

УДК 539.2

## ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ИДЕНТИФИКАЦИЯ КРИСТАЛЛОВ, ИМЕЮЩИХ КУБИЧЕСКУЮ РЕШЕТКУ, С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ ПУАССОНА

В. И. Ерофеев, И. С. Павлов

Институт проблем машиностроения РАН, 603024 Нижний Новгород, Россия  
Нижегородский государственный университет им. Н. И. Лобачевского,  
603950 Нижний Новгород, Россия  
E-mails: erf04@sinn.ru, ispavl@mts-nn.ru

Рассмотрена двумерная модель анизотропного кристаллического материала с кубической симметрией, представляющая собой квадратную решетку из жестких круглых частиц, каждая из которых обладает двумя трансляционными и одной ротационной степенями свободы. Выведены дифференциальные уравнения, описывающие распространение упругих и ротационных волн в такой среде. Установлена взаимосвязь между тремя группами параметров: упругими постоянными второго порядка, скоростями акустических волн и параметрами микроструктуры. Найдены значения параметров микроструктуры рассматриваемого анизотропного материала, при которых его коэффициенты Пуассона становятся отрицательными.

**Ключевые слова:** кристалл с кубической решеткой, отрицательные коэффициенты Пуассона, параметры микроструктуры, параметрическая идентификация.

DOI: 10.15372/PMTF20150611

**Введение.** Важной характеристикой упругости материала является коэффициент Пуассона  $\nu$ , который представляет собой отношение величины поперечного сжатия к удлинению в случае чистого растяжения. Согласно классической теории упругости теоретически обоснованные значения коэффициента Пуассона находятся в диапазоне  $-1,0 \leq \nu \leq 0,5$  [1]. Верхний предел соответствует несжимаемому материалу (например, резине), объем которого в процессе деформации сохраняется, в то время как форма значительно изменяется. Нижний предел соответствует материалу, геометрическая форма которого при деформации сохраняется, а объем изменяется. Особый интерес представляют материалы с отрицательным значением  $\nu$  (некоторые пористые среды, гранулированные материалы, полимеры, композиты, кристаллические среды) [1, 2]. Впервые отрицательные значения коэффициента Пуассона экспериментально получены в 1962 г. (кристаллы кварца при высоких температурах) [3]. В настоящее время для таких материалов обычно используется термин “ауксетики” (от греч. auxetos — разбухающий), предложенный в 1991 г. К. Эвансом [4]. Если для изотропных материалов коэффициент Пуассона является положительным, то для анизотропных сред он часто отрицательный. Особенно много ауксетиков среди материалов с кубической кристаллической решеткой [5, 6]. В последние годы появились сообщения об обладающих ауксетическими свойствами наноматериалах (см., например, [7]) и пористых материалах, имеющих низкую плотность, хорошие изоляционные свойства и т. п.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-19-01637).

Однако для описания свойства ауксетичности необходимо использовать математическую модель. Получить такое описание в рамках классической теории упругости, основанной на представлении, согласно которому среда является континуумом материальных точек, достаточно сложно. Поэтому возникает необходимость моделирования среды регулярной или квазирегулярной решеткой, в узлах которой расположены не материальные точки, а тела малых размеров, обладающие дополнительными степенями свободы (домены, зерна, фуллерены, нанотрубки или кластеры наночастиц). В настоящее время для описания сред с ауксетическими свойствами, как правило, используются двумерные модели со сложной системой связей анизотропных, в частности квадратных, частиц (см., например, [1, 8]).

В данной работе предложена двумерная динамическая модель анизотропной среды с квадратной решеткой. В узлах решетки расположены недеформируемые круглые частицы, обладающие двумя трансляционными и одной вращательной (ротационной) степенями свободы, а пространство между частицами представляет собой не обладающую массой упругую область, через которую передаются силовые и моментные воздействия.

