяет условию $m_{g0} < m_{g0}^*$, где m_{g0}^* определяется из выражения (2.14), то для перегретой жидкости ($p_s(T_0) > p_0$) существует два равновесных состояния, которым соответствуют два значения радиуса парогазового пузырька. При этом состояние равновесия, соответствующее меньшему значению радиуса, устойчиво. Если состояние равновесия неустойчиво, что соответствует большему значению равновесного радиуса a_{01} , определяемому выражением (2.15), то в зависимости от знака возмущения радиуса $A^{(a)}$ пузырек может неограниченно расти ($A^{(a)} > 0$) или схлопываться ($A^{(a)} < 0$) до меньшего значения радиуса, соответствующего устойчивому состоянию.

Если масса m_{g0} газового зародыша равна m_{g0}^* ($m_{g0} = m_{g0}^*$), то значения двух равновесных радиусов a_{01} и a_{02} вырождаются в одно значение. Рассмотрим случай, когда поведение пузырька, радиус которого приближенно равен равновесному радиусу, описывается уравнением Рэлея — Лэмба. При этом уравнение (3.1) при $m_{g0} = m_{g0}^*$ (или $p_{g0} = 2\sigma/(3a_0)$) записывается в виде

$$\rho_l^0 \left(a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 \right) = \frac{2\sigma}{a_0} \left(1 - \frac{a_0}{a} + \frac{1}{3} \left(\left(\frac{a_0}{a} \right)^3 - 1 \right) \right). \quad (3.10)$$

Для уравнения (3.10) интеграл энергии, аналогичный интегралу (3.3), имеет вид

$$a^3 \dot{a}^2 = \frac{4\sigma}{\rho_l^0 a_0} \left(\frac{2}{9} (a^3 - a_0^3) - \frac{1}{2} a_0 (a^2 - a_0^2) + \frac{a_0^3}{3} \ln \frac{a}{a_0} \right). \quad (3.11)$$

Проведем анализ этого уравнения в окрестности состояния равновесия ($\dot{a} = 0$ и $a = a_0$). Полагая $a = a_0 + a'$ и $|a'| \ll a_0$, из (3.1) получаем

$$\dot{a}^2 = \frac{4\sigma}{3\rho_l^0 a_0^4} a^3. \quad (3.12)$$

Левая часть этого уравнения всегда положительная. Для того чтобы правая часть также была положительной, возмущение радиуса должно быть больше нуля ($a > 0$). Нарушение этого состояния равновесия системы возможно лишь при увеличении радиуса пузырька. Решение уравнения (3.12) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{a^{(0)}}} - \frac{1}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{\sigma}{3\rho_l^0}} \frac{t}{a_0^2}, \quad (3.13)$$

где $a^{(0)}$ — возмущение радиуса, которому соответствует начало отсчета времени ($t = 0$).

Если фактором, ограничивающим развитие неустойчивости, является вязкость жидкости, то с учетом допущения, использованного при получении (3.2) на основе уравнения (1.3), для описания радиального движения вблизи равновесного состояния получаем уравнение

$$\frac{da}{dt} = \frac{\sigma}{2\mu_l} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2, \quad (3.14)$$

из которого следует решение, аналогичное (3.13):

$$\frac{1}{a^{(0)}} - \frac{1}{a} = \frac{\sigma t}{2\mu_l a_0^2}. \quad (3.15)$$

В предположении, что основным механизмом, тормозящим развитие неустойчивости, является межфазный тепломассоперенос, уравнение, аналогичное (3.14), имеет вид

$$\frac{da}{dt} = \frac{8}{9} \frac{\beta}{\gamma} \frac{\nu_l}{a_0} \left(\frac{a}{a_0}\right)^2. \quad (3.16)$$

Таким образом, в рассмотренных двух случаях характер развития неустойчивости (характер зависимости возмущения радиуса от времени) один и тот же, если ограничивающим фактором является вязкость жидкости. Из уравнений (3.15), (3.16) можно получить выражение для эффективной вязкости

$$\mu_l^{(eff)} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 \frac{\gamma}{\beta} \frac{a_0}{\nu_l} \sigma.$$

Заметим также, что согласно уравнениям (3.14), (3.16) при $m_{g0} = m_{g0}^*$ нарушение начального равновесного состояния может происходить лишь при увеличении радиуса пузырьков ($\dot{a} > 0$). Асимптотические решения (3.13), (3.15) использовались для задания начальных данных задачи Коши для системы нелинейных уравнений в случае $m_{g0} = m_{g0}^*$.

