УДК 539.37

НЕКОТОРЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫЕ ЗАДАЧИ ФОРМОИЗМЕНЕНИЯ НЕУПРУГИХ ПЛАСТИН И ПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК

И. Ю. Цвелодуб

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
E-mail: itsvel@hydro.nsc.ru

Рассматриваются геометрически нелинейные обратные задачи формоизменения упругопластических пологих оболочек и вязкоупругопластических пластин, когда необходимо найти в заданном временно́м интервале такие кинематические внешние воздействия, в результате приложения которых и последующего снятия нагрузок оболочка (пластина) получает требуемые остаточные прогибы. При некоторых ограничениях показана корректность (единственность решения и его непрерывная зависимость от данных задачи) соответствующих постановок и обоснованы итерационные методы решения этих задач.

Ключевые слова: обратные задачи, упругопластическая пологая оболочка, вязкоупругопластическая пластина, упругое "распружинивание", остаточный прогиб.

Ранее [1–3] рассматривались геометрически линейные обратные задачи о нахождении внешних воздействий, обеспечивающих за заданное время после разгрузки требуемое остаточное формоизменение (т. е. заданные остаточные прогибы) вязкоупругопластической или упругопластической пластины. В данной работе полученные в [1–3] результаты распространяются на случай аналогичных геометрически нелинейных задач, когда прогибы могут значительно превышать толщину пластины (пологой оболочки), но будут существенно меньше ее размеров в плане.

1. Основные уравнения. Рассмотрим пологую оболочку переменной (в общем случае) толщины $h = h(x_1, x_2)$, уравнение срединной поверхности которой в выбранной системе координат Ox_1x_2z имеет вид $z = \Phi(x_1, x_2)$ и которая проектируется на плоскость Ox_1x_2 в область S, ограниченную замкнутым контуром γ.

Для полных деформаций оболочки имеем [4]

$$\begin{gathered} \varepsilon_{kl} = 0{,}5(u_{k,l} + u_{l,k}) - æ_{kl}w + 0{,}5w_{,k}w_{,l} - zw_{,kl}, \\ æ_{kl} = -\Phi_{,kl}, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где u_k — перемещения в плоскости Ox_1x_2; w — прогиб, который может значительно превышать толщину h, но будет при этом существенно меньше линейных размеров области S; индекс k после запятой означает производную по x_k. В (1.1) и всюду далее $k, l = 1, 2$. (Заметим, что соотношения (1.1) справедливы в произвольной декартовой системе Ox_1x_2, не обязательно связанной с главными кривизнами оболочки.)

Уравнения равновесия имеют вид [4]

$$N_{kl,l} + X_k = 0, \qquad M_{kl,kl} + N_{kl}(w_{,kl} + æ_{kl}) + q = 0,$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00643) и Совета по грантам Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-319.2003.1).

$$N_{kl} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl}\,dz, \qquad M_{kl} = \int\limits_{-h/2}^{h/2} \sigma_{kl} z\,dz, \tag{1.2}$$

где $\sigma_{kl}, N_{kl}, M_{kl}$ — соответственно напряжения, мембранные усилия и моменты; q и X_k — нормальная и касательные составляющие внешней нагрузки; по повторяющимся индексам проводится суммирование от 1 до 2.

Как и в [1–3], примем, что

$$\varepsilon_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn} + \varepsilon_{kl}^N, \tag{1.3}$$

где a_{klmn}, ε_{kl}^N — компоненты тензоров упругих податливостей и неупругих (пластических или вязкопластических) деформаций.

В общем виде обратную задачу формоизменения оболочки можно сформулировать следующим образом [1, 2]: необходимо найти такие внешние кинематические или силовые воздействия в интервале времени $[0, t_*]$, после приложения которых и последующего снятия внешних нагрузок оболочка будет иметь в момент $t = t_*$ требуемый остаточный прогиб $\tilde{w}_* = \tilde{w}_*(x_1, x_2)$, т. е. заданную остаточную форму (поскольку $|\tilde{u}_{k*}| \ll |\tilde{w}_*|$). При $t < 0$ оболочка находилась в естественном состоянии. Случаи $t_* = 0$ и $t_* > 0$ соответствуют упругопластической и вязкоупругопластической задачам, которые рассматриваются ниже в кинематической постановке и при условии мгновенной упругой разгрузки при $t = t_*$.

