

УДК 536.25

ТЕПЛОВИЗИОННЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ ЛАМИНАРНО-ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕХОДА В РЭЛЕЙ-БЕНАРОВСКОЙ КОНВЕКЦИИ*

В. С. Бердников^{1, 2}, В. А. Гришков¹, К. Ю. Ковалевский^{1, 2},
В. А. Марков¹

¹ Федеральное государственное бюджетное учреждение науки
Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе
Сибирского отделения Российской академии наук,
630090, г. Новосибирск, просп. Академика Лаврентьева, 1

² Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Новосибирский государственный технический университет»,
630092, г. Новосибирск, просп. К. Маркса, 20
E-mail: berdnikov@itp.nsc.ru

Экспериментально исследованы течения в горизонтальных слоях жидкости со свободной верхней границей при однородном подогреве снизу. С использованием тепловизионного сканирования измерены поля температуры на свободной поверхности жидкости в ламинарных и турбулентных режимах рэлей-бенаровской конвекции. Компьютерная обработка тепловизионных фильмов позволила получить пространственно-временные характеристики ячеистых и многомасштабных конвективных течений.

Ключевые слова: тепловая гравитационно-капиллярная конвекция, ламинарно-турбулентный переход, поле температуры на свободной поверхности, тепловизор, статистические характеристики поля температуры.

Введение. Классическая конвекция Рэля — Бенара — это конвекция в плоских горизонтальных слоях жидкости, однородно подогреваемых снизу (при отсутствии горизонтального градиента температуры). В слоях с двумя жёсткими горизонтальными границами конвективное течение имеет термогравитационную природу, т. е. конвекция обусловлена силами плавучести вследствие зависимости от температуры плотности среды, находящейся в поле тяжести [1–3]. В слоях со свободной верхней границей при существенной зависимости коэффициента поверхностного натяжения от температуры развивается тепловая гравитационно-капиллярная конвекция [1, 2]. Конвекция в подогреваемых снизу горизонтальных слоях жидкости является одним из классических объектов при теоретическом и экспериментальном исследовании гидродинамической неустойчивости и процессов перехода к турбулентности [1–8]. Данная работа — это продолжение и развитие экспериментальных исследований термогравитационной и тепловой гравитационно-капиллярной конвекции в горизонтальном слое при подогреве снизу, проводимых в Институте теплофизики СО РАН [2, 4, 6–8]. Исследования направлены на изучение эволюции пространственной формы конвективного течения, полей скорости и температуры, теплообмена, сценариев ламинарно-турбулентных переходов в слоях со свободной границей и на оценку относительной роли сил плавучести и термокапиллярного эффекта в генерации вторичных течений различных масштабов [2–8].

*Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-08-00487) и Междисциплинарного интеграционного проекта Сибирского отделения РАН (№ 132-2012).

Цель данной работы — показать, что ламинарно-турбулентный переход имеет ярко выраженный стадийный характер. Появление новых вторичных течений (меньших масштабов) происходит при последовательности критических значений чисел Рэлея и Марангони, разделённых некоторыми интервалами. Результаты исследований применяются при разработке технологических процессов выращивания монокристаллов методами направленной кристаллизации [9, 10] и при решении задач экологии (например, при изучении процессов тепломассообмена у границы раздела вода — атмосфера в различных водоёмах [11]).

Экспериментальные исследования. В экспериментальных количественных исследованиях гидродинамики при измерениях полей скорости, как правило, используется визуализирующая мелкодисперсная твёрдая добавка — частицы-трассеры, имеющие форму чешуек или шариков [2, 4]. В этом случае, во-первых, возникает проблема определения степени влияния добавленных частичек на свойства жидкости, а, во-вторых, при свободной конвекции необходимо изучение их роли в качестве источника тепловых и гидродинамических возмущений [2]. Всегда встаёт вопрос о том, как такая добавка влияет на пороги устойчивости, на типы нарастающих возмущений и структуру вторичных мелкомасштабных течений [2]. Эти, с одной стороны, методические и, с другой стороны, фундаментальные вопросы физической гидродинамики исследованы плохо. Многие из них позволяет решить сравнительный анализ результатов исследования рэлей-бенаровской конвекции, полученных с использованием визуализации частичками-трассерами и цифровой видеокамеры [2, 8], и результатов, полученных с помощью тепловизионной камеры для измерения поля температуры в чистой жидкости. При одних и тех же граничных условиях проведены исследования на визуализированной жидкости, а затем на чистой жидкости с помощью тепловизора. Для задания и контроля граничных условий, сбора данных и их обработки в процессе эксперимента использовалась система, управляемая компьютером. Применение в экспериментах тепловизора позволило получить качественно новую информацию о поле температуры поверхности жидкости, а также полностью исключить возмущение исследуемого течения, убрав все термодары из объёма жидкости.

