УДК 534.1

РЕКОНСТРУКЦИЯ НЕОДНОРОДНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОПЕРЕЧНО-НЕОДНОРОДНОГО СЛОЯ ПРИ АНТИПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ

А. О. Ватульян, П. С. Углич*

Южный федеральный университет, 344006 Ростов-на-Дону
* Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН, 362027 Владикавказ
E-mails: vatulyan@math.rsu.ru, puglich@inbox.ru

Рассмотрены прямая и обратная задачи об антиплоских вынужденных колебаниях поперечно-неоднородного упругого слоя. Механические характеристики слоя (плотность и модуль сдвига) считаются функциями поперечной координаты. Предложена методика решения прямой задачи, основанная на использовании интегрального преобразования Фурье и решении краевой задачи методом пристрелки. Рассмотрена обратная задача об определении законов распределения механических параметров по известной информации о волновом поле на части верхней поверхности. Построены итерационные последовательности интегральных уравнений. Приведены результаты численных экспериментов, даны рекомендации по оптимальному выбору частоты колебаний и отрезка, на котором определяются перемещения.

Ключевые слова: обратные коэффициентные задачи, слоистые структуры.

Введение. Задачи о восстановлении механических характеристик часто встречаются в механике, геофизике, а также при идентификации свойств различных биологических и функционально-градиентных материалов. В выполненных ранее работах обратная задача решается либо в трансформантах [1], для чего необходима информация о волновом поле на всей поверхности слоя, либо путем сведения к одномерной задаче, аналогичной задаче для стержней [2, 3].

Существуют также другие методы решения задачи идентификации неоднородных слоистых структур. В частности, в работе [4] описывается подход к восстановлению скорости волн в неоднородном полупространстве, причем поле в полупространстве удовлетворяет волновому уравнению, а скорость волны зависит от вертикальной координаты. При восстановлении использовалась информация о перемещении в одной точке границы полупространства. В работах [5, 6] построены алгоритмы восстановления скорости волн и источника для нестационарного волнового уравнения в полупространстве и слое, в случае если на границе задано волновое поле в трансформантах. Существует ряд работ, в которых рассматривается уравнение установившихся колебаний, в качестве исходной информации используется волновое поле, решение коэффициентной обратной задачи ищется в заданном классе функций, параметризуемых конечным числом параметров, и задача сводится к минимизации невязки (см., например, [7]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 13-01-00196).

© Ватульян А. О., Углич П. С., 2014

В настоящей работе обратная задача решается в оригиналах, поэтому необходимо иметь информацию о волновом поле лишь на части верхней поверхности слоя.

1. Постановка задачи. Рассмотрим установившиеся вынужденные антиплоские колебания упругого слоя, занимающего область $\{(x_1, x_2)\colon -\infty < x_1 < \infty,\ 0 \leqslant x_2 \leqslant h\}$, где h — толщина слоя.

Уравнение колебаний слоя в состоянии антиплоской деформации имеет вид

$$\sigma_{13,1} + \sigma_{23,2} + \rho\omega^2 u = 0, \tag{1}$$

где $\rho = \rho(x_2)$ — плотность слоя; ω — частота колебаний; u — амплитуда смещения; напряжения и производные от смещений связаны законом Гука:

$$\sigma_{13} = \mu u_{,1}, \qquad \sigma_{23} = \mu u_{,2}. \tag{2}$$

Здесь $\mu = \mu(x_2)$ — модуль сдвига. Нижняя поверхность слоя жестко защемлена, а на верхней задана касательная нагрузка:

$$u\big|_{x_2=0} = 0, \qquad \sigma_{23}\big|_{x_2=h} = p(x_1). \tag{3}$$

Постановку задачи замыкают условия излучения, сформулированные на основе принципа предельного поглощения [8].