В любой момент $t \quad (0 \leqslant t \leqslant t_*)$ прогиб w можно представить в виде (см. [1–3]):

$$w = w^e + \tilde{w}, \tag{1.4}$$

где w^e — величина упругого “распружинивания”, т. е. прогиб, являющийся решением упругой задачи при текущих внешних нагрузках $q = q(x_1, x_2, t)$, $X_k = X_k(x_1, x_2, t)$ и соответствующих граничных условиях на γ; $\tilde{w}$ — текущий остаточный прогиб после мгновенного снятия указанных нагрузок.

Предположим, что на активной стадии деформирования, т. е. до момента разгрузки, накоплены достаточно большие неупругие деформации ε_{kl}^N, так что величина w^e мала по сравнению с остаточным прогибом $\tilde{w}$: $|w^e| \ll |\tilde{w}|$. Тогда, подставляя (1.4) в (1.1) и пренебрегая слагаемыми $w^e_{,k}w^e_{,l}$, получим [5]

$$\varepsilon_{kl} = 0{,}5(u_{k,l} + u_{l,k}) - æ_{kl} w + 0{,}5(\tilde{w}_{,k} w_{,l} + \tilde{w}_{,l} w_{,k} - \tilde{w}_{,k}\tilde{w}_{,l}) - z w_{,kl}. \tag{1.5}$$

Рассмотрим два состояния, для которых остаточные прогибы $\tilde{w}^{(i)}$ $(i = 1, 2)$ мало отличаются от $\tilde{w}$, т. е. $|\tilde{w} - \tilde{w}^{(i)}| \ll |\tilde{w}|$. Тогда для деформаций $\varepsilon_{kl}^{(i)}$ будем иметь соотношения вида (1.5), где u_k следует заменить на $u_k^{(i)}$ и w — на $w^{(i)}$, а для разностей $\Delta\varepsilon_{kl} = \varepsilon_{kl}^{(1)} - \varepsilon_{kl}^{(2)}$ найдем

$$\Delta\varepsilon_{kl} = 0{,}5(\Delta u_{k,l} + \Delta u_{l,k}) - æ_{kl}\Delta w + 0{,}5(\tilde{w}_{,k}\Delta w_{,l} + \tilde{w}_{,l}\Delta w_{,k}) - z\Delta w_{,kl} \tag{1.6}$$

(для разностей остаточных деформаций $\Delta\tilde{\varepsilon}_{kl}$ также справедливы равенства (1.6), в которых Δw и Δu_k следует заменить на $\Delta\tilde{w}$ и $\Delta\tilde{u}_k$ соответственно).

Для величин $\Delta\varepsilon_{kl}$ из (1.6) и $\Delta\sigma_{kl}$, удовлетворяющих первым двум уравнениям (1.2) (т. е. $\Delta N_{kl,l} + \Delta X_k = 0$), причем $\Delta\varepsilon_{kl}$ и $\Delta\sigma_{kl}$ могут быть никак не связаны между собой, вычислим интеграл

$$I \equiv \frac{1}{2}\int\limits_S \int\limits_{-h/2}^{h/2} \Delta\varepsilon_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dz\,dx_1\,dx_2.$$

Проведя выкладки, аналогичные изложенным в [5] для геометрически нелинейной обратной релаксационной задачи изгиба пластин, будем иметь

$$I = \frac{1}{2}\int\limits_{\gamma} \Big[(\Delta u_k + \tilde{w}_{,k}\Delta w)\Delta p_k + \Big(\Delta Q + \frac{\partial \Delta H}{\partial s}\Big)\Delta w - \Delta G\,\frac{\partial \Delta w}{\partial n}\Big]\,ds +$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_{S} [(\Delta u_k + \tilde{w}_{,k}\Delta w)\Delta X_k + \Delta w \Delta q_1]\,dx_1\,x_2, \qquad (1.7)$$

$$-\Delta q_1 \equiv \Delta M_{kl,kl} + (\tilde{w}_{,kl} + æ_{kl})\Delta N_{kl}, \qquad \Delta p_k = \Delta N_{kl} n_l,$$

$$\Delta H = \Delta M_{kl} n_k t_l, \qquad \Delta G = \Delta M_{kl} n_k n_l, \qquad \Delta Q = \Delta M_{kl,l} n_k,$$

где n_k и t_k — компоненты единичных нормального и касательного векторов к контуру γ.

