УДК 532.592.2; 517.958

ПРОСТРАНСТВЕННЫЕ СТАЦИОНАРНЫЕ ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ НА СДВИГОВОМ ПОТОКЕ

В. М. Тешуков

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

Рассматривается система интегродифференциальных уравнений, описывающая в приближении теории мелкой воды трехмерные стационарные сдвиговые течения идеальной жидкости в слое со свободной границей. Найдены обобщенные характеристики рассматриваемой модели и сформулированы условия гиперболичности. Обнаружен новый класс точных решений основной системы, характеризуемый специальной зависимостью искомых функций от вертикальной координаты. Система уравнений, описывающая этот класс решений, в гиперболическом случае приведена к инвариантам Римана. Найдены новые точные решения уравнений движения.

Ключевые слова: нелинейные волны, мелкая вода, вихревое течение.

Классическая теория мелкой воды широко используется при моделировании волновых процессов. В работе Л. В. Овсянникова [1] (см. также [2]) дано математическое обоснование этой приближенной модели. Модель, учитывающая сдвиговый характер движения, изучена в меньшей степени. Основой применяемого в настоящей работе подхода является обобщение теории характеристик для систем интегродифференциальных уравнений, предложенное в работах [3, 4], что позволяет анализировать возможные типы волн на сдвиговом потоке по аналогии с классическим случаем.

1. Постановка задачи. Рассматривается длинноволновая аппроксимация стационарных уравнений Эйлера

$$(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)u + p_x/\rho = 0, \qquad (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)v + p_y/\rho = 0, \qquad p_z = -\rho g, \quad \operatorname{div}\boldsymbol{U} = 0, \tag{1.1}$$

получающаяся из точных уравнений движения идеальной несжимаемой жидкости в поле силы тяжести с помощью асимптотического разложения по малому параметру $\varepsilon = H_0/L_0$ (H_0 — характерный вертикальный масштаб; L_0 — характерный горизонтальный масштаб; $H_0/L_0 \ll 1$). В (1.1) $\boldsymbol{U} = (u, v, w)$ — вектор скорости жидкости; p — давление; $\rho = \mathrm{const}$ — плотность жидкости; x, y, z — декартовы координаты в пространстве.

Приближенное выражение для вектора вихря $\boldsymbol{\Omega}$ получается из стандартного выражения $(w_y - v_z, u_z - w_x, v_x - u_y)$ при отбрасывании малых величин порядка ε и выше:

$$\boldsymbol{\Omega} = (-v_z, u_z, v_x - u_y).$$

Вектор $\boldsymbol{\Omega}$ в силу (1.1) удовлетворяет уравнению

$$\boldsymbol{\Omega}_t + (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)\boldsymbol{\Omega} = (\boldsymbol{\Omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{U}. \tag{1.2}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке СО РАН (Интеграционный проект 3.13.1) и Министерства образования Российской Федерации (грант № E02-4.0-21).

Из (1.2) следует, что если в начальный момент $u_z = 0$, $v_z = 0$, то во все моменты времени $u_z = 0$, $v_z = 0$. Класс решений, характеризуемый неравенством $u_z^2 + v_z^2 \neq 0$, будем называть *сдвиговыми течениями.* В дальнейшем будут рассматриваться сдвиговые течения жидкости в слое $0 \leqslant z \leqslant h(x,y)$ со свободной границей. На свободной поверхности $z = h(x,y)$ давление задается постоянным $p = p_0 = \mathrm{const}$. Кроме того, должны выполняться кинематическое условие

$$\Big(\int\limits_0^h u\,dz\Big)_x + \Big(\int\limits_0^h v\,dz\Big)_y = 0$$

и условие непротекания $w = 0$ на ровном дне $z = 0$. С учетом граничного условия находим распределение давления в жидкости (гидростатический закон)

$$p = p_0 + \rho g(h - z). \tag{1.3}$$

После подстановки (1.3) в (1.1) получаем уравнения

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{U}\cdot\nabla)u + gh_x = 0, \qquad (\boldsymbol{U}\cdot\nabla)u + gh_y = 0,\\ w = -\int\limits_0^z (u_x + v_y)\,dz', \qquad \Big(\int\limits_0^h u\,dz\Big)_x + \Big(\int\limits_0^h v\,dz\Big)_y = 0,\end{gathered} \tag{1.4}$$

обобщающие классические уравнения теории мелкой воды на случай сдвиговых течений. Классическая модель

$$\begin{gathered}uu_x + vu_y + gh_x = 0, \qquad uv_x + vv_y + gh_y = 0,\\ w = -z(u_x + v_y), \qquad (hu)_x + (hv)_y = 0\end{gathered}$$

описывает частные решения уравнений (1.4) — стационарные течения без сдвига скорости, для которых $u_z = 0$, $v_z = 0$. Отметим, что плоскопараллельные стационарные сдвиговые течения изучались в [5].