**1. Математическая модель анизотропной среды.** Рассмотрим квадратную решетку, в узлах которой расположены однородные круглые частицы (зерна) диаметром  $d$  и массой  $M$  (рис. 1). В исходном состоянии центры масс частиц расположены в узлах решетки с индексами  $i, j$  и расстояние между ними равно  $a$ . Допускаются лишь малые отклонения частиц от положения равновесия, причем предполагается, что каждая частица обладает тремя степенями свободы: смещениями центра масс  $u_{ij}(t)$  и  $w_{ij}(t)$  по осям  $x$  и  $y$  соответственно и поворотом относительно оси, проходящей через центр масс частицы  $\varphi_{ij}(t)$  (рис. 2). Считается, что частица с индексами  $i, j$  взаимодействует с восьмью ближайшими соседями в решетке, из которых первые четыре удалены от рассматриваемой частицы на расстояние  $a$  (частицы первой координационной сферы), а остальные четыре расположены на диагоналях квадратной решетки (частицы второй координационной сферы). Эти взаимодействия моделируются упругими пружинами трех типов. Центральные пружины с жесткостью  $K_1$  описывают силовые взаимодействия зерен при растяжении-сжатии материала, пружины с жесткостью  $K_2$  характеризуют моментные взаимодействия частиц при сдвиговых деформациях в материале, пружины с жесткостью  $K_3$  моделируют силовые взаимодействия центральной частицы с зернами второй координационной сферы. Считается, что точки соединения пружин с жесткостью  $K_1$  находятся в центрах круглых частиц, а точки соединения пружин с жесткостями  $K_2$  и  $K_3$  — в вершинах квадрата с длиной стороны  $h = d/\sqrt{2}$ , вписанного в окружность (см. рис. 2).

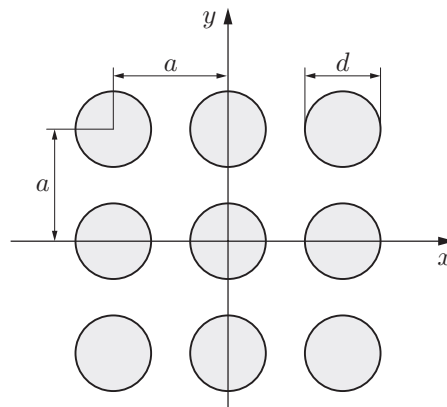


Рис. 1. Квадратная решетка из круглых частиц

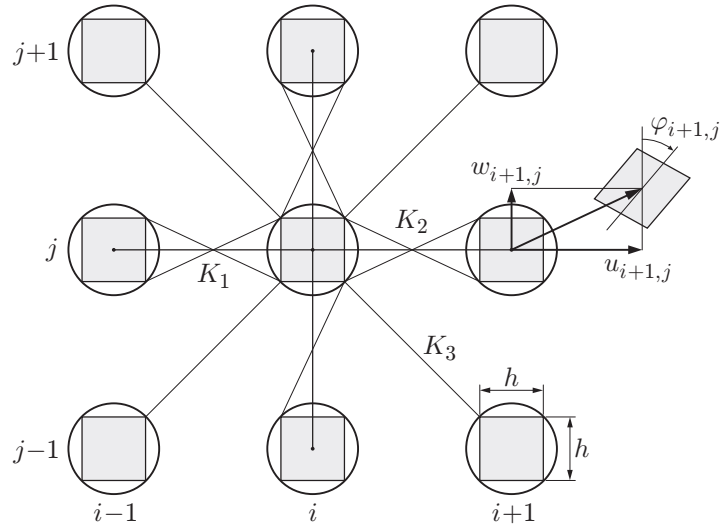


Рис. 2. Схема силовых взаимодействий и кинематика частиц

С учетом принятых предположений динамика рассматриваемой среды в континуальном приближении описывается следующими уравнениями [9, 10]:

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - c_2^2 u_{yy} - s^2 w_{xy} + \beta^2 \varphi_y &= 0, \\ w_{tt} - c_2^2 w_{xx} - c_1^2 w_{yy} - s^2 u_{xy} - \beta^2 \varphi_x &= 0, \\ \varphi_{tt} - c_3^2 (\varphi_{xx} + \varphi_{yy}) + \beta^2 R^{-2} (2\varphi + w_x - u_y) &= 0. \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $c_3$  — скорости распространения продольной, поперечной и ротационной волн соответственно;  $s$  — коэффициент линейной связи между продольными и поперечными волнами;  $\beta$  — параметр дисперсии;  $R = d/\sqrt{8}$  — радиус инерции частицы. От параметров микроструктуры (размера частицы  $d$ , периода решетки  $a$  и параметров силовых и моментных взаимодействий  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ ) коэффициенты уравнений (1) зависят следующим образом:

$$\begin{aligned} \rho c_1^2 &= \frac{K_1}{a} + \frac{2(a\sqrt{2} - d)^2}{d^2 + (a\sqrt{2} - d)^2} \frac{K_2}{a} + \frac{K_3}{a}, & \rho c_2^2 &= \frac{2d^2}{d^2 + (a\sqrt{2} - d)^2} \frac{K_2}{a} + \frac{K_3}{a}, \\ \rho c_3^2 &= \frac{4aK_2}{d^2 + (a\sqrt{2} - d)^2}, & \rho s^2 &= \frac{2K_3}{a}, \\ \rho \beta^2 &= \frac{2d^2}{d^2 + (a\sqrt{2} - d)^2} \frac{K_2}{a} = \rho \left( c_2^2 - \frac{s^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

( $\rho$  — плотность материала).