В данной работе представлены результаты исследований конвекции в слоях этилового спирта. Выбор обусловлен тем, что на свободной поверхности спирта термокапиллярный эффект проявляется в полной мере, а на поверхности воды при температурах, близких к комнатной, в реальных условиях он не проявляется вовсе и конвекция имеет термогравитационную природу и при наличии свободной поверхности [2].

Основными безразмерными параметрами, определяющими режим конвекции в слое с двумя жёсткими границами, являются число Рэлея $Ra = (\beta g / a \nu) \Delta T H^3$ и число Прандтля $Pr = \nu / a$. При наличии свободной границы добавляются число Марангони $Ma = (-\partial \sigma / \partial T) \Delta T H / \mu a$, характеризующее вклад термокапиллярного эффекта, и безразмерный коэффициент теплоотдачи со свободной поверхности — число Био $Bi = \alpha H / \lambda$ [1, 2]. Здесь использованы общепринятые обозначения: ΔT — перепад температуры между горизонтальными границами слоя; H — высота слоя; β — коэффициент объёмного расширения; g — ускорение свободного падения; $a = \lambda / \rho C_p$ — коэффициент температуропроводности; μ — коэффициент динамической вязкости; ν — коэффициент кинематической вязкости; ρ — плотность; C_p — теплоёмкость при постоянном давлении; λ — коэффициент теплопроводности; σ — коэффициент поверхностного натяжения жидкости; α — коэффициент теплоотдачи со свободной поверхности; в проведённых экспериментах $Bi \approx 1$ [2]. При расчётах чисел Рэлея и Марангони теплофизические параметры рабочей жидкости [12] были взяты при средней температуре слоя: $T_{cp} = (T_1 + T_2) / 2$.

Принципиальная схема экспериментального стенда показана на рис. 1. Слой рабочей жидкости (этиловый спирт с $Pr = 16$) находится в полости с горизонтальным размером 240×240 мм. Высота слоёв менялась от 2 до 30 мм. Далее представлены данные только для

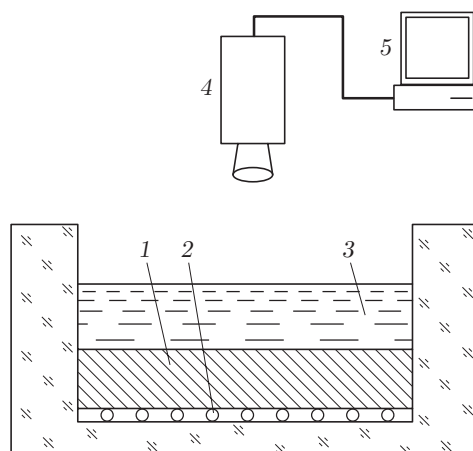


Рис. 1. Схема экспериментальной установки: 1 — дно ($T = \text{const}$), 2 — электроннагреватель, 3 — жидкость, 4 — тепловизионная камера, 5 — ПК для записи данных с тепловизора