Для того чтобы получить начально-краевую задачу в фиксированной области, перейдем к смешанным эйлерово-лагранжевым координатам x', y', λ:

$$x' = x, \qquad y' = y, \qquad \Phi(x', y', \lambda) = z.$$

Здесь функция $\Phi(x', y', \lambda)$ является решением задачи Коши

$$u(x,y,\Phi)\Phi_x + v(x,y,\Phi)\Phi_y = w(x,y,\Phi), \qquad \Phi\big|_{x=0} = \Phi_0(y,\lambda)$$

(предполагается, что $u(0, y, \Phi_0(y,\lambda)) \neq 0$, $\lambda \in [0,1]$). Функция $\Phi_0(y,\lambda)$ выбирается так, что $\lambda = 0$ соответствует ровному дну ($\Phi_0(y,0) = 0$), а $\lambda = 1$ — свободной поверхности ($\Phi_0(y,1) = h(0,y)$). Тогда при всех x будут выполнены равенства $\Phi_0(x,y,0) = 0$, $\Phi_0(x,y,1) = h(x,y)$. Поэтому в новых переменных области, занятой жидкостью, отвечает фиксированный слой $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$.

Уравнения (1.4) преобразуются к виду

$$\begin{gathered}(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)u + g\Big(\int\limits_0^1 H\,d\nu\Big)_x = 0, \qquad (\boldsymbol{u}\cdot\nabla)v + g\Big(\int\limits_0^1 H\,d\nu\Big)_y = 0,\\ (uH)_x + (vH)_y = 0,\end{gathered} \tag{1.5}$$

где $H = \Phi_\lambda(x, y, \lambda)$; $\boldsymbol{u} = (u(x, y, \lambda), v(x, y, \lambda), 0)$. Если система (1.5) решена, то можно найти

$$\Phi = \int\limits_0^\lambda H\,d\nu, \qquad w = u\Phi_x + v\Phi_y.$$

Уравнения (1.5) допускают запись в операторно-дифференциальной форме

$$A\boldsymbol{V}_x + B\boldsymbol{V}_y = 0, \qquad \boldsymbol{V} = (u, v, H)^{\text{т}}, \tag{1.6}$$

где операторы A, B имеют вид

$$A = \begin{pmatrix} u, & 0, & g\displaystyle\int\limits_0^1 \ldots\,d\nu \\ 0, & u, & 0 \\ H, & 0, & u \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} v, & 0, & 0 \\ 0, & v, & g\displaystyle\int\limits_0^1 \ldots\,d\nu \\ 0, & H, & v \end{pmatrix}.$$

Здесь действие оператора $J = \displaystyle\int\limits_0^1 \ldots\,d\nu$ на функцию $f(x, y, \lambda)$ определяется так:

$$(Jf)(x, y) = \int\limits_0^1 f(x, y, \nu)\,d\nu.$$

Выясним условия, при которых система (1.6) является обобщенно-гиперболической. Ниже будут использоваться следующие определения (см. [3, 6]).

1. Будем говорить, что кривая Γ в плоскости переменных x, y с нормалью $\boldsymbol{n} = (\xi, \eta)$ является характеристикой системы (1.6), если задача

$$(\boldsymbol{F}, (\xi A + \eta B)\boldsymbol{\varphi}) = 0 \tag{1.7}$$

имеет нетривиальное решение $\boldsymbol{F}$. Здесь $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)^{\text{т}}$ — произвольная гладкая по переменной λ вектор-функция; $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$ — искомый собственный функционал (действующий по переменной λ); $(\boldsymbol{F}, \boldsymbol{\varphi})$ обозначает результат действия функционала $\boldsymbol{F}$ на пробную функцию $\boldsymbol{\varphi}$.

2. Равенство

$$(\boldsymbol{F}, A\boldsymbol{V}_x + B\boldsymbol{V}_y) = 0$$

называется *соотношением (условием) на характеристике*.

3. Система (1.6) называется *гиперболической в направлении вектора* $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)$, $|\boldsymbol{\mu}| = 1$, если для любого вектора $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2)$, ортогонального $\boldsymbol{\mu}$, задача

$$(\boldsymbol{F}, (\zeta(\mu_1 A + \mu_2 B) + \sigma_1 A + \sigma_2 B)\boldsymbol{\varphi}) = 0$$

($\boldsymbol{n} = \zeta\boldsymbol{\mu} + \boldsymbol{\sigma}$) имеет нетривиальные решения $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^\alpha$ только для действительных $\zeta = \zeta^\alpha$ и совокупность собственных функционалов $\{\boldsymbol{F}^\alpha\}$ обладает свойством полноты (если для любого $\boldsymbol{F}^\alpha$ выполнено равенство $(\boldsymbol{F}^\alpha, \boldsymbol{\varphi}) = 0$, то необходимо $\boldsymbol{\varphi} = 0$). Отметим, что здесь $\{\boldsymbol{F}^\alpha\}$ могут быть как регулярными функционалами, представимыми с помощью локально интегрируемых функций, так и сингулярными, принадлежащими пространству обобщенных функций.