Вследствие сделанных выше предположений прогибы $w^{(i)}$ мало отличаются от $\tilde{w}$, поэтому можно считать, что $N^{(i)}_{kl} w^{(i)}_{,kl} \approx N^{(i)}_{kl}\tilde{w}_{,kl}$. Тогда для величины Δq_1, определенной в (1.7), из (1.2) получим

$$\Delta q_1 \approx \Delta q. \qquad (1.8)$$

По аналогии с [1, 2] введем норму для заданного поля приращений прогиба $\Delta w = \Delta w(x_1, x_2, t)$ при известном остаточном прогибе $\tilde{w}$:

$$\|\Delta w\|^2 = \frac{1}{2}\int\limits_{S}\int\limits_{-h/2}^{h/2} b_{klmn}\,\Delta\bar{\varepsilon}^e_{kl}\Delta\bar{\varepsilon}^e_{mn}\,dz\,dx_1\,dx_2 = \frac{1}{2}\int\limits_{S}\int\limits_{-h/2}^{h/2} \Delta\bar{\varepsilon}^e_{kl}\Delta\bar{\sigma}^e_{kl}\,dz\,dx_1\,dx_2, \qquad (1.9)$$

где b_{klmn} — компоненты тензора упругих модулей, обратного a_{klmn}.

Величины $\Delta\bar{\varepsilon}^e_{kl}$ определяются через $\Delta\bar{u}^e_k$ соотношениями вида (1.6), где $\Delta\bar{u}^e_k$ — решение упругой задачи, включающей первые два уравнения (1.2) ($\Delta\bar{N}^e_{kl,l} + \Delta X_k = 0$) при заданных нагрузках ΔX_k, равенства $\Delta\bar{\sigma}^e_{kl} = b_{klmn}\,\Delta\bar{\varepsilon}^e_{mn}$ и соответствующие условия на γ (для $\Delta\bar{u}^e_k$ или $\Delta\bar{p}^e_k = \Delta\bar{N}^e_{kl} n_l$). Если нагрузки ΔX_k неизвестны, то кроме величин Δw и $\tilde{w}$ необходимо задать еще и функции $\Delta u_k = \Delta u_k(x_1, x_2, t)$. Тогда $\Delta\bar{u}^e_k = \Delta u_k$ и согласно (1.6) будем иметь $\Delta\bar{\varepsilon}^e_{kl} = \Delta\varepsilon_{kl}$.

Из (1.7) и (1.9) видно, что $||\Delta w||^2$ совпадает с величиной I из (1.7), где над силовыми характеристиками внешних воздействий следует поставить черту и индекс e, а также заменить Δu_k на $\Delta\bar{u}^e_k$.

2. Упругопластическая задача. Рассмотрим случай, когда величины ε^N_{kl} из (1.3) представляют собой пластические деформации ε^p_{kl}. Предположим, что в процессе активного упругопластического деформирования прогиб оболочки монотонно возрастает от нуля до искомой величины $w = w(x_1, x_2)$, что позволяет использовать деформационную теорию пластичности. Снятие внешних нагрузок происходит мгновенно, т. е. имеет место упругая разгрузка. Таким образом, $t_* = 0$ и $\varepsilon^N_{kl} \equiv \varepsilon^p_{kl}$, причем [3]

$$\varepsilon^p_{kl} = \begin{cases} 0, & \Sigma < \sigma_T, \\ \lambda_0\,\partial\Sigma/\partial\sigma_{kl}, & \Sigma \geqslant \sigma_T, \end{cases} \qquad (2.1)$$

где $\Sigma = \Sigma(\sigma_{kl})$ — однородная первой степени выпуклая функция; σ_T — предел текучести; $\lambda_0 = \lambda_0(\Sigma) > 0$ — заданная функция, $\lambda_0'(\Sigma) > 0$ для упрочняющегося материала; λ_0 — неопределенный множитель для идеально пластического материала (в этом случае второе неравенство в (2.1) заменяется равенством $\Sigma = \sigma_T$).