В работе [10] показано, что в области низких частот вращательными степенями свободы частиц можно пренебречь, при этом уравнения (1) сводятся к уравнениям моментной теории упругости

$$\begin{aligned} u_{tt} - c_1^2 u_{xx} - \left( c_2^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) u_{yy} - \left( s^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) w_{xy} &= \frac{R^2}{4} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_y - w_x) - c_3^2 \Delta (u_y - w_x) \right), \\ w_{tt} - \left( c_2^2 - \frac{\beta^2}{2} \right) w_{xx} - c_1^2 w_{yy} - \left( s^2 + \frac{\beta^2}{2} \right) u_{xy} &= -\frac{R^2}{4} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2}{\partial t^2} (u_y - w_x) - c_3^2 \Delta (u_y - w_x) \right). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$  — двумерный лапласиан. Следует отметить, что согласно (2), несмотря на отсутствие в системе (3) ротационной моды, микроструктура среды оказывает влияние на коэффициенты уравнений (3).

Левые части уравнений (3) совпадают с левыми частями классических двумерных уравнений Ламе для сред с кубической симметрией

$$\begin{aligned}\rho u_{tt} &= C_{11}u_{xx} + C_{44}u_{yy} + (C_{12} + C_{44})w_{xy}, \\ \rho w_{tt} &= C_{44}w_{xx} + C_{11}w_{yy} + (C_{12} + C_{44})u_{xy},\end{aligned}\quad (4)$$

где  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$  — упругие постоянные. Из результатов сравнения системы (4) и уравнений (3) следует

$$C_{11} = \rho c_1^2, \quad C_{12} = \rho s^2/2, \quad C_{44} = \rho(2c_2^2 + s^2)/4. \quad (5)$$

На основе соотношений (2) и (5) можно получить зависимости упругих постоянных от параметров микроструктуры

$$\begin{aligned}C_{11} &= \frac{K_1 + K_3}{a} + \frac{2(a\sqrt{2} - d)^2}{d^2 + (a\sqrt{2} - d)^2} \frac{K_2}{a}, & C_{12} &= \frac{K_3}{a}, \\ C_{44} &= \frac{d^2}{d^2 + (a\sqrt{2} - d)^2} \frac{K_2}{a} + \frac{K_3}{a}.\end{aligned}\quad (6)$$

Заметим, что из формул (6) нетрудно получить обратные зависимости

$$\begin{aligned}\frac{K_3}{a} &= C_{12}, & \frac{K_2}{a} &= \frac{d^2 + (a\sqrt{2} - d)^2}{d^2} (C_{44} - C_{12}), \\ \frac{K_1}{a} &= C_{11} - C_{12} - \frac{2(a\sqrt{2} - d)^2}{d^2} (C_{44} - C_{12}).\end{aligned}\quad (7)$$

С учетом того что  $C_{11} - C_{12} = 2\rho v_{tr}^2$  [11], где  $v_{tr}$  — скорость поперечной волны в кристаллографическом направлении  $\langle 110 \rangle$ , из (5) следует соотношение

$$s^2 = 2c_1^2 - 4v_{tr}^2, \quad (8)$$

поэтому равенства (5) записываются в виде

$$C_{11} = \rho c_1^2, \quad C_{12} = \rho(c_1^2 - 2v_{tr}^2), \quad C_{44} = \rho(c_1^2 + c_2^2 - 2v_{tr}^2)/2. \quad (9)$$

С использованием формул (9) по результатам акустических измерений можно определить эффективные модули упругости кристаллической среды. В свою очередь скорости акустических волн определяются по равенствам, обратным (9):

$$c_1 = \sqrt{C_{11}/\rho}, \quad c_2 = \sqrt{(2C_{44} - C_{12})/\rho}, \quad v_{tr} = \sqrt{(C_{11} - C_{12})/(2\rho)}. \quad (10)$$