трёх высот слоя: 3,8, 4,8 и 7 мм. Дно полости — медная пластина толщиной 15 мм, которая подогревалась снизу электроннагревателем и поддерживалась электронным контроллером при постоянной температуре $T_1 = 35 \text{ }^\circ\text{C}$ с точностью до $0,01 \text{ }^\circ\text{C}$ [4, 6]. Верхняя граница слоя свободная; над ней парогазовая среда — воздух с парами спирта при температуре окружающей среды, которая слабо изменялась в области около $20 \text{ }^\circ\text{C}$. Измерения проводились в квазистационарном режиме, характеризующемся температурой нижней границы T_1 , высотой слоя H и температурой внешней среды $T_{\text{вс}}$. Поля температуры на свободной поверхности исследуемой жидкости измерялись с помощью тепловизионной камеры «ИНФРАТЕРМ», разработанной и изготовленной в Институте физики полупроводников СО РАН. Скорость съёмки поля температуры 18,2 кадр./с, размер кадра 128×128 точек. В экспериментах размер снимаемого поля 130×130 мм, разрешение по температуре $0,03 \text{ }^\circ\text{C}$. Применение тепловизора в сравнении с измерениями микротермопарами в отдельных точках свободной поверхности [2, 10] позволило получить качественно новую информацию о поле температуры на поверхности жидкости, так как каждый калиброванный пиксель тепловизора равноценен термопарному датчику, расположенному на поверхности жидкости. После дополнительной калибровки тепловизора путём сравнения температуры на поверхности жидкости с термопарными измерениями появилась возможность полностью исключить возмущение исследуемого течения, убрав все термопары из объёма жидкости. Для определения перепада температуры между границами слоя жидкости из тепловизионных фильмов находилась средняя по площади и по времени температура свободной поверхности T_2 . Все пиксели тепловизора (компьютерного) были индивидуально прокалиброваны изготовителем прибора. Поэтому абсолютная температура устанавливается с заданной паспортной точностью каждым пикселем. Обработка всего тепловизионного фильма позволяет определить среднее (пространственно-временное) значение температуры поверхности и изменение средней температуры поверхности (по кадру) от времени:

$$\bar{X}(t) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j} x_{ij}(t),$$

где M — размер кадра. Также были вычислены средние отклонения от средней темпера-

туры границы слоя:

$$X^2(t) = \frac{1}{M^2} \sum_{i,j} \left(x_{ij}(t) - \frac{1}{F} \sum_t \bar{X}(t) \right)^2,$$

где F — число кадров в фильме.

Первичные экспериментальные данные, полученные с помощью тепловизора, представляют собой фильмы полей температуры поверхности жидкости, снятые в различных режимах. Каждый фильм содержал ~ 5000 кадров, в каждом кадре по 128×128 значений температуры. Обработка экспериментальных данных проводилась на ПК.

Приведём результаты обработки трёх тепловизионных фильмов, отдельные кадры из которых показаны на рис. 2. Эти кадры дают качественное представление об эволюции пространственной формы конвективного течения с ростом чисел Рэлея и Марангони (или с ростом перепада температуры между горизонтальными границами слоя и его высоты). Светлые области соответствуют более высокой температуре. На исходных кадрах присутствуют помехи типа полос, характерные для матричных приёмников (рис. 2, *a*), и помехи в виде битых пикселей, поэтому исходный сигнал фильтровался с помощью нелинейного медианного фильтра [12–14]. Для осуществления данной процедуры выбирался срединный пиксель $P(x, y)$ из его окрестности $N(x, y)$, состоящей из группы пикселей: 5 строк \times 5 столбцов. Фильтрованное значение пикселя определялось как $P_{\text{ф}}(x, y) = \text{median}\{N(x, y)\}$, где $\text{median}\{N(x, y)\}$ — число из окрестности, не меньшее половины чисел окрестности и не большее другой половины чисел окрестности. Иными словами, если отсортировать значения в окрестности пикселя и выбрать срединный элемент, он и будет являться медианой. Здесь и далее координаты (x, y) дискретные и привязаны к пикселям матрицы с номерами (i, j) , отсчёт которых начинался от левого нижнего угла по строкам и по столбцам. В нашем случае срединный элемент — это пиксель 13 из 25.

На рис. 2 очевидно сохранение первичного ячеистого течения и появление иерархии вторичных течений на его фоне с различными масштабами с ростом значений Ra и Ma . На рис. 2, *a* первичная ячеистая структура имеет полигональную форму и достаточно чёткие границы, видна также одна мода вторичного масштаба. Пространственная форма течения в отдельной конвективной ячейке представляет собой не просто восходящее течение в центре и опускающее на периферии, а уже демонстрирует развитую неустойчивость типа поперечных валов. Этот тип неустойчивости характерен и для валообразной пространственной формы течения в слоях с двумя жёсткими границами и соответствует переходу к бимодальной конвекции [2, 5]. Слабо выраженные радиально расходящиеся тёмные лучи на фоне ячеек — это области вторичных опускающих потоков охлаждённой жидкости.