Введем следующие безразмерные величины:

$$\begin{gathered} x_i = h\bar{x}_i, \quad u = h\bar{u}, \quad \mu = \mu(0)\bar{\mu}, \quad \rho = \rho(0)\bar{\rho}, \quad \sigma_{ij} = \mu(0)\bar{\sigma}_{ij}, \\ \varkappa^2 = \rho(0)\omega^2 h^2 \mu^{-1}(0), \qquad p(x_1) = \mu(0)\bar{p}(x_1) \end{gathered} \tag{4}$$

(величины с чертой являются безразмерными). Далее черту над величинами опускаем.

2. Решение прямой задачи. Для решения задачи (1)–(3) используем преобразование Фурье в виде

$$\tilde{u}(\alpha, x_2) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} u(x_1, x_2)\, \mathrm{e}^{i\alpha x_1}\, dx_1.$$

Исключая из преобразованных уравнений (1), (2) величину $\tilde{\sigma}_{13}$, задачу (1)–(3) сведем к следующей краевой задаче для канонической системы обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\tilde{u}$, $\tilde{\sigma}_{23}$:

$$\begin{gathered} \tilde{u}' = \tilde{\sigma}_{23}\mu^{-1}, \qquad \tilde{\sigma}_{23}' = (\alpha^2\mu - \rho\varkappa^2)\tilde{u}, \\ \tilde{u}\big|_{x_2=0} = 0, \quad \tilde{\sigma}_{23}\big|_{x_2=1} = \tilde{p}(\alpha), \quad \tilde{p}(\alpha) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} p(x_1)\, \mathrm{e}^{i\alpha x_1}\, dx_1. \end{gathered} \tag{5}$$

Краевая задача (5) может быть решена с помощью метода пристрелки. Обозначим через $U_i(\alpha, x_2)$ и $\Sigma_i(\alpha, x_2)$ решения задач Коши для системы (5) при следующих начальных условиях:

$$\begin{gathered} U_1(\alpha, 0) = 1, \qquad \Sigma_1(\alpha, 0) = 0, \\ U_2(\alpha, 0) = 0, \qquad \Sigma_2(\alpha, 0) = 1. \end{gathered}$$

Тогда решение задачи (5) имеет вид

$$\tilde{u} = \tilde{p}(\alpha)\, \frac{U_2(\alpha, x_2)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}, \qquad \tilde{\sigma}_0 = \tilde{p}(\alpha)\, \frac{\Sigma_2(\alpha, x_2)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}. \tag{6}$$

Поле смещений строится с помощью обратного преобразования Фурье

$$u(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_\sigma \tilde{p}(\alpha) \, \frac{U_2(\alpha, x_2)}{\Sigma_2(\alpha, 1)} \, \mathrm{e}^{-i\alpha x_1} \, d\alpha, \tag{7}$$

где контур σ выбирается в соответствии с условиями излучения, и может быть определено по формуле (7) путем численного интегрирования либо с помощью теории вычетов. В [8, 9] доказано, что особенности подынтегральной функции представляют собой счетное множество однократных полюсов α_n, конечное число которых являются вещественными, а остальные — чисто мнимыми, и могут быть найдены из уравнения

$$\Sigma_2(\alpha, 1) = 0. \tag{8}$$

При $p = \delta(x_1)$, $x_1 > 0$ выражения для волнового поля принимают вид

$$u(x_1, x_2) = i \sum_{n=0}^{\infty} \Big\{ \frac{U_2(\alpha, x_2)}{[\Sigma_2(\alpha, 1)]'_\alpha} \Big\} \Big|_{\alpha = \alpha_n} \mathrm{e}^{i\alpha_n x_1} \,. \tag{9}$$

В случае неоднородного слоя значение выражения $[\Sigma_2(\alpha, 1)]'_\alpha$ может быть найдено из решения задачи Коши вида

$$\begin{gathered} \frac{d}{dx_2} \, \tilde{u} = \tilde{\sigma}_{23} \mu^{-1}, \qquad \frac{d}{dx_2} \, \tilde{\sigma}_{23} = (\alpha^2 \mu - \rho \varkappa^2) \tilde{u}, \\ \frac{d}{dx_2} \, \tilde{u}'_\alpha = (\tilde{\sigma}_{23})'_\alpha \mu^{-1}, \qquad \frac{d}{dx_2} \, (\tilde{\sigma}_{23})'_\alpha = 2\alpha \tilde{u} + (\alpha^2 \mu - \rho \varkappa^2) \tilde{u}'_\alpha, \\ \tilde{u}\big|_{x_2 = 0} = \tilde{u}'_\alpha\big|_{x_2 = 0} = (\tilde{\sigma}_{23})'_\alpha\big|_{x_2 = 0} = 0, \qquad \tilde{\sigma}_{23}\big|_{x_2 = 0} = 1. \end{gathered} \tag{10}$$