Таким образом, с помощью формул (5)–(10) при фиксированном относительном размере частиц установлено взаимно однозначное соответствие между тремя группами параметров: упругими постоянными  $C_{11}$ ,  $C_{12}$ ,  $C_{44}$ , скоростями акустических волн  $c_1$ ,  $c_2$ ,  $v_{tr}$  и параметрами силовых и моментных взаимодействий  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_3$ . Параметры первых двух групп можно определить экспериментально, в то время как параметры третьей группы вычисляются по этим экспериментальным данным, а затем используются для получения теоретической оценки макропараметров, экспериментальное измерение которых существенно затруднено (например, скорость ротационной волны, коэффициенты нелинейностей и т. п.) [10, 12].

**2. Анализ зависимости коэффициентов Пуассона от параметров микроструктуры.** В анизотропном монокристаллическом материале с кубической решеткой коэффициенты Пуассона в кристаллографических направлениях  $\langle 100 \rangle$ ,  $\langle 110 \rangle$  и  $\langle 111 \rangle$  определяются по известным соотношениям [13]

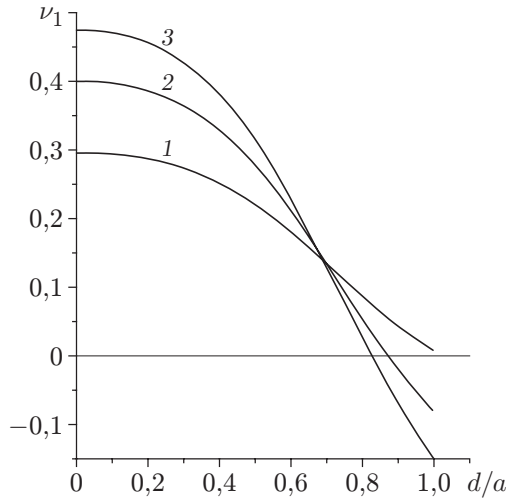


Рис. 3

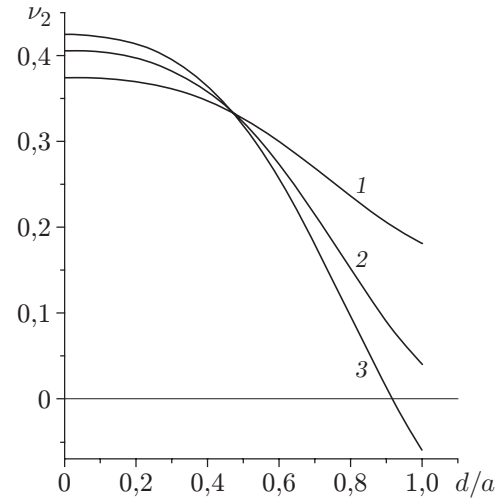


Рис. 4

Рис. 3. Зависимость коэффициента Пуассона  $\nu_1 = \nu_{\langle 110, 1\bar{1}0 \rangle}$  от относительного размера частиц при  $K_3/K_1 = 0,7$  и различных значениях параметра  $K_2/K_1$ : 1 —  $K_2/K_1 = 0,3$ , 2 —  $K_2/K_1 = 0,6$ , 3 —  $K_2/K_1 = 0,9$

Рис. 4. Зависимость коэффициента Пуассона  $\nu_2 = \nu_{\langle 111 \rangle}$  от относительного размера частиц при  $K_3/K_1 = 0,2$  и различных значениях параметра  $K_2/K_1$ : 1 —  $K_2/K_1 = 0,3$ , 2 —  $K_2/K_1 = 0,7$ , 3 —  $K_2/K_1 = 1,1$

$$\nu_{\langle 100, 001 \rangle} = \frac{C_{12}}{C_{11} + C_{12}}, \quad \nu_{\langle 110, 001 \rangle} = \frac{4C_{12}C_{44}}{2C_{11}C_{44} + (C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12})}; \quad (11)$$

$$\nu_{\langle 110, 1\bar{1}0 \rangle} = \frac{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12}) - 2C_{11}C_{44}}{(C_{11} - C_{12})(C_{11} + 2C_{12}) + 2C_{11}C_{44}}, \quad \nu_{\langle 111 \rangle} = \frac{C_{11} + 2C_{12} - 2C_{44}}{2(C_{11} + 2C_{12} + C_{44})}. \quad (12)$$