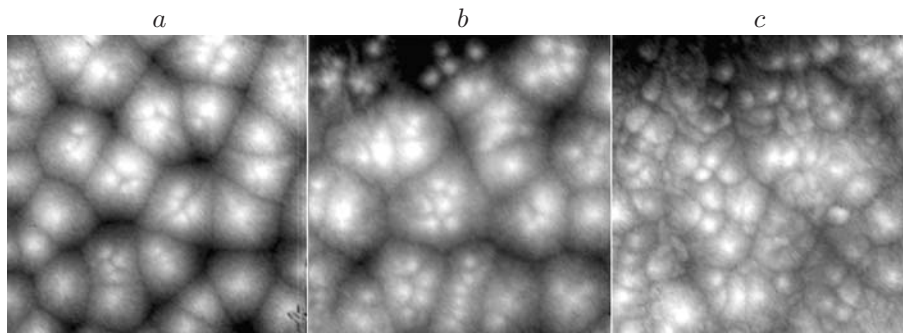


Рис. 2. Кадры из тепловизионных фильмов: *a* — $H = 3,8$ мм, $\Delta T = 0,51$ °C, $Ra = 5,71 \cdot 10^3$, $Ma = 1,9 \cdot 10^3$; *b* — $H = 4,8$ мм, $\Delta T = 0,7$ °C, $Ra = 8,6 \cdot 10^3$, $Ma = 3,25 \cdot 10^3$; *c* — $H = 7$ мм, $\Delta T = 1$ °C, $Ra = 3,21 \cdot 10^4$, $Ma = 7 \cdot 10^3$

Светлые области между лучами относятся к восходящим потокам нагретой жидкости. Течение вдоль свободной поверхности является комбинацией радиального растекания от центра первичной ячейки и азимутального течения из горячих зон в компактные опускающиеся потоки охлажденной жидкости (их центры соответствуют радиально расходящимся тёмным лучам). Ячеистая структура при данных значениях Ra и Ma уже слабо дрейфует в горизонтальной плоскости. В режимах, показанных на рис. 2, *b*, имеет место более развитое вторичное течение и чётко выраженное дробление масштаба. Первичные ячейки ещё хорошо различимы, но имеют большой разброс по горизонтальным размерам и по очертаниям внешних границ. В данном режиме скорости дрейфа первичных ячеек резко возрастают и их границы достаточно быстро деформируются. Ещё сильнее дрейф и быстрая деформация первичных ячеек наблюдаются в режиме, представленном на рис. 2, *c*, где течение имеет уже три масштаба.

Определение характерных размеров конвективных структур является довольно сложной задачей и может решаться несколькими способами. В данной работе использовался метод, основанный на двумерном преобразовании Фурье. Размеры структур определялись по следующей методике. Например, берётся исходное поле температуры. Неоднородность фона и помехи типа полос устранялись низкочастотной фильтрацией сначала по строкам, потом по столбцам. Параметр фильтрации выбирался отдельно для каждого фильма таким образом, чтобы он заведомо был больше наблюдаемых масштабов. Также фильтровался высокочастотный шум, связанный с дискретностью сигнала. Для уменьшения влияния ограниченности выборки на результирующий спектр к полученному полю применялось окно Хэмминга сначала по строкам, потом по столбцам.

Двумерное преобразование Фурье изображения размером 128×128 точек имеет плохую разрешающую способность для структур больше чем 32 точки, поэтому анализируемый фрагмент поля температуры помещался в центр нулевого поля размером 512×512 точек, что даёт уже приемлемую точность. После выполнения двумерного дискретного преобразования Фурье оставляем только его амплитудную составляющую и на её основе строим распределение по размерам.

Были получены распределения структур по размерам на свободной границе для различных высот слоя (рис. 3). В режиме при значениях $Ra = 5,71 \cdot 10^3$ и $Ma = 1,9 \cdot 10^3$ (см. рис. 2, *a*) можно видеть не только хорошо выделяющийся основной масштаб, размер которого в диаметре варьируется в пределах от 28 до 40 мм в зависимости от ячейки, но и образующиеся на нём вторичные масштабы с размерами 12–16 мм (рис. 3, *a*). Затем при $Ra = 8,6 \cdot 10^3$ и $Ma = 3,25 \cdot 10^3$ (см. рис. 2, *b*) наблюдается увеличение разброса по размерам основного и вторичного течений (рис. 3, *b*). При дальнейшем увеличении чисел Рэлея и Марангони происходит не просто увеличение горизонтального размера первичных ячеистых