Система уравнений (10) получена из системы (5) путем дифференцирования по α. Начальные условия совпадают с начальными условиями для U_2, Σ_2, к которым добавлены однородные начальные условия для $\tilde{u}'_\alpha$ и $(\tilde{\sigma}_{23})'_\alpha$, также найденные путем дифференцирования. В работе [10] проведено сравнение результатов расчетов волновых полей по формуле (9) с результатами, полученными по формуле (7) путем непосредственного численного интегрирования, и показано, что при $\varkappa < 10$ различие результатов, найденных разными способами, не превышает 2 %.

3. Обратная задача. Рассмотрим обратную задачу определения переменных характеристик. Предположим, что на некотором участке верхней поверхности $[c, d]$ $(c > 0)$ поле перемещений известно, требуется определить закон распределения механических характеристик $\mu(x_2)$ и $\rho(x_2)$. Известно, что задачи такого типа существенно нелинейны и одним из методов их исследования является метод линеаризации [11].

Пусть $\varepsilon > 0$ — формальный малый параметр. Разложим искомую функцию и функции, описывающие изменения плотности и модуля сдвига, в ряд по ε:

$$\begin{gathered} \rho(x_2) = \rho_0(x_2) + \varepsilon \rho_1(x_2) + \ldots, \qquad \mu(x_2) = \mu_0(x_2) + \varepsilon \mu_1(x_2) + \ldots, \\ \tilde{u}(\alpha, x_2) = \tilde{u}_0(\alpha, x_2) + \varepsilon \tilde{u}_1(\alpha, x_2) + \ldots, \qquad \tilde{\sigma}_{23}(\alpha, x_2) = \tilde{\sigma}_0(\alpha, x_2) + \varepsilon \tilde{\sigma}_1(\alpha, x_2) + \ldots. \end{gathered} \tag{11}$$

Подставим разложения (11) в (5) и соберем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Группируя коэффициенты при ε^0, ε^1, получаем соответственно

$$\begin{gathered} \tilde{u}'_0 = \tilde{\sigma}_0 \mu_0^{-1}, \qquad \tilde{\sigma}'_0 = (\mu_0 \alpha^2 - \rho_0 \varkappa^2) \tilde{u}_0, \\ \tilde{u}_0(x_1, 0) = 0, \qquad \tilde{\sigma}_0(x_1, 1) = \tilde{p}(\alpha); \end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered} \tilde{u}'_1 = \tilde{\sigma}_1 \mu_0^{-1} - \mu_1 \mu_0^{-2} \tilde{\sigma}_0, \qquad \tilde{\sigma}'_1 = (\mu_0 \alpha^2 - \rho_0 \varkappa^2) \tilde{u}_1 + (\mu_1 \alpha^2 - \rho_1 \varkappa^2) \tilde{u}_0, \\ \tilde{u}_1(x_1, 0) = \tilde{\sigma}_1(x_1, 1) = 0. \end{gathered} \tag{13}$$

Решение задачи (12) имеет вид (6). Рассмотрим задачу в первом приближении (13). В соответствии с методом вариации произвольных постоянных построим решение в виде

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1(x_2) &= C_1(x_2)U_1(\alpha, x_2) + C_2(x_2)U_2(\alpha, x_2),\\ \tilde{\sigma}_1(x_2) &= C_1(x_2)\Sigma_1(\alpha, x_2) + C_2(x_2)\Sigma_2(\alpha, x_2).\end{aligned} \tag{14}$$