Из (2.1) вытекает, что для любых двух состояний как в пластической, так и в упругой областях справедливо неравенство

$$\Delta\varepsilon_{kl}^p\,\Delta\sigma_{kl} \geqslant 0, \tag{2.2}$$

где знак равенства имеет место в указанных в [3] случаях.

Остаточному прогибу $\tilde{w}$ из (1.4) соответствуют деформации $\tilde{\varepsilon}_{kl}$, определенные согласно (1.1), где следует заменить w на $\tilde{w}$ и u_k на $\tilde{u}_k$. При этом выполняются соотношения [1, 3]

$$\varepsilon_{kl} - \tilde{\varepsilon}_{kl} = a_{klmn}\sigma_{mn}^e, \qquad \sigma_{mn}^e \equiv \sigma_{kl} - \rho_{kl}, \tag{2.3}$$

где ρ_{kl} — остаточные напряжения, возникающие в оболочке после снятия внешних нагрузок.

Задача рассматривается в кинематической постановке: необходимо найти такой прогиб $w = w(x_1, x_2)$, который обеспечивает после упругой разгрузки требуемый остаточный прогиб $\tilde{w} = \tilde{w}_*(x_1, x_2)$. Граничные условия на γ имеют вид: $w = \partial w/\partial n = 0$ (или могут быть заданы другие условия, соответствующие любому из четырех возможных вариантов, приведенных в [1, 3] для случая малых прогибов пластины) и $u_k = 0$ (или $p_k \equiv N_{kl}n_l = 0$), причем условия на активной стадии нагружения и при разгрузке могут отличаться друг от друга. Если внешние нагрузки X_k неизвестны, то на первой стадии (до разгрузки) необходимо задать перемещения $u_k = u_k(x_1, x_2)$.

Считаем, что имеют место развитые пластические деформации, т. е. $|w - \tilde{w}_*| \ll |\tilde{w}_*|$, поэтому решение для $w = w(x_1, x_2)$ ищется вблизи заданного остаточного прогиба $\tilde{w}_*(x_1, x_2)$.

Можно показать, что если существует решение данной задачи, то при сделанных выше предположениях оно будет единственным в том же смысле, что и в [3]. Действительно, пусть $v = \{x \mid x = (x_1, x_2, z) \in R^3,\ (x_1, x_2) \in S,\ |z| \leqslant h/2\}$. Предполагая существование двух решений и обозначая соответствующие разности с помощью символа Δ, для величины

$$\tilde{I} \equiv \int\limits_v \Delta\tilde{\varepsilon}_{kl}\Delta\sigma_{kl}\,dv$$

на основании соотношений (1.7) (где следует положить $\tilde{w} = \tilde{w}_*$, $\Delta u_k = \Delta\tilde{u}_k$ и $\Delta w = \Delta\tilde{w}$) и (1.8) вследствие указанных граничных условий на γ и ввиду того, что $\Delta\tilde{w} = 0$ всюду в S, будем иметь $\tilde{I} = 0$. Отсюда с учетом (1.3), (2.3) и вытекающего из (1.7) (для Δu_k^e и Δw^e) равенства

$$\int\limits_v a_{klmn}\,\Delta\sigma_{kl}^e\Delta\rho_{mn}\,dv = 0 \tag{2.4}$$

получим

$$\int\limits_v (a_{klmn}\,\Delta\rho_{kl}\,\Delta\rho_{mn} + \Delta\varepsilon_{kl}^p\,\Delta\sigma_{kl})\,dv = 0,$$

что ввиду (2.2) возможно только при $\Delta\varepsilon_{kl}^p\,\Delta\sigma_{kl} = 0$ и $\Delta\rho_{kl} = 0$ всюду в v, откуда следует [3], что остаточные напряжения ρ_{kl} в v, зона пластичности v_p и напряжения σ_{kl} и σ_{kl}^e в v_p определяются однозначно. Поэтому в области S_p, являющейся проекцией v_p на плоскость Ox_1x_2, прогиб w определяется с точностью до линейной функции от x_1 и x_2. Если S_p примыкает к непрямолинейной части контура γ, на которой задан прогиб w, то последний будет найден однозначно и в области S_p. В случае аналитической в S_p функции $w = w(x_1, x_2)$ она может быть продолжена на всю область S [3].