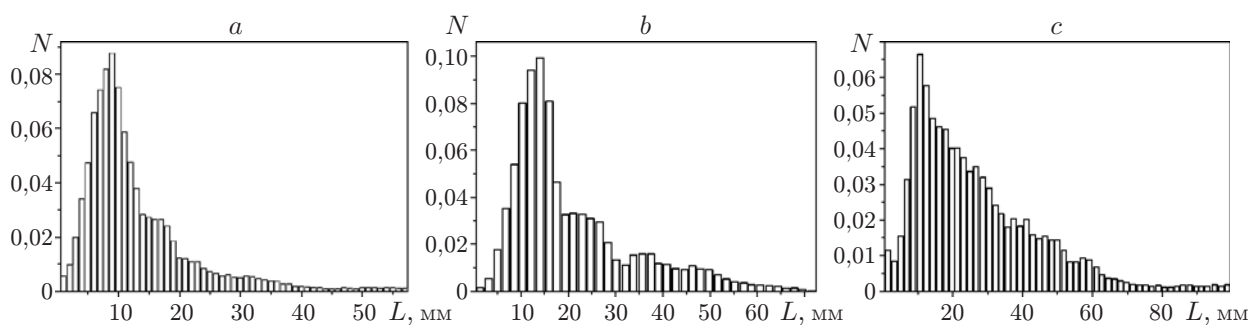


Рис. 3. Гистограммы распределений по размерам основных ячеек и вторичных структур на поверхности слоя жидкости (режимные параметры, как на рис. 2)

структур, но и их частичное слияние. При $Ra \geq 3,21 \cdot 10^4$ продолжается процесс слияния первичных структур с постепенным образованием пространственной формы, напоминающей валы, что характерно для термогравитационной конвекции в слоях с двумя жёсткими границами (рис. 3, *c*). Это свидетельствует о преобладающем влиянии термогравитационного механизма на формирование первичных структур. При $Ra \geq 3 \cdot 10^5$ присутствует широкий спектр масштабов. Таким образом, с ростом чисел Рэлея и Марангони наблюдается постепенное развитие турбулентного течения. Типичной особенностью процесса является «пространственная турбулентность»: первичные и вторичные структуры имеют широкие диапазоны характерных размеров и форм в плане (вид сверху). Поэтому на гистограммах распределений по размерам (см. рис. 3) нет чётко различимых вторичных пиков.

Для качественного анализа перестройки пространственной формы течения, нахождения порогов перехода и появления нового вторичного течения, определения характерных пространственных масштабов конвективного течения необходимо выделить границы ячеек, которые можно установить следующим образом. Имеем исходное двумерное поле температуры $T(x, y)$ на поверхности слоя жидкости и векторное поле локальных тепловых потоков $\mathbf{q} = -\lambda \text{grad}T(x, y)$. В свою очередь, источники теплового потока будут описываться функцией $f(x, y) = \text{div} \lambda \text{grad}T(x, y)$. Так как границы ячеек представляют собой холодные опускные потоки жидкости, т. е. стоки тепла, то функция $f(x, y)$ должна принимать значения локального минимума на границах ячеек. Задача сводится, таким образом, к поиску локальных минимумов функции $f(x, y)$. Если положить $\lambda = \text{const}$ и допустить, что значение константы на положение минимумов функции никак не влияет, то можно взять $\lambda = 1$, тогда

$$f(x, y) = \text{div} \text{grad}T(x, y) \rightarrow \min \quad \text{или} \quad f(x, y) = \text{div} \text{grad}T(x, y) \rightarrow \max .$$

Пример такого расчёта приведён на рис. 4. Исходное поле температуры (рис. 4, *a*) имеет относительно простую ячейковую двухмасштабную (бимодальную) структуру. Лапласиан исходного поля температуры (рис. 4, *b*) хорошо проявил локальные минимумы поля температуры (светлые области на рисунке). Представление этого изображения в бинарном виде позволяет выделить основной масштаб течения (рис. 4, *c*). Построение последовательности кадров в таком виде даёт возможность также оценить скорости дрейфа основных и вторичных течений и получить информацию об эволюции их формы во времени. Для режима течения, качественная форма которого показана на рис. 2, *a*, дрейф основного течения (крупномасштабных ячеек) происходит со средней скоростью 0,04 мм/с. Общий характер дрейфа — монотонное смещение ячеек. Средняя скорость дрейфа мелкомасштабных ячеек