Подставляя (14) в уравнение (13), получаем систему уравнений относительно C_1', C_2', решение которой имеет вид

$$C_1' = F_1(x_2)\Sigma_2(\alpha, x_2) - F_2(x_2)U_2(\alpha, x_2), \qquad C_2' = F_2(x_2)U_1(\alpha, x_2) - F_1(x_2)\Sigma_1(\alpha, x_2),$$

где $F_1(x_2) = -\mu_1\tilde{\sigma}_0/\mu_0^2$; $F_2(x_2) = (\mu_1\alpha^2 - \rho_1\varkappa^2)\tilde{u}_0$.

Общее решение задачи (13) принимает вид

$$\begin{aligned}\tilde{u}_1 &= \int_0^{x_2} F_1(\xi)[U_1(\alpha, x_2)\Sigma_2(\alpha, \xi) - U_2(\alpha, x_2)\Sigma_1(\alpha, \xi)]\, d\xi +\\ &\quad + \int_0^{x_2} F_2(\xi)[U_2(\alpha, x_2)U_1(\alpha, \xi) - U_1(\alpha, x_2)U_2(\alpha, \xi)]\, d\xi + AU_1(\alpha, x_2) + BU_2(\alpha, x_2),\\ \tilde{\sigma}_1 &= \int_0^{x_2} F_1(\xi)[\Sigma_2(\alpha, \xi)\Sigma_1(\alpha, x_2) - \Sigma_1(\alpha, \xi)\Sigma_2(\alpha, x_2)]\, d\xi +\\ &\quad + \int_0^{x_2} F_2(\xi)[U_1(\alpha, \xi)\Sigma_2(\alpha, x_2) - U_2(\alpha, \xi)\Sigma_1(\alpha, x_2)]\, d\xi + A\Sigma_1(\alpha, x_2) + B\Sigma_2(\alpha, x_2).\end{aligned} \tag{15}$$

Подставляя (15) в граничные условия (13), определим константы A, B и найдем выражение для $\tilde{u}$ при $x_2 = 1$. Обращая это выражение при $p(x_1) = \delta(x_1)$, получаем

$$\begin{aligned}u_1(x_1, 1) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^1 \mu_1(\xi)\, d\xi \int_\sigma \Big[\frac{1}{\mu_0^2(\xi)}\Big(\frac{\Sigma_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}\Big)^2 + \alpha^2\Big(\frac{U_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}\Big)^2\Big]\, \mathrm{e}^{-i\alpha x_1}\, d\alpha +\\ + \frac{\varkappa^2}{2\pi}\int_0^1 \rho_1(\xi)\, d\xi \int_\sigma \Big(\frac{U_2(\alpha, \xi)}{\Sigma_2(\alpha, 1)}\Big)^2 \mathrm{e}^{-i\alpha x_1}\, d\alpha.\end{aligned} \tag{16}$$

Соотношение (16) есть линейное операторное уравнение, связывающее поправки к физическим характеристикам и поправки для поля смещений. Ядра в уравнении (16) выражаются через интегралы вида

$$I = \frac{1}{2\pi}\int_\sigma \Big(\frac{\varphi(\alpha, \xi)}{\psi(\alpha)}\Big)^2 \mathrm{e}^{-i\alpha x_1}\, d\alpha,$$

которые могут быть найдены с помощью теории вычетов по формуле

$$\begin{aligned}I &= i\sum_{n=0}^{\infty} R_n\, \mathrm{e}^{i\alpha_n x_1} \qquad (x_1 > 0),\\ R_n &= b_1^{-2}\{2a_0(\xi)[a_1(\xi) - a_0(\xi)b_1^{-1}b_2] - ix_1a_0^2(\xi)\},\end{aligned} \tag{17}$$

где $a_0(\xi) = \varphi(\alpha_n, \xi)$; $a_1(\xi) = \varphi'_\alpha(\alpha_n, \xi)$; $b_1 = \psi'(\alpha_n)$; $b_2 = 0{,}5\psi''(\alpha_n)$; α_n — корень дисперсионного уравнения (8). В случае однородного слоя величины a_i, b_i могут быть найдены аналитически, в случае слоя, описываемого уравнением (16), — из решения построенной аналогично (10) задачи Коши, к которой добавлены уравнения и начальные условия для $(U_2)''_{\alpha\alpha}$ и $(\Sigma_2)''_{\alpha\alpha}$.