4. Развитие неустойчивости для жидкости с распределенными по объему зародышами. Из результатов проведенного выше анализа следует, что радиус неустойчивого одиночного парогазового пузырька неограниченно увеличивается. В этом случае перегрев жидкости на бесконечности (где температура полагалась постоянной) относительно равновесной температуры, соответствующей текущим значениям давления пара в пузырьке ($T_0 > T_s(p_v)$), обеспечивает расход тепла на парообразование. Для жидкости с распределенными по объему парогазовыми зародышами объем (или масса) жидкости, приходящийся на один зародыш, ограничен. Следовательно, при адиабатическом процессе с увеличением массы парогазовых пузырьков во всей парогазожидкостной системе температура жидкости будет уменьшаться вследствие затрат тепла на парообразование. В этом случае условие постоянства температуры на бесконечности следует заменить условием адиабатичности ячейки [19, 23]. Состояние равновесия мелкодисперсной парогазожидкостной пузырьковой смеси определяется давлением в жидкости, объемной долей α_v и радиусом a пузырьков, а также массой газа в зародышах (или парциальным давлением

газа в зародыше). Давление пара, газа и жидкости, радиус, масса газового зародыша, а также температура связаны соотношением

$$p_l = p_v + p_g - \frac{2\sigma}{a}, \quad p_g = \frac{m_{g0}R_gT}{(4\pi/3)a^3}, \quad T = T_s(p_v). \quad (4.1)$$

Дифференцируя это выражение с учетом уравнения Клапейрона — Клаузиуса (1.7), получаем

$$dp_l = (\rho_v^0 l + p_g) \frac{dT}{T} + \left(\frac{2\sigma}{a} - 3p_g \right) \frac{da}{a}. \quad (4.2)$$

Пусть число зародышей в единице объема в исходном состоянии равно n_0 . Тогда, считая объемы зародышей пренебрежимо малыми по сравнению с общим объемом ячейки, для массы ячейки m_b , приходящейся на один зародыш, можно записать выражение

$$m_b = \rho_l^0 / n_0. \quad (4.3)$$

Полагая, что при равновесном процессе число зародышей, отнесенных к единице массы парогазожидкостной смеси, не меняется, имеем

$$\frac{n_0}{\rho_l^0} = \frac{n}{\rho}, \quad \rho = \rho_l^0(1 - \alpha_v) + \rho_v^0\alpha_v + \rho_g\alpha_v. \quad (4.4)$$

Здесь ρ — средняя плотность системы жидкость — парогазовый пузырек.

Далее при определении средней плотности пузырьковой смеси массой пузырьков будем пренебрегать $((\rho_v^0 + \rho_g^0)\alpha_v \ll \rho_l^0(1 - \alpha_v))$. Тогда с учетом (4.3) из выражения (4.4) следует

$$\frac{1}{m_b} = \frac{n}{\rho_l^0(1 - \alpha_v)}. \quad (4.5)$$

В то же время из условия адиабатичности ячейки с учетом того, что масса пузырьков пара увеличивается только за счет отбора тепла от жидкости, получаем условие баланса тепла

$$m_b c_l dT = -l dm_v, \quad m_v = (4\pi/3)a^3 \rho_v^0. \quad (4.6)$$

Подставляя выражение для dT в (4.2) и учитывая, что $m_v \ll m_l$, имеем

$$dp_l = \left[\frac{2\sigma}{a} - 3p_g - 3\rho_l^0 C_L^2 \left(1 + \frac{p_g}{\rho_v^0 l} \right) \frac{\alpha_v}{(1 - \alpha_v)^2} \right] \frac{da}{a}, \quad (4.7)$$

где $C_L = (\rho_v^0 / \rho_l^0) l / \sqrt{c_l T}$ — скорость звука Ландау для кипящей жидкости при малой объемной доле пузырьков [24]. Для того чтобы равновесная парогазожидкостная пузырьковая смесь была устойчивой [25], выражение в квадратных скобках в правой части (4.7) должно быть отрицательным. Только в этом случае при сжатии ($da < 0$) давление p_l будет повышаться ($dp_l > 0$). Для радиуса, объемной доли пузырьков и парциального давления газа получаем условие устойчивости

$$p_g + \rho_l^0 C_L^2 \left(1 + \frac{p_g}{\rho_v^0 l} \right) \frac{\alpha_v}{(1 - \alpha_v)^2} > \frac{2\sigma}{3a}. \quad (4.8)$$

В частности, для пузырьков в исходном состоянии при $\alpha_{v0} \ll 1$ из (4.8) следует

$$p_{g0} + \rho_l^0 C_L^2 \left(1 + \frac{p_{g0}}{\rho_v^0 l} \right) \alpha_{v0} > \frac{2\sigma}{3a_0}. \quad (4.9)$$

Данное условие является обобщением (2.9), а также критерия устойчивости парожидкостной пузырьковой смеси, полученного в [23] на основе анализа дисперсионного уравнения.