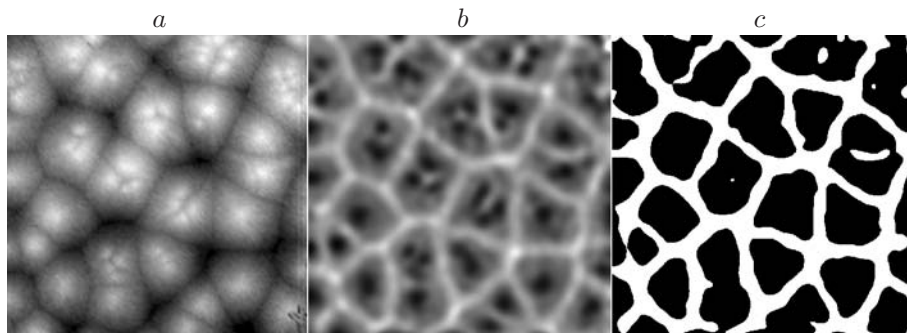


Рис. 4. Выделение масштаба основного течения на тепловизионном кадре: *a* — исходное поле температуры (режимные параметры, как на рис. 2, *a*); *b* — лапласиан поля температуры *a*; *c* — бинарное представление изображения *b*

на фоне основного масштаба составляет 0,36 мм/с. Для режима, приведённого на рис. 2, *b*, средняя скорость дрейфа крупномасштабных ячеек 0,077 мм/с. Средняя скорость дрейфа (сноса из восходящего потока первичного ячейистого течения в опускной поток охлаждённой на свободной поверхности жидкости) мелкомасштабных ячеек 0,43 мм/с. В режиме, представленном на рис. 2, *c*, средняя скорость дрейфа крупномасштабных ячеек 0,101 мм/с, мелкомасштабных ячеек 0,748 мм/с. Общий характер течения — множество ячеек с коротким временем жизни на фоне крупномасштабного первичного течения. Размеры и пространственная форма крупных ячеек (вид в плане) постоянно меняются. То же характерно для второй и третьей пространственных мод.

Дрейф ячеек, перенос вторичных структур основным течением и развитие колебаний в опускных и подъёмных потоках приводят к пульсациям температуры на поверхности и в глубине слоя жидкости. Важную информацию о временных масштабах пульсаций температуры можно получить из исследований спектров мощности температурных пульсаций [13]. Спектр мощности реального (дискретного) сигнала будет содержать сильно выраженные нулевую и инфранизкие частоты. Поэтому перед вычислением спектра мощности исходный сигнал подготавливался. Низкие частоты (в том числе и нулевая частота) убирались с помощью фильтра. Высокочастотный шум устранялся с помощью фильтра Гаусса, преимущество которого перед прямоугольным фильтром состоит в том, что сглаживается влияние далеко отстоящих периферийных пикселей на фильтрацию высокочастотных составляющих (появляющихся из-за дискретности исходного сигнала) при сглаживании сигнала на выделенном пикселе. Боковые «лепестки», наличие которых связано с конечностью выборки, ослаблялись применением к автокорреляционной функции окна Хэмминга [13–15]. В случае если выборка имела длину, не кратную степеням двойки, то она дополнялась нулями. Так как сигнал с одного пикселя не несёт в себе достаточной информации, то для обработки характера течения в целом сигналы со всех пикселей изображения сначала центрировались и нормировались на дисперсию, после чего суммировались.

На рис. 5 показан спектр мощности пульсаций температуры, вполне адекватно отображающий качественные черты исходного процесса, которые наблюдаются при просмотре фильма, соответствующего рис. 2, *a*. В спектре присутствует низкая частота, вызванная дрейфом крупномасштабной ячейистой структуры, и заметны частоты, связанные с возникновением вторичных структур, которые проносятся крупномасштабным течением относительно «неподвижного пикселя».