Рассмотрим уравнение (16). Будем считать, что $\mu(x_2)$ — известная постоянная функция, требуется найти $\rho(x_2)$. Тогда уравнение (16) принимает вид

$$f - f^0 = \frac{\varkappa^2}{2\pi} \int\limits_0^1 \rho_1(\xi)\, d\xi \int\limits_\sigma \Big(\frac{U_2(\alpha,\xi)}{\Sigma_2(\alpha,1)}\Big)^2 \mathrm{e}^{-i\alpha x_1}\, d\alpha, \qquad c \leqslant x_1 \leqslant d, \tag{18}$$

где f — получаемое поле перемещений; f^0 — поле перемещений, соответствующее распределению $\rho_0(x_2)$.

Выберем некоторое постоянное начальное приближение ρ_0. Решая систему (5) и обращая преобразование Фурье, находим u_0, σ_0. Считая перемещение u_1 равным разности между полученными перемещениями и перемещениями u_0, решаем уравнение (18) и находим ρ_1.

Добавляя найденную поправку ρ_1 к функции ρ_0, повторяем итерационную процедуру до тех пор, пока очередная поправка ρ_1 не станет пренебрежимо малой или количество итераций не превысит некоторое заданное количество. Аналогично на основе уравнения (16) решается задача определения μ.

4. Результаты численных расчетов. Ниже приводятся результаты решения обратной задачи. В качестве исходных данных использовалась вещественная часть перемещения на участке верхней поверхности $[c, d]$. При этом для вычисления перемещений, а также для отыскания правых частей итерационных уравнений использовалась формула (9). Для вычисления ядер интегральных уравнений применялась формула (17). При вычислении ядер и правых частей законы распределения механических характеристик аппроксимировались ломаной. Интегралы в уравнении (16) вычислялись по формуле Симпсона. Для решения итерационных уравнений использовался метод регуляризации Тихонова [12], система линейных алгебраических уравнений, полученная при дискретизации регуляризованного уравнения, решалась с помощью метода Воеводина с автоматическим подбором параметра регуляризации по невязке [13].

В табл. 1 приведено количество итераций N, необходимых для определения плотности, в зависимости от волнового числа и амплитуды неоднородности η, а также относительная погрешность определения восстановленной и точной функций в случае $\mu = \mathrm{const}$,

Таблица 1

Зависимость количества итераций от волнового числа и амплитуды неоднородности при $\mu = \mathrm{const}$, $\rho = \rho(0)(1 + \eta \sin \pi x_2)$

η	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa = 1$		$\varkappa = 2$		$\varkappa = 3$		$\varkappa = 5$	
			N	δ, %	N	δ, %	N	δ, %	N	δ, %
0,10	1,4935	4,5448	9	9,03	8	5,60	7	5,45	9	4,33
0,20	1,4264	4,3965	10	7,83	9	5,71	7	5,52	11	3,12
0,30	1,3675	4,2635	11	7,46	10	5,83	12	3,84	13	2,75
0,40	1,3153	4,1430	12	7,18	11	5,88	13	3,32	13	2,65
0,50	1,2686	4,0330	12	7,01	12	5,92	15	2,58	14	2,55
0,75	1,1704	3,7941	14	6,74	17	3,81	17	1,87	19	2,08
1,00	1,0920	3,5945	15	6,52	20	3,51	18	1,85	50	1,65

Таблица 2

Зависимость количества итераций от волнового числа и амплитуды неоднородности при $\rho = \mathrm{const}$, $\mu = \mu(0)(1 + \eta \sin \pi x_2)$