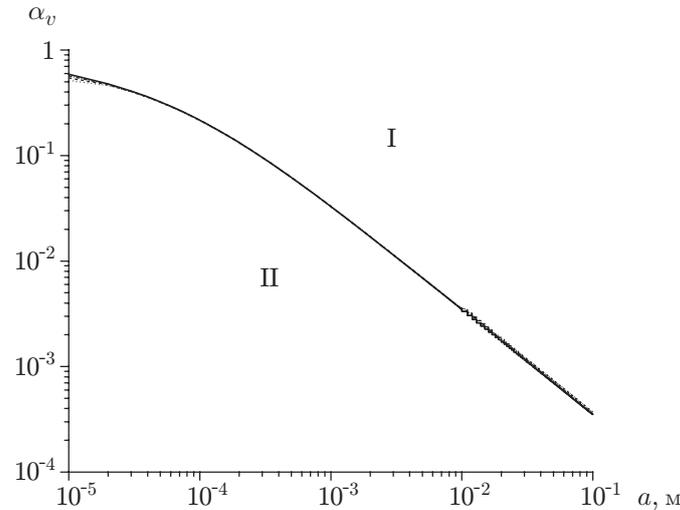


Рис. 7. Граница между областью I, где перегретая пузырьковая парогазожидкостная смесь ($p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К) устойчива, и областью II, где она неустойчива

На рис. 7 область значений объемной доли и радиуса пузырьков, расположенная выше кривой зависимости $\alpha_v(a)$, соответствует устойчивым состояниям при $p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К. Заметим также, что все кривые, соответствующие значениям масс зародышей в диапазоне $0 < m_{g0} < m_{g0}^*$, совпадают с этой кривой.

Если для исходного состояния не будет выполняться условие устойчивости (4.8), то, так же как и в случае одиночного пузырька, возможны два сценария развития неустойчивости. Согласно первому сценарию система может перейти в новое состояние с более мелкими пузырьками, так чтобы выполнялось условие (4.8). При этом парциальное давление газа p_g (первое слагаемое в левой части (4.8)) увеличится. Заметим, что такое устойчивое состояние в предельном случае соответствует нижней ветви решения уравнения (2.15) для одиночного пузырька. Согласно второму сценарию за счет испарения жидкости увеличиваются радиус и объемная доля пузырьков. В этом случае устойчивость будет определяться вторым слагаемым в левой части условия (4.8). При этом тепло, расходуемое на испарение, поступает из жидкости.

Выведем уравнение, связывающее начальное неустойчивое состояние (параметры с индексом 0) с конечным равновесным устойчивым состоянием (параметры с индексом e). Пусть начальное равновесное состояние жидкости с парогазовыми пузырьками определяется давлением $p_l = p_0$, радиусом a_0 и числом зародышей n_0 в единице объема. При этом масса жидкости в ячейке, приходящейся на один зародыш, определяется соотношением (4.3).

Запишем условие баланса тепла для начального и конечного равновесных состояний системы с учетом (1.4) и (1.8):

$$m_b c_l R_v (T_0 - T_e) = \frac{4\pi}{3} l \left(\frac{a_e^3 p_{ve}}{T_e} - \frac{a_0^3 p_{v0}}{T_0} \right), \quad T_0 = T_s(p_{v0}), \quad T_e = T_s(p_{ve}). \quad (4.10)$$

Согласно условию изобаричности ($p_l = p_0$) справедливы уравнения механического равновесия

$$p_{ve} + p_{ge} - \frac{2\sigma}{a_e} = p_{v0} + p_{g0} - \frac{2\sigma}{a_0}, \quad p_{ve} = p_s(T_e). \quad (4.11)$$