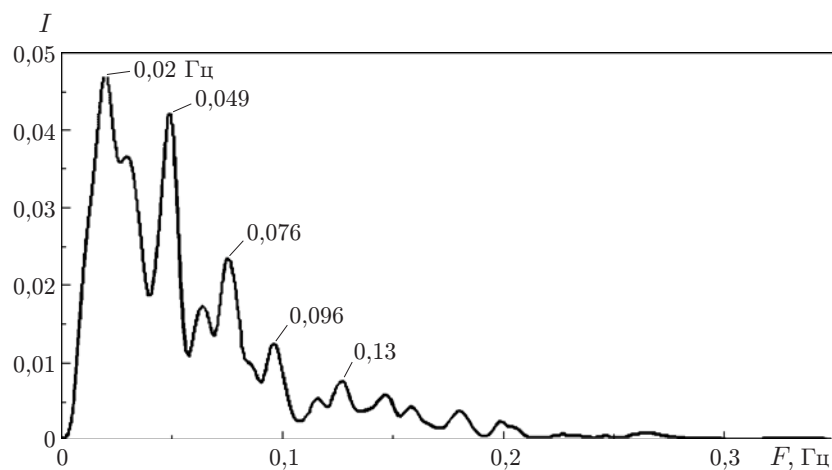


Рис. 5. Спектр мощности пульсаций температуры (режимные параметры, как на рис. 2, *a*)

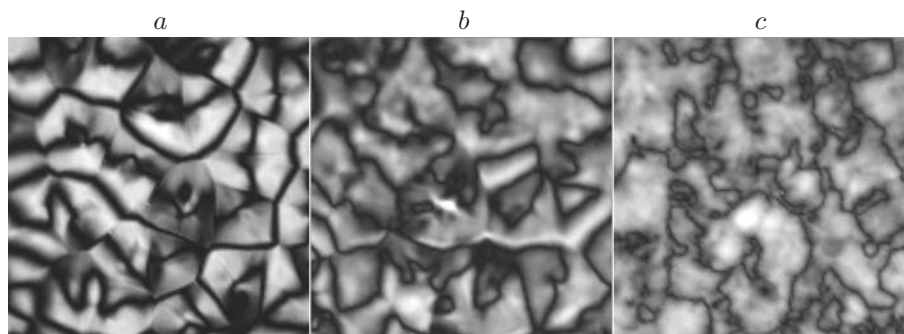


Рис. 6. Поля корреляции, построенные для трёх режимов, соответствующих фильмам на рис. 2, *a*—*c*: *a* — в точке (66,87); *b* — в точке (58,57); *c* — в точке (56,51)

Для выявления степени влияния ячеек друг на друга в данной работе строилось поле корреляции относительно зафиксированного пикселя с предварительной фильтрацией Гаусса с параметром, зависящим от анализируемого масштаба. С увеличением параметра фильтрации будут сглаживаться мелкие структуры. Зафиксировав одну точку поля температуры, можно посчитать коэффициент корреляции реализации температуры в ней с реализациями в других точках. Таким образом, определяется поле корреляции, которое несёт в себе информацию о зависимости температуры в выбранной точке от всех остальных точек. На рис. 6 представлены поля корреляций для кадров из трёх фильмов, изображённых на рис. 2. Тёмные области соответствуют модулю коэффициента корреляции, равному 0, светлые области — 1. На рис. 6, *a* показано поле корреляций с выраженными крупными ячейками, но уже с достаточным количеством мелкомасштабных структур. Мелкие ячейки делают поле корреляций более размытым из-за их короткого срока жизни. В результате на рис. 6, *b* можно заметить больше тёмных областей, соответствующих малому коэффициенту корреляции. Поле корреляций, изображённое на рис. 6, *c*, приняло ещё более размытый вид из-за большого числа мелкомасштабных структур, интенсивного дрейфа и быстрой деформации границ ячеек всех трёх масштабов.

Заключение. Применение тепловизионной камеры позволило получить информацию о полях и градиентах температуры на свободной поверхности жидкости в стационарных и нестационарных режимах течения. Поля температуры на поверхности тонких слоёв показывают, что в слоях этилового спирта при высотах 1–2 мм образуются классические шестиугольные ячейки Бенара, при увеличении толщины слоя до 6 мм — полигональная ячеистая структура со всё большим разбросом горизонтальных размеров. С увеличением высоты слоя или перепада температуры между горизонтальными границами слоя структура течения усложняется: на фоне течения основного масштаба появляются вторичные течения меньших горизонтальных размеров. Для определения серии критических значений чисел Рэлея и Марангони требуются дополнительные исследования. Но из полученных данных ясно, что через некоторые интервалы значений чисел Рэлея и Марангони на фоне первичных ячеек сначала возникает вторичное течение, затем уже на его фоне появляются ещё более мелкие ячейки и т. д. Наблюдения структуры течения сбоку (по высоте слоя) показывают, что вторичный масштаб раньше возникает вблизи свободной поверхности. Уже при появлении первого вторичного течения структура общего течения зависит от времени. Прослежена эволюция масштабов течения и эволюция спектров мощности пульсаций температуры на свободной поверхности жидкости с ростом чисел Рэлея и Марангони. Сравнение тепловизионных фильмов с видеофильмами визуализированной жидкости и синхронных записей температуры с микротермопары [2] показывает, что гид-