η	$\varkappa_1$	$\varkappa_2$	$\varkappa = 1$		$\varkappa = 2$		$\varkappa = 3$		$\varkappa = 4$	
			N	δ, %	N	δ, %	N	δ, %	N	δ, %
0,10	1,6193	4,852 89	6	4,40	7	2,59	6	2,76	5	5,83
0,20	1,6650	4,9989	7	4,05	10	2,82	7	2,99	7	4,87
0,30	1,7084	5,1334	6	3,99	10	3,04	9	2,60	9	3,52
0,40	1,7497	5,2628	8	4,69	13	3,28	—	—	9	3,16
0,50	1,7822	5,3878	9	4,61	14	3,93	11	2,70	13	2,91
0,75	1,8812	5,6834	11	5,11	14	3,93	14	6,15	11	3,22
1,00	1,9653	5,9587	12	4,50	11	11,43	13	4,82	17	4,54

$\rho = \rho(0)(1 + \eta \sin \pi x_2)$, в табл. 2 — те же параметры в случае $\rho = \mathrm{const}$, $\mu = \mu(0)(1 + \eta \sin \pi x_2)$. Итерации продолжались до тех пор, пока норма разности между перемещениями, полученными на текущей итерации, и перемещениями, вычисленными на предыдущей итерации, не превысила 10^{-4} (см. табл. 1), либо 10^{-3} (см. табл. 2). Под нормой разности понимается величина

$$\|f\| = \|f(x_1) - f^0(x_1)\| = \Big(\int\limits_c^d (f(x_1) - f^0(x_1))^2 \, dx_1 \Big)^{1/2}.$$

Также в табл. 1, 2 приведены значения первых двух критических частот $\varkappa_1$, $\varkappa_2$. Частота колебаний называется критической, если выполняется равенство $\Sigma_2(0,1) = 0$ и решение исходной задачи не может быть построено в виде установившихся колебаний. Результаты вычислительных экспериментов показали, что при частотах, близких к критическим, восстановление параметров невозможно.

В случае восстановления плотности выражение для относительной погрешности имеет вид

$$\delta = \frac{\|\rho_{\mathrm{I}}(x_2) - \rho_{\mathrm{II}}(x_2)\|}{\|\rho_{\mathrm{II}}(x_2)\|} \cdot 100~\%, \tag{19}$$

где $\rho_{\mathrm{I}}(x_2)$ — распределение плотности, полученное в результате решения обратной задачи; $\rho_{\mathrm{II}}(x_2)$ — точное значение плотности. В формуле (19) в качестве нормы используется выражение

$$\|\rho\| = \Big(\int\limits_0^1 (\rho(x_2))^2 \, dx_2 \Big)^{1/2}.$$

В случае восстановления μ выражение для δ имеет вид, аналогичный (19).

На рис. 1, 2 представлены результаты численных экспериментов по восстановлению механических параметров, а именно плотности и модуля сдвига. По оси ординат отложена разность между значением механического параметра и постоянным начальным приближением. Во всех экспериментах, результаты которых приведены на рис. 1, 2, исходной информацией для восстановления служила вещественная часть перемещений на отрезке $[0{,}01; 1{,}00]$.

Следует отметить, что в результате вычислительных экспериментов восстанавливаются гладкие функции, близкие к функциям, восстанавливаемым по среднеквадратичному отклонению.