Как и в [3], данная упругопластическая задача сводится к нахождению прогиба w из функционального уравнения

$$w = F(w), \qquad F(w) = w^e(w) + \tilde{w},$$

для решения которого можно применить итерационный метод:

$$w^{n+1} = F(w^n) = w^{en} + \tilde{w} \tag{2.5}$$

($w^{en} = w^e(w^n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$), а в качестве нулевого приближения положить $w^0 = \tilde{w}$.

Таким образом, на каждой итерации имеем прямую задачу о нахождении по известной функции $w = w(x_1, x_2)$ величины упругого "распружинивания" $w^e = w^e(x_1, x_2)$. Решение этой задачи, включающей уравнения (1.2) при заданных нагрузках X_k и q, вытекающие из (2.3) соотношения $\sigma^e_{kl} = b_{klmn}(\varepsilon_{mn} - \tilde{\varepsilon}_{mn}) = b_{klmn}\varepsilon^e_{mn}$, где ε_{kl} и $\tilde{\varepsilon}_{kl}$ определены согласно (1.5), и указанные выше граничные условия на γ, единственно, так как для разностей двух возможных решений с учетом (1.8) (т. е. $\Delta q^e_1 \approx \Delta q = 0$) и нулевых условий на γ найдем из (1.7), что $\|\Delta w^e\| = 0$.

По аналогии с [3] и с учетом (2.4) нетрудно показать, что последовательность (2.5) будет сходиться к искомому прогибу $w = w(x_1, x_2)$ в том же смысле, что и в [3].

3. Вязкоупругопластическая задача. Пусть величины ε^N_{kl} из (1.3) представляют собой сумму пластических и вязких деформаций, скорости которых зависят от напряжений и, возможно, от времени:

$$\dot{\varepsilon}^N_{kl} = \dot{\varepsilon}^N_{kl}(\sigma_{mn}, t),$$

причем эти функции удовлетворяют следующему условию [2]:

$$\Delta\dot{\varepsilon}^N_{kl}\,\Delta\sigma_{kl} \geqslant \lambda a_{klmn}\,\Delta\sigma_{kl}\,\Delta\sigma_{mn}, \qquad \lambda = \text{const}, \quad \lambda > 0. \tag{3.1}$$

Сформулируем задачу, аналогичную рассмотренной в [1, 2] для пластины в кинематической геометрически линейной постановке. Требуется определить функцию $w_* = w_*(x_1, x_2)$ такую, чтобы при прогибе $w = \varphi(t)w_*$ и перемещениях $u_k(x_1, x_2, t) = 0$ ($0 \leqslant t \leqslant t_*$) в момент $t = t_*$ после мгновенного снятия внешних нагрузок $X_{k*} = X_k(x_1, x_2, t_*)$ и $q_* = q(x_1, x_2, t_*)$ и упругой разгрузки остаточный прогиб $\tilde{w}(x_1, x_2, t_*) = \tilde{w}_*$. Здесь $\tilde{w}_* = \tilde{w}_*(x_1, x_2)$ и $\varphi(t)$ — заданные функции, причем $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(t_*) = 1$.

Ограничимся рассмотрением вязкоупругопластической пластины, полагая во всех вышеприведенных формулах $æ_{kl} = 0$. Для разностей деформаций, соответствующих двум состояниям, при которых остаточные прогибы $\tilde{w}^{(i)}_*$ ($i = 1, 2$) мало отличаются от $\tilde{w}_*$, вследствие принятых выше предположений будем иметь при $t = t_*$ соотношения вида (1.6), а именно

$$\Delta\varepsilon_{kl*} = 0{,}5(\Delta u_{k*,l} + \Delta u_{l*,k} + \tilde{w}_{*,k}\Delta w_{*,l} + \tilde{w}_{*,l}\Delta w_{*,k}) - z\Delta w_{*,kl}. \tag{3.2}$$

(Формулы для $\Delta\tilde{\varepsilon}_{kl*}$ получаются из (3.2) заменой Δu_{k*} на $\Delta\tilde{u}_{k*}$ и Δw_* на $\Delta\tilde{w}_*$.)