родинамическая картина течения, позволяющая определить границы холодных опускающих потоков жидкости на свободной поверхности, абсолютно совпадает с полем температуры. Частицы-трассеры в форме чешуек размером около 10 мкм не искажают пространственной формы течения даже мелкомасштабных вихрей размером около 1 мм.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М.: Наука, 1972. 392 с.
2. Бердников В. С., Кирдяшкин А. Г. Структура свободно-конвективного течения в горизонтальном слое жидкости при различных граничных условиях // Структура пристенного пограничного слоя: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1978. С. 4–45.
3. Гетлинг А. В. Конвекция Рэлея — Бенара. М.: Эдиториал УРСС, 1999. 248 с.
4. Бердников В. С., Марков В. А., Ким О. В. Термогравитационная конвекция в плоском горизонтальном и наклонном слоях жидкости, подогреваемых снизу // Структура вынужденных и термогравитационных течений: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1983. С. 122–146.
5. Буссе Ф. Г. Переход к турбулентности в конвекции Рэлея — Бенара // Гидродинамические неустойчивости и переход к турбулентности /Под ред. Х. Суинни, Дж. Голлаба. М.: Мир, 1984. С. 124–168.
6. Бердников В. С., Марков В. А. Теплопередача и статистические характеристики поля температуры в горизонтальном подогреваемом снизу слое жидкости // Изв. АН БССР. Сер. физ.-энерг. наук. 1986. № 1. С. 96–102.
7. Бердников В. С., Марков В. А., Малышев В. И. Экспериментальные исследования тепловой гравитационной конвекции в горизонтальных слоях жидкости при стационарных и нестационарных граничных условиях // Структура гидродинамических потоков (вынужденное течение, тепловая конвекция): Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1986. С. 39–67.
8. Бердников В. С., Малышев В. И. Появление и развитие локальных колебательных мод в конвекции Рэлея — Бенара // Теплообмен и трение в однофазных потоках: Сб. науч. тр. Новосибирск: Ин-т теплофизики СО АН СССР, 1988. С. 27–45.
9. Полежаев В. И. Гидродинамика, тепло- и массообмен при росте кристаллов // Итоги науки и техники. Сер. Механика жидкости и газа. М.: ВИНТИ, 1984. Т. 18. С. 198–269.
10. Бердников В. С. Гидродинамика и теплообмен при вытягивании кристаллов из расплавов. Ч. 1. Экспериментальные исследования режима свободной конвекции // Изв. вузов. Сер. Материалы электронной техники. 2007. № 4. С. 19–27.
11. Бортковский Р. С., Бютнер Э. К., Малевский-Малевич С. П., Преображенский Л. Ю. Процессы переноса вблизи поверхности раздела океан — атмосфера. Л.: Гидрометеоздат, 1974. 240 с.
12. Варгафтик Н. Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Наука, 1972. 720 с.
13. Дженкинс Г., Ваттс Д. Спектральный анализ и его приложения. М.: Мир, 1971. 317 с.

14. **Фильтрация** изображений [Лекция] // Интернет-университет информационных технологий. Курс «Алгоритмические основы растровой графики» /авт.: Д. В. Иванов, А. А. Хропов, Е. П. Кузьмин и др.
URL: http://www.intuit.ru/department/graphics/rastrgraph/8/rastrgraph_8.html (дата обращения: 28.04.2012).
15. **Обобщение** медианного фильтра // Информационный ресурс «Хабрахабр».
URL: http://habrahabr.ru/blogs/image_processing/114551 (дата обращения: 28.04.2012).

Поступила в редакцию 28 апреля 2012 г.