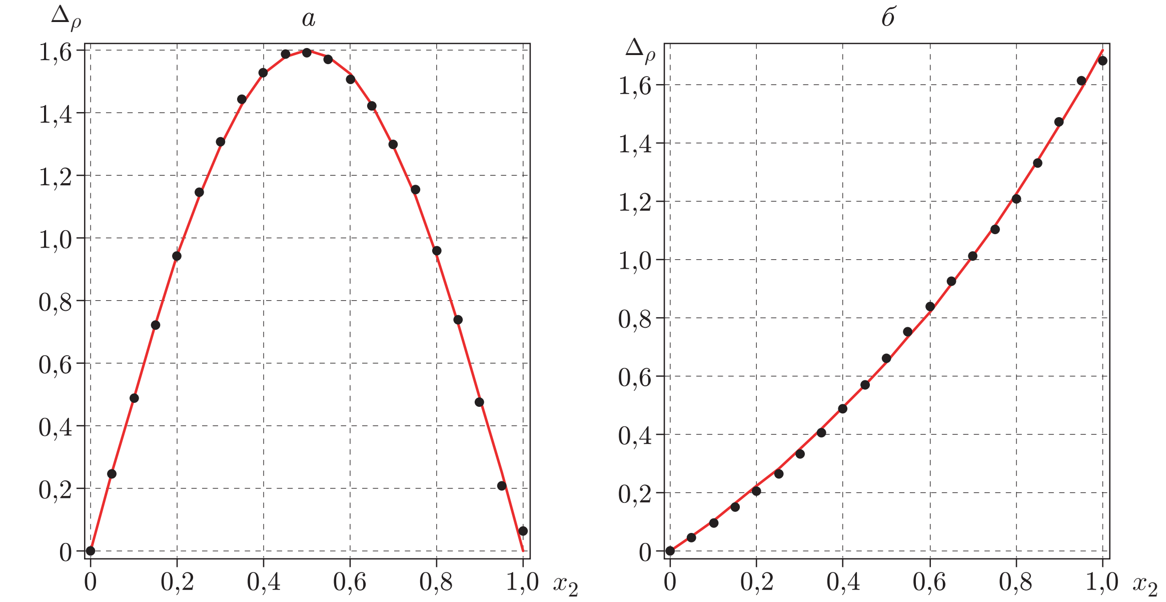

Рис. 1. Результаты экспериментов по восстановлению плотности:
а — $\mu = \text{const}$, $\rho = \rho(0)(1 + 1{,}6 \sin \pi x_2)$, $\varkappa = 3$, $N = 20$, $\delta = 1{,}8153$ %, $\|f\| = 0{,}9 \cdot 10^{-4}$, *б* — $\mu = \text{const}$, $\rho = \rho(0)\, \mathrm{e}^{x_2}$, $\varkappa = 2{,}5$, $N = 10$, $\delta = 1{,}7754$ %, $\|f\| = 0{,}74 \cdot 10^{-4}$; сплошная линия — точные значения функции, точки — восстановленные значения