Очевидно, что если в (11), (12) первые два коэффициента Пуассона при положительных константах упругости всегда больше нуля, то последние два коэффициента могут принимать и отрицательные значения. Для исследования влияния микроструктуры среды на анизотропные коэффициенты Пуассона подставим выражения (6) в формулы (12). На рис. 3, 4 приведены зависимости коэффициентов Пуассона  $\nu_1 = \nu_{\langle 110, 1\bar{1}0 \rangle}$  и  $\nu_2 = \nu_{\langle 111 \rangle}$  от относительного размера частиц  $p = d/a$  при различных значениях параметров силовых взаимодействий  $K_2/K_1$  и  $K_3/K_1$ . Из рис. 3, 4 следует, что с увеличением размера частиц коэффициенты Пуассона  $\nu_1, \nu_2$  монотонно убывают. Таким образом, отрицательные значения  $\nu_1, \nu_2$  имеют место при больших размерах частиц:  $d/a \rightarrow 1$ . Коэффициент  $\nu_1 < 0$  при

$$K_1 + \frac{4(1 - p\sqrt{2})K_2}{p^2 + (\sqrt{2} - p)^2} < \frac{2K_3^2(p^2 + (\sqrt{2} - p)^2)}{(K_1 + K_3)(p^2 + (\sqrt{2} - p)^2) + 2(\sqrt{2} - p)^2K_2}. \quad (13)$$

Подставляя в (13) максимально возможное значение  $p = d/a = 1$ , получаем необходимое условие отрицательности коэффициента  $\nu_1$

$$2K_{31}^2 + (\sqrt{2}K_{21} - 1)K_{31} + (\sqrt{2} - 1)K_{21}^2 + (3\sqrt{2}/2 - 1)K_{21} - 1 > 0 \quad (14)$$

( $K_{21} = K_2/K_1$ ;  $K_{31} = K_3/K_1$ ). Анализ выражения (14) показывает, что если  $K_{21} < -9,69$  или  $K_{21} > 0,71$ , то  $\nu_1 < 0$  при любых значениях  $K_{31}$ . Если  $-9,69 < K_{21} < 0,71$ , то  $\nu_1 < 0$  при  $K_{31} < (1 - \sqrt{2}K_{21} - \sqrt{F})/4$  или  $K_{31} > (1 - \sqrt{2}K_{21} + \sqrt{F})/4$ , где  $F = (10 -$

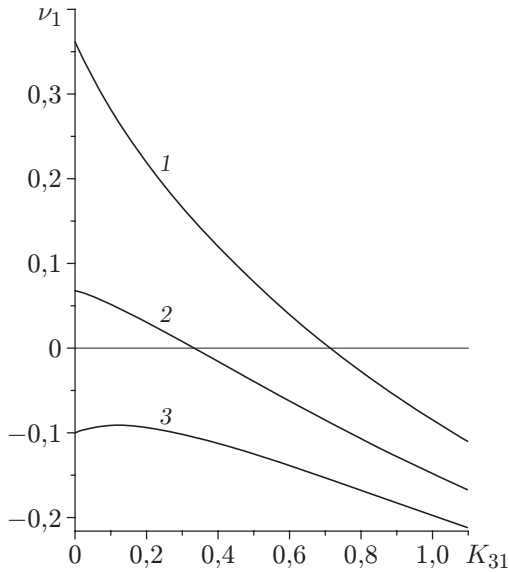


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость коэффициента Пуассона  $\nu_1 = \nu_{\langle 110, 1\bar{1}0 \rangle}$  от параметра силовых взаимодействий при  $d/a = 1$ :

1 —  $K_2/K_1 = 0,3$ , 2 —  $K_2/K_1 = 0,6$ , 3 —  $K_2/K_1 = 0,9$

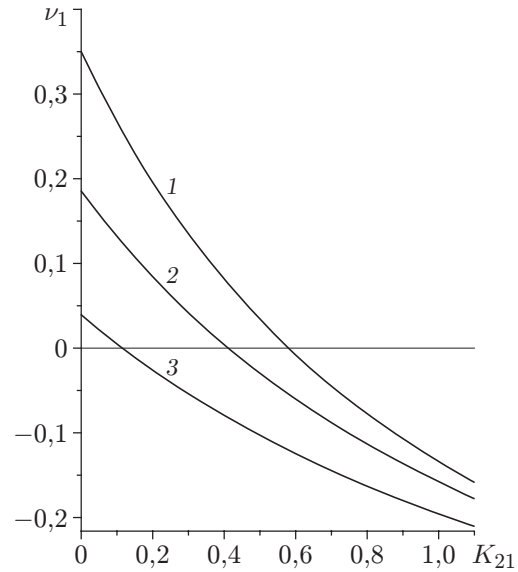


Рис. 6

Рис. 6. Зависимость коэффициента Пуассона  $\nu_1 = \nu_{\langle 110, 1\bar{1}0 \rangle}$  от параметра моментных взаимодействий при  $d/a = 1$ :