Поскольку $w = \varphi(t)w_*$ и $u_k = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant t_*$, из (1.1) и (3.2) получим

$$\Delta\varepsilon_{kl} = \varphi^2(t)\Delta\gamma_{kl} - z\varphi(t)\Delta w_{*,kl}, \qquad \Delta\gamma_{kl} \equiv 0{,}5(\tilde{w}_{*,k}\Delta w_{*,l} + \tilde{w}_{*,l}\Delta w_{*,k}),$$
$$\Delta\varepsilon_{kl*} = \Delta\gamma_{kl} - z\Delta w_{*,kl}, \qquad \Delta\dot{\varepsilon}_{kl} = \dot{\varphi}(t)[2\varphi(t)\Delta\gamma_{kl} - z\Delta w_{*,kl}].$$

Отсюда

$$\|\Delta w_*\|^2 = I_1^2(\Delta\varepsilon_{kl*}) \equiv \frac{1}{2}\int\limits_v b_{klmn}\,\Delta\varepsilon_{kl*}\,\Delta\varepsilon_{mn*}\,dv = I_2^2 + I_3^2,$$

$$I_2^2 = \int\limits_S \frac{h}{2}\,b_{klmn}\,\Delta\gamma_{kl}\,\Delta\gamma_{mn}\,dS, \qquad I_3^2 = \int\limits_S \frac{h^3}{24}\,b_{klmn}\,\Delta w_{*,kl}\,\Delta w_{*,mn}\,dS, \tag{3.3}$$

$$\|\Delta\dot{w}\|^2 = I_1^2(\Delta\dot{\varepsilon}_{kl}) = [\dot{\varphi}(t)]^2[4\varphi^2(t)I_2^2 + I_3^2] \leqslant 4[\dot{\varphi}(t)]^2\|\Delta w_*\|^2 \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_*).$$

Из (1.3) по аналогии с [2] получим

$$2\dot{I}_4(\Delta\sigma_{kl})I_4(\Delta\sigma_{kl}) + I_5(t) = \int\limits_v \Delta\dot{\varepsilon}_{kl}\,\Delta\sigma_{kl}\,dv \leqslant 2I_4(\Delta\sigma_{kl})I_1(\Delta\dot{\varepsilon}_{kl}),$$

$$I_4^2(\Delta\sigma_{kl}) = \frac{1}{2}\int\limits_v a_{klmn}\,\Delta\sigma_{kl}\,\Delta\sigma_{mn}\,dv,$$

$$I_5(t) = \int\limits_v \Delta\dot{\varepsilon}_{kl}^N(t)\Delta\sigma_{kl}(t)\,dv \qquad (0 \leqslant t \leqslant t_*),$$

откуда с учетом (3.1) и (3.3) будем иметь

$$\dot{I}_4 + \lambda I_4 \leqslant 2|\dot{\varphi}|\,\|\Delta w_*\|, \qquad \text{т. е.} \quad [I_4\exp(\lambda t)]^\bullet \leqslant 2\|\Delta w_*\|\,|\dot{\varphi}|\exp(\lambda t).$$

Интегрируя это неравенство по времени от нуля до текущего момента t $(0 \leqslant t \leqslant t_*)$ и учитывая, что $\Delta\sigma_{kl}|_{t=0} = 0$ (так как $\varphi(0) = 0$), найдем

$$I_4(\Delta\sigma_{kl}) \leqslant \beta(t)\|\Delta w_*\|, \qquad \beta(t) = 2\exp(-\lambda t)\int\limits_0^t |\dot{\varphi}(t)|\exp(\lambda t)\,dt. \tag{3.4}$$

Поскольку $\Delta\sigma_{kl} = \Delta\sigma_{kl}^e + \Delta\rho_{kl}$ и при $t = t_*$ справедливы равенства (1.7) (при $\tilde{w} = \tilde{w}_*$) и (1.8), а следовательно, и (2.4), будем иметь [2]

$$I_4^2(\Delta\sigma_{kl*}) = I_4^2(\Delta\sigma_{kl*}^e) + I_4^2(\Delta\rho_{kl*}) \geqslant I_4^2(\Delta\sigma_{kl*}^e) = \|\Delta w_*^e\|^2$$

и из (3.4) получим

$$\|\Delta w_*^e\| \leqslant \beta_*\|\Delta w_*\|, \qquad \beta_* = \beta(t_*). \tag{3.5}$$