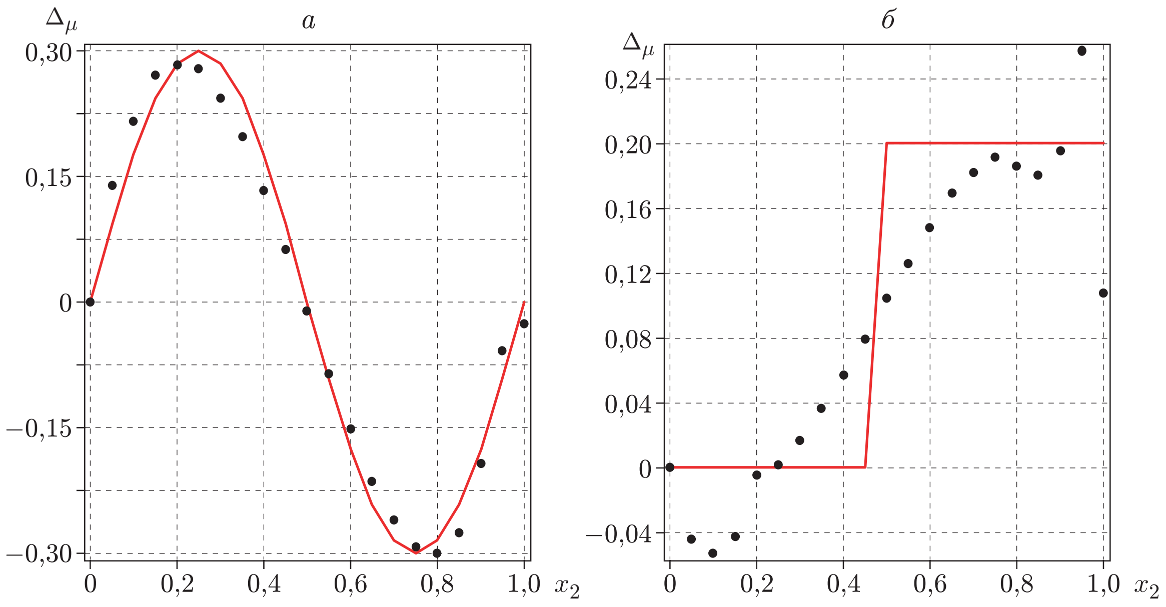

Рис. 2. Результаты экспериментов по восстановлению модуля сдвига:
а — $\rho = \text{const}$, $\mu = \mu(0)$ при $x_2 < 0{,}5$ и $\mu = 1{,}2\mu(0)$ при $x_2 \geqslant 0{,}5$, $\varkappa = 2$, $N = 11$, $\delta = 37{,}5214$ %, $\|f\| = 5{,}115 \cdot 10^{-3}$, *б* — $\rho = \text{const}$, $\mu = \mu(0)(1 + 0{,}3 \sin 2\pi x_2)$, $\varkappa = 3$, $N = 14$, $\delta = 14{,}2434$ %, $\|f\| = 1{,}922 \cdot 10^{-3}$; сплошная линия — точные значения функции, точки — восстановленные значения

Заключение. Таким образом, решение обратной коэффициентной задачи об определении неоднородных механических характеристик при антиплоских колебаниях слоя удалось свести к последовательному решению прямых задач с переменными характеристиками и нахождению поправок из интегральных уравнений Фредгольма первого рода.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ватульян А. О., Сатуновский П. С.** Об определении упругих модулей при анализе колебаний неоднородного слоя // Докл. АН. 2007. Т. 414, № 1. С. 36–38.
2. **Ватульян А. О.** Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестн. Самар. гос. ун-та. 2007. № 4. С. 93–104.
3. **Ватульян А. О., Явруян О. В., Богачев И. В.** Идентификация упругих характеристик неоднородного по толщине слоя // Акуст. журн. 2011. Т. 57, № 6. С. 723–730.
4. **Tamasan A., Timonov A.** On a new approach to frequency sounding of layered media // Numer. Funct. Anal. Optim. 2008. V. 29, N 3/4. P. 470–486.
5. **Романов В. Г.** О задаче определения структуры слоистой среды и формы импульсного источника // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 867–881.
6. **Romanov V. G., Weng C. I., Chen T. C.** An inverse problem for a layered elastic plate // Appl. Math. Comput. 2003. V. 137, N 2/3. P. 349–369.
7. **Zhang H., Lin X., Wang Y., et al.** Identification of elastic-plastic mechanical properties for bimetallic sheets by hybrid-inverse approach // Acta Mech. Solida Sinica. 2010. V. 23, N 1. P. 29–35.
8. **Ворович И. И.** Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей / И. И. Ворович, В. А. Бабешко. М.: Наука, 1979.
9. **Ватульян А. О., Двоскин М. А., Сатуновский П. С.** О колебаниях неоднородного упругого слоя // ПМТФ. 2006. Т. 47, № 3. С. 157–164.
10. **Абрамович М. В., Углич П. С.** Обратные коэффициентные задачи для поперечно-неоднородного упругого слоя // Тр. 16-й Междунар. конф. “Современные проблемы механики сплошной среды”, Ростов-на-Дону, 16–19 окт. 2012 г. Ростов н/Д: Изд-во Южного федер. ун-та, 2012. Т. 2. С. 6–10.
11. **Ватульян А. О.** Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела. М.: Физматлит, 2007.
12. **Тихонов А. Н.** Методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, В. Я. Арсенин. М.: Наука, 1986.
13. **Тихонов А. Н.** Численные методы решения некорректных задач / А. Н. Тихонов, А. В. Гончарский, В. В. Степанов, А. Г. Ягола. М.: Наука, 1990.

Поступила в редакцию 11/I 2013 г.,
в окончательном варианте — 20/V 2013 г.