С использованием (1.6), (2.11) для конечного равновесного давления p_{ge} можно записать соотношение

$$p_{ge} = p_{g0} \left(\frac{a_0}{a_e} \right)^3 \frac{T_e}{T_0}, \quad p_{g0} = \frac{m_{g0} R_g T_0}{(4\pi/3) a_0^3}. \quad (4.12)$$

Уравнения (4.10)–(4.12) позволяют однозначно определить параметры системы a_e, p_{ve}, T_e , соответствующие конечному термодинамически устойчивому равновесному состоянию, по значениям параметров $a_0, p_{v0}, T_0, n_0, m_{g0}$, соответствующим исходному неустойчивому состоянию. При этом массовая и объемная доли пара в конечном состоянии определяются по формулам

$$x_e - x_0 = \frac{c_l(T_e - T_0)}{l}, \quad \frac{\alpha_{ve}}{1 - \alpha_{ve}} = \frac{\rho_l^0}{\rho_{v0}^0} x_e, \quad \rho_{ve}^0 = \frac{p_{ve}}{R_v T_s(p_{ve})}.$$

5. Переход перегретой жидкости с газовыми зародышами в устойчивое состояние. Теоретические результаты, полученные в п. 3 для одиночного пузырька, можно обобщить на случай жидкости с парогазовыми пузырьками. При этом все уравнения, кроме (3.6), остаются такими же, как в случае одиночного пузырька. В уравнении (3.6) постоянное значение температуры T_0 следует заменить значением T_l , следующим из уравнения теплового баланса (4.6), записанного в виде

$$T_0 - T_l = \frac{(4\pi/3)l}{m_b c_l R_v} \left(\frac{a^3 p_v(T_v)}{T_v} - \frac{a_{01}^3 p_s(T_v)}{T_0} \right).$$

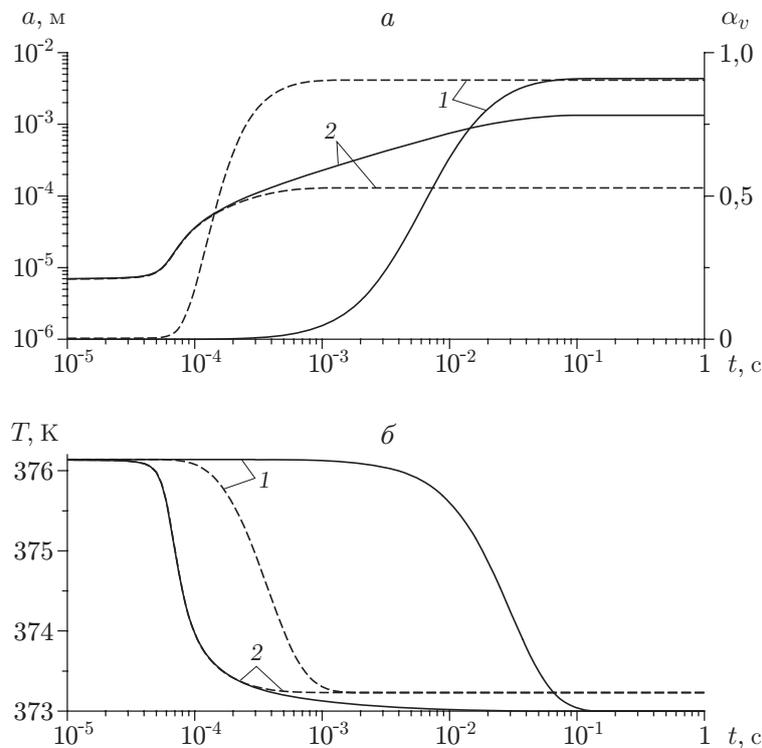


Рис. 8. Влияние числа зародышей на динамику выхода системы из метастабильного состояния:

a — зависимости радиуса пузырьков (1) и объемной доли пара (2) от времени, b — зависимости температуры жидкости (1) и пара (2) от времени; сплошные линии — $n_0 = 10^9 \text{ м}^{-3}$, штриховые — $n_0 = 10^{12} \text{ м}^{-3}$