1 —  $K_3/K_1 = 0,37$ , 2 —  $K_3/K_1 = 0,6$ , 3 —  $K_3/K_1 = 0,9$

$8\sqrt{2})K_{21}^2 + (8 - 14\sqrt{2})K_{21} + 9$ . Например, если  $K_{21} = 0,3$ , то  $F \approx 5,34$  и  $K_{31} < -0,43$  или  $K_{31} > 0,72$ . Если  $K_{21} = 0,5$ , то  $F \approx 2,77$ ,  $K_{31} < -0,34$  или  $K_{31} > 0,49$ . Наконец, если  $K_{21} = 0,6$ , то  $F \approx 1,45$ ,  $K_{31} < -0,26$  или  $K_{31} > 0,34$ . Данные результаты подтверждаются приведенными на рис. 5, 6 зависимостями  $\nu_1$  от параметров силовых ( $K_{31} = K_3/K_1$ ) и моментных ( $K_{21} = K_2/K_1$ ) взаимодействий.

В свою очередь  $\nu_2 < 0$  при

$$(K_1 + K_3)(p^2 + (\sqrt{2} - p)^2) < 4\sqrt{2}(p - 1/\sqrt{2})K_2. \quad (15)$$

Поскольку коэффициент Пуассона  $\nu_2$  убывает с увеличением размера зерна, подставляя в (15) максимально возможное значение  $p = 1$ , получаем необходимое условие его отрицательности  $K_3 < \sqrt{2}K_2 - K_1$ . Таким образом, если  $\sqrt{2}K_2 < K_1$ , то при  $K_3 > 0$  коэффициент Пуассона  $\nu_2$  не будет отрицательным ни при каких размерах частиц  $p$ .

В таблице приведены найденные по формулам (7) параметры структуры, в том числе параметры силовых и моментных взаимодействий, для различных кристаллов с кубической симметрией (фторида лития LiF, фторида натрия NaF, бромида натрия NaBr, фуллерита  $C_{60}$ ) при  $p = 0,9$ , а также значения коэффициента Пуассона, вычисленные по известным результатам экспериментов (константам упругости и плотности при комнатной температуре для щелочно-галлоидных кристаллов [14]) и теоретическим данным. Для оценки упругих модулей фуллерита  $C_{60}$  с кубической решеткой при низких температурах использовался модифицированный потенциал Леннарда-Джонса [15]. Из таблицы следует, что отрицательные значения принимает коэффициент Пуассона  $\nu_1 = \nu_{\langle 110, 1\bar{1}0 \rangle}$  кристаллов LiF и  $C_{60}$ .

**3. Выводы.** Разработана двумерная модель кристаллического материала с кубической симметрией. Выявлена взаимосвязь между константами упругости такой среды и

Параметры структуры для кристаллов с кубической симметрией

Кристалл	$\rho$ , кг/м <sup>3</sup>	$C_{11} \cdot 10^{-9}$ , Н/м <sup>2</sup>	$C_{12} \cdot 10^{-9}$ , Н/м <sup>2</sup>	$C_{44} \cdot 10^{-9}$ , Н/м <sup>2</sup>	$c_1$ , м/с	$c_2$ , м/с	$v_{tr}$ , м/с	$c_3$ , м/с	$\beta$ , м/с	$K_1/a$ , ГПа	$K_2/a$ , ГПа	$K_3/a$ , ГПа	$\nu_{\langle 100,001 \rangle}$	$\nu_{\langle 110,001 \rangle}$	$\nu_{\langle 110,1\bar{1}0 \rangle}$	$\nu_{\langle 111 \rangle}$
LiF	2600	113,00	48,00	63,00	6593	5477	3536	5659	3396	55,21	19,90	48,00	0,298	0,435	-0,023	0,153
NaF	2800	97,00	25,60	28,00	5890	3295	3571	2896	1309	69,83	3,18	25,60	0,209	0,179	0,322	0,262
NaBr	3200	32,55	13,14	13,26	3190	2045	1741	1092	274	19,33	0,16	13,14	0,288	0,348	0,139	0,224
C <sub>60</sub>	1720	14,90	6,90	8,10	2943	2325	1525	2036	1181	7,21	1,59	6,90	0,317	0,474	-0,025	0,170