Так как $\|\Delta w_*\| = \|\Delta w_*^e + \Delta\tilde{w}_*\| \leqslant \|\Delta w_*^e\| + \|\Delta\tilde{w}_*\|$, из (3.5) вытекает неравенство $(1 - \beta_*)\|\Delta w_*\| \leqslant \|\Delta\tilde{w}_*\|$, которое при $\beta_* < 1$ обеспечивает единственность решения рассматриваемой задачи и непрерывность оператора $w_* = w_*(\tilde{w}_*)$. Искомый прогиб w_* может быть получен как предел последовательности вида (2.5), т. е.

$$w_*^{n+1} = w_*^e(w_*^n) + \tilde{w}_* \quad (n = 0, 1, 2, \ldots), \qquad w_*^0 = \tilde{w}_*,$$

поскольку задача сводится к решению функционального уравнения $w_* = F_1(w_*) \equiv w_*^e(w_*) + \tilde{w}_*$, причем при $\beta_* < 1$ оператор F_1 будет сжимающим [2].

Приведем некоторые примеры функции $\varphi = \varphi(t)$, когда выполняется условие $\beta_* < 1$. При $\varphi(t) = t/t_*$ из (3.4) найдем $\beta_* = 2[1 - \exp(-\gamma_*)]/\gamma_*$, где $\gamma_* = \lambda t_*$, поэтому при $\gamma_* \geqslant 2$ будем иметь $\beta_* < 1$. В более общем случае вследствие неравенства Коши — Буняковского из (3.4) получим

$$\beta_* \leqslant 2\text{æ}_*\exp(-\gamma_*)\Big(\int\limits_0^{t_*}\exp(2\lambda t)\,dt\Big)^{1/2} = \sqrt{2}\,\text{æ}_*\Big[\frac{1 - \exp(-2\gamma_*)}{\lambda}\Big]^{1/2} < \frac{\sqrt{2}\,\text{æ}_*}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\text{æ}_*^2 = \int\limits_0^{t_*}(\dot{\varphi})^2\,dt.$$

Если, например, $\varphi(t) = (t/t_*)^\alpha$ $(\alpha > 1/2)$, то $æ_* = \alpha/\sqrt{(2\alpha - 1)t_*}$ и для выполнения условия $\beta_* < 1$ достаточно, чтобы $\gamma_*(1 - \sqrt{1 - 2\gamma_*^{-1}}\,) \leqslant 2\alpha \leqslant \gamma_*(1 + \sqrt{1 - 2\gamma_*^{-1}}\,)$, что возможно при $\gamma_* \geqslant 2$.

Заметим, что в [2] для случая аналогичной геометрически линейной задачи получено неравенство вида (3.4), но в котором $\beta(t)$ в 2 раза меньше, чем в (3.4). Поэтому и соответствующие ограничения на функцию $\varphi = \varphi(t)$ будут слабее: например, неравенство $\beta_* < 1$ имеет место для любой монотонно возрастающей от нуля до единицы функции $\varphi = \varphi(t)$ $(0 \leqslant t \leqslant t_*)$.

Отметим также, что, как и в [2], минимальное значение β_* из (3.5) соответствует релаксационному режиму деформирования, когда $\varphi(0) = 0$, $\dot\varphi > 0$ $(0 < t < t_0)$, $\varphi = 1$ $(t_0 \leqslant t \leqslant t_*)$ при $t_0 \to 0$; в этом случае $\beta_* = 2\exp(-\gamma_*)$. Следовательно, условие $\beta_* < 1$ возможно только при $\gamma_* > \ln 2 \approx 0{,}693$.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Цвелодуб И. Ю.** Обратные задачи формоизменения неупругих пластин // Изв. РАН. Механика твердого тела. 1996. № 1. С. 96–106.
2. **Банщикова И. А., Цвелодуб И. Ю.** Об одном классе обратных задач формоизменения вязкоупругих пластин // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 122–131.
3. **Цвелодуб И. Ю.** Обратная упругопластическая задача для пластин // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 4. С. 186–194.
4. **Вольмир А. С.** Гибкие пластинки и оболочки. М.: Гостехтеоретиздат, 1956.
5. **Цвелодуб И. Ю.** Некоторые обратные задачи изгиба пластин при ползучести // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1985. № 5. С. 126–134.

Поступила в редакцию 17/VI 2004 г.