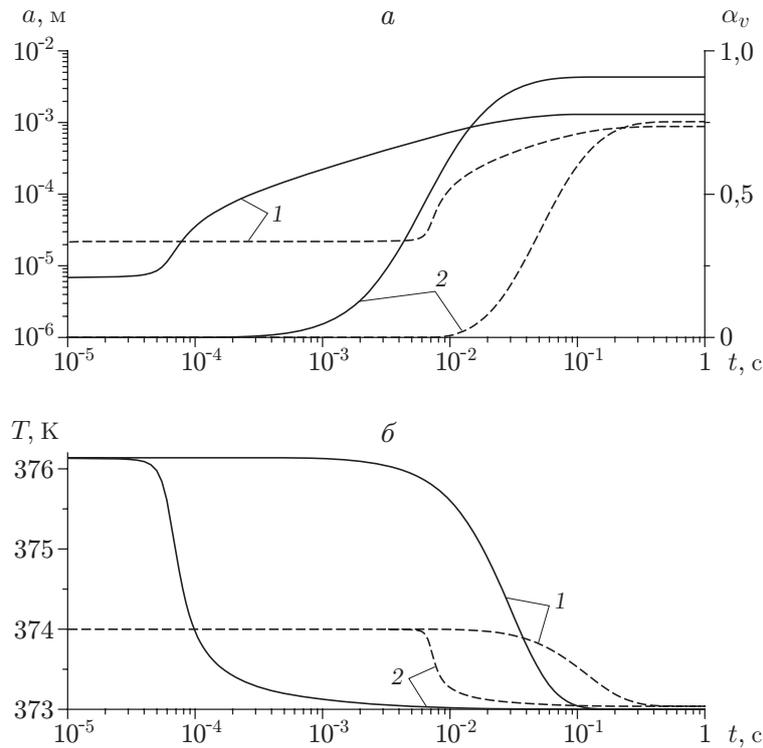


Рис. 9. Влияние начальной температуры перегретой воды на скорость перехода системы в равновесное парожидкостное состояние:

a — зависимости радиуса пузырьков (1) и объемной доли пара (2) от времени, b — зависимости температуры жидкости (1) и пара (2) от времени; сплошные линии — $p_{v0} = 0,11$ МПа, $T_0 = 376,14$ К, $m_{g0}^* = 6,7 \cdot 10^{-17}$ кг, штриховые — $p_{v0} = 1,036$ МПа, $T_0 = 374$ К, $m_{g0}^* = 7,2 \cdot 10^{-17}$ кг

Для полученной системы дифференциальных уравнений исходное неустойчивое и конечное состояния, связанные уравнениями (4.11), (4.12), являются особыми точками. Поэтому для построения решения, соединяющего эти особые точки, необходимо получить решение, аналогичное (2.6). Далее это решение используется при задании начальных данных задачи Коши для исходной нелинейной системы.

На рис. 8 показана динамика перехода перегретой жидкости ($p_0 = 0,1$ МПа, $p_{v0} = 0,11$ МПа) в двухфазное состояние в зависимости от объемной плотности газовых зародышей. Видно, что увеличение числа зародышей приводит к уменьшению времени выхода системы из метастабильного состояния.

На рис. 9 показано влияние величины перегрева воды на скорость перехода системы в двухфазное состояние при $p_0 = 0,1$ МПа, $n_0 = 10^9$ м $^{-3}$. Видно, что более перегретая вода быстрее выходит из метастабильного состояния.

Заключение. В работе показано, что перегретая жидкость, содержащая зародыши с нерастворимым газом, может находиться в термодинамическом и механическом равновесии, если масса зародыша меньше некоторого критического значения, зависящего от величины перегрева.

При массе газа в зародыше, меньшей критического значения, существует два значения равновесного радиуса. При этом большему значению радиуса соответствует неустойчивое состояние жидкости, меньшему — устойчивое состояние.

На основе построенной теории спонтанных решений установлено, что если исходное состояние неустойчивое, то возможны два сценария перехода в устойчивое состояние. Согласно первому сценарию система переходит в состояние, соответствующее меньшему значению равновесного радиуса при заданной массе зародыша, согласно второму сценарию система переходит в парогазожидкостное состояние, при котором происходит объемное закипание, сопровождающееся понижением температуры вследствие затрат на дополнительное парообразование.

Если масса газового зародыша равна критическому значению, то два значения равновесных радиусов вырождаются в одно. В этом случае система может переходить лишь в парогазожидкостное устойчивое состояние с большей массовой долей пара за счет понижения температуры жидкости.