параметрами ее микроструктуры. Проведена параметрическая идентификация предложенной модели. Проанализированы зависимости коэффициентов Пуассона рассматриваемых сред от параметров их микроструктуры. Показано, что с увеличением относительного размера частиц среды  $d/a$  коэффициент Пуассона монотонно убывает. В тех случаях, когда  $d/a \rightarrow 1$ , а параметр моментных взаимодействий  $K_2$  сравним с параметрами силовых взаимодействий  $K_1$  и  $K_3$ , коэффициент Пуассона  $\nu_1 = \nu_{\langle 110, 1\bar{1}0 \rangle}$  принимает отрицательные значения чаще, чем коэффициент  $\nu_2 = \nu_{\langle 111 \rangle}$ . Для ряда кристаллов с кубической решеткой приведены количественные оценки коэффициентов Пуассона, которые также подтверждают, что наиболее часто отрицательные значения принимает коэффициент Пуассона  $\nu_1 = \nu_{\langle 110, 1\bar{1}0 \rangle}$ . Результаты проведенных исследований могут служить теоретической основой для создания перспективных конструкционных материалов с ауксетическими свойствами.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Конек Д. А., Войцеховски К. В., Плескачевский Ю. М., Шилько С. В.** Материалы с отрицательным коэффициентом Пуассона (обзор) // Механика композиц. материалов и конструкций. 2004. Т. 10, № 1. С. 35–69.
2. **Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.** Ауксетическая механика кристаллических материалов // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2010. № 4. С. 43–62.
3. **Зубов В. Г., Фирсова М. М.** Об особенностях упругого поведения кварца в области  $\alpha$ – $\beta$ -перехода // Кристаллография. 1962. Т. 7, № 3. С. 469–471.
4. **Evans K. E.** Auxetic polymers: a new range of materials // Endeavour. 1991. V. 15, iss. 4. P. 170–174.
5. **Branka A. C., Heyes D. M., Wojciechowski K. W.** Auxeticity of cubic materials // Phys. Status Solidi. B. 2009. V. 246. P. 2063–2071.
6. **Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С.** Кубические ауксетики // Докл. АН. 2011. Т. 439, № 2. С. 184–187.
7. **Гольдштейн Р. В., Городцов В. А., Лисовенко Д. С., Волков М. А.** Отрицательный коэффициент Пуассона для кубических кристаллов и нано/микротрубок // Физ. мезомеханика. 2013. Т. 16, № 6. С. 13–31.
8. **Васильев А. А.** Анализ ауксетических свойств ячейки с частицами конечного размера // Письма о материалах. 2013. Т. 3, № 4. С. 288–291.
9. **Павлов И. С., Потапов А. И.** Двумерная модель зернистой среды // Изв. РАН. Механика твердого тела. 2007. № 2. С. 110–121.
10. **Ерофеев В. И., Павлов И. С.** Локализованные волны деформации в двумерной кристаллической среде с неплотной упаковкой частиц // Проблемы прочности и пластичности: Межвуз. сб. Н. Новгород: Нижегород. гос. ун-т, 2012. Вып. 74. С. 110–123.
11. **Федоров В. И.** Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
12. **Pavlov I. S.** Acoustic identification of the anisotropic nanocrystalline medium with non-dense packing of particles // Acoust. Phys. 2010. V. 56, N 6. P. 924–934.
13. **Беломестных В. Н., Соболева Е. Г.** Коэффициенты Пуассона щелочно-галогенидных кристаллов. 1. Галогениды лития // Изв. Том. политехн. ун-та. 2012. Т. 320, № 2. С. 137–139.
14. **Францевич И. Н.** Упругие постоянные и модули упругости металлов и неметаллов: Справ. / И. Н. Францевич, Ф. Ф. Воронов, С. А. Бакута. Киев: Наук. думка, 1982.
15. **Yildirim T., Harris A. B.** Lattice dynamics of solids  $C_{60}$  // Phys. Rev. B. 1992. V. 46, iss. 12. P. 7878–7896.