Анализ приведенных выше результатов позволяет сделать вывод, что, добавляя в очищенную от примесей жидкость плохо растворимый газ, можно управлять процессом объемного закипания при значении давления, меньшем равновесного значения давления фазового перехода для исходной температуры жидкости.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Tyrrell J. W. G., Attard P.** Images of nanobubbles on hydrophobic surfaces and their interactions // *Phys. Rev. Lett.* 2001. V. 87, N 17. 176104.
2. **Zhang X. H., Quinn A., Ducker W. A.** Nanobubbles at the interface between water and a hydrophobic solid // *Langmuir.* 2008. V. 24, N 9. P. 4756–4764.
3. **Ducker W. A.** Contact angle and stability of interfacial nanobubbles // *Langmuir.* 2009. V. 25, N 16. P. 8907–8910.
4. **Zhang L., Zhang X., Fan C., et al.** Nanoscale multiple gaseous layers on a hydrophobic surface // *Langmuir.* 2009. V. 25, N 16. P. 8860–8864.
5. **Wang Y., Bhushan B., Zhao X.** Improved nanobubble immobility induced by surface structures on hydrophobic surfaces // *Langmuir.* 2009. V. 25, N 16. P. 9328–9336.
6. **Wallqvist V., Claesson P. M., Swerin A., et al.** Influence of surface topography on adhesive and long-range capillary forces between hydrophobic surfaces in water // *Langmuir.* 2009. V. 25, N 16. P. 9197–9207.
7. **Сетте Д.** Исследование зародышей кавитации // *Подводная акустика.* М.: Мир, 1970. С. 195–221.
8. **Yount D. E., Gillary E. W., Hoffman D. C.** A microscopic investigation of bubble formation nuclei // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1984. V. 76, N 5. P. 1511–1521.
9. **Fox F. E., Herzfeld K. F.** Gas bubbles with organic skin as cavitation nuclei // *J. Acoust. Soc. Amer.* 1954. V. 26, N 6. P. 984–989.
10. **Сиротюк М. К.** Стабилизация газовых пузырьков в воде // *Тр. Акуст. ин-та.* 1971. Вып. 14. С. 112–127.
11. **Гаврилов Р. Л.** Содержание свободного газа в жидкостях и методы его измерения // *Физика и техника мощного ультразвука, физические основы ультразвуковой технологии.* М.: Наука, 1970. Ч. 4. С. 395–426.
12. **Бесов А. С., Кедринский В. К., Пальчиков Е. И.** Изучение начальной стадии кавитации с помощью дифракционной оптической методики // *Письма в ЖТФ.* 1984. Т. 10, вып. 4. С. 240–244.
13. **Кедринский В. К.** Гидродинамика взрыва: эксперимент и модели. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

14. **Edwards A. R., O'Brien T. R.** Studies on phenomena connected with depressurization of water reactors // J. Brit. Nuclear Energy Soc. 1970. V. 9, N 2. P. 125–135.
15. **Исаев О. А., Павлов П. А.** Вскипание жидкости в большом объеме при быстром сбросе давления // Теплофизика высоких температур. 1980. Т. 18, № 4. С. 812–818.
16. **Pavlenko A. N., Chekhovich V. Yu.** Interconnection between dynamics of liquid boiling-up and heat transfer crisis for nonstationary heat release // J. Engng Thermophys. 2007. V. 16, N 3. P. 175–187.
17. **Pavlenko A. N., Surtaev A. S., Tsoi A. N.** Transient heat transfer and development of crisis phenomena in falling liquid films at non-steady heat generation // Proc. of the ECI 8th Intern. conf. on boiling and condensation heat transfer, Lausanne (Switzerland), 3–7 June 2012. Report p.1557.
18. **Pavlenko A. N., Koverda V. P., Reshetnikov A. V., et al.** Breakup of jet and film flows of overheated liquid // J. Engng Thermophys. 2013. V. 22, N 3.
19. **Нигматулин Р. И.** Динамика многофазных сред. М.: Наука, 1987. Т. 1.
20. **Жданов С. К.** Квазигазовые неустойчивые среды / С. К. Жданов, Б. А. Трубников. М.: Наука, 1991.
21. **Гиббс Дж. В.** Термодинамические работы. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1950.
22. **Scriven L. E.** On the dynamics of phase growth // Chem. Engng Sci. 1959. V. 10, N 1. P. 1–13.
23. **Вахитова Н. К., Шагапов В. Ш.** О распространении малых возмущений в парожидкостных пузырьковых средах // ПМТФ. 1984. № 5. С. 34–43.
24. **Ландау Л. Д.** Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Физматлит, 2006.
25. **Базаров И. П.** Термодинамика. М.: Высш. шк., 1991.

*Поступила в редакцию 21/XI 2012 г.,
в окончательном варианте — 7/III 2013 г.*