2. Характеристики системы стационарных длинных волн. Из (1.7) получаем следующее уравнение для вектор-функционала $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, F_3)$:

$$(\boldsymbol{F}, (\xi A + \eta B)\boldsymbol{\varphi}) = (F_1, (\xi u + \eta v)\varphi_1) + \xi g \int\limits_0^1 \varphi_3 \, d\nu (F_1, 1) + (F_2, (\xi u + \eta v)\varphi_2) +$$

$$+ \eta g \int\limits_0^1 \varphi_3 \, d\nu (F_2, 1) + \xi (F_3, H\varphi_1) + \eta (F_3, H\varphi_2) + (F_3, (\xi u + \eta v)\varphi_3) = 0.$$

В силу независимости пробных функций φ_i справедливы равенства

$$(F_1, (\xi u + \eta v)\varphi_1) + \xi (F_3, H\varphi_1) = 0, \qquad (F_2, (\xi u + \eta v)\varphi_2) + \eta (F_3, H\varphi_2) = 0,$$

$$(F_3, (\xi u + \eta v)\varphi_3) + g \int\limits_0^1 \varphi_3 \, d\nu (\eta F_2 + \xi F_1, 1) = 0. \tag{2.1}$$

Комбинируя первые два соотношения, получим

$$(\eta F_1 - \xi F_2, (\xi u + \eta v)\varphi) = 0; \tag{2.2}$$

$$(\eta F_2 + \xi F_1, (\xi u + \eta v)\varphi) + (\xi^2 + \eta^2)(F_3, H\varphi) = 0. \tag{2.3}$$

Учитывая, что $H \neq 0$, определяем действие F_3 на произвольную гладкую функцию φ формулой

$$(F_3, \varphi) = -\frac{1}{\xi^2 + \eta^2} \Big(\eta F_2 + \xi F_1, \frac{\xi u + \eta v}{H} \varphi \Big), \tag{2.4}$$

следующей из (2.3). Далее, используя третье уравнение системы (2.1), получаем задачу для определения функционала $\eta F_2 + \xi F_1$:

$$\Big(\eta F_2 + \xi F_1, \frac{(\xi u + \eta v)^2}{H} \varphi \Big) - g(\xi^2 + \eta^2) \int\limits_0^1 \varphi \, d\nu (\eta F_2 + \xi F_1, 1) = 0. \tag{2.5}$$

Найдем решения задачи (2.1) в классе обобщенных функций. Для фиксированного значения $\lambda \in (0, 1)$ выберем вектор $\boldsymbol{n} = (\xi, \eta)$, ортогональный вектору $(u(\lambda), v(\lambda))$ (ξ, η удовлетворяют соотношению $-\xi/\eta = \operatorname{tg} \theta(\lambda)$; θ и q определяют полярные координаты в плоскости (u, v); $u = q \cos\theta$, $v = q \sin\theta$). В дальнейшем будем предполагать, что θ монотонно зависит от λ; для определенности будем считать, что $\theta_\lambda > 0$. Здесь и далее аргументы x, y функций u, v, θ опущены.

Очевидно, что уравнения (2.2)–(2.5) будут выполнены, если положить

$$\eta F_1 - \xi F_2 = \delta(\nu - \lambda), \qquad \eta F_2 + \xi F_1 = 0, \qquad F_3 = 0. \tag{2.6}$$

Найдем вектор $\boldsymbol{\mu}$, присутствующий в определении направления гиперболичности. В соответствии с этим определением нужно указать вектор $\boldsymbol{\mu}$ такой, чтобы при любом λ уравнение $\zeta(\mu_1 u(\lambda) + \mu_2 v(\lambda)) + \sigma_1 u(\lambda) + \sigma_2 v(\lambda) = 0$ было однозначно разрешимо относительно ζ. Очевидно, что данное условие эквивалентно тому, что при всех значениях λ должно быть выполнено неравенство $\mu_1 u(\lambda) + \mu_2 v(\lambda) \neq 0$. Пусть $\mu_1 = -\sin\gamma, \mu_2 = \cos\gamma$. Предыдущее неравенство преобразуется к виду $\sin(\theta - \gamma) \neq 0$. Такое γ существует только в том случае, когда $\theta_{\max} \geqslant \theta(\lambda) \geqslant \theta_{\min}$ и

$$\theta_{\max} - \theta_{\min} < \pi. \tag{2.7}$$

Действительно, если это неравенство выполнено, то, очевидно, $\sin(\theta-\gamma)\neq 0$ при γ, принадлежащем интервалу $(\theta_1,\theta_0+\pi)$, а также всем интервалам, получающимся из этого сдвигом на $k\pi$, где k — целое число. Если же $\theta_{\max}-\theta_{\min}>\pi$, то для любого γ обязательно найдется $\theta\in(\theta_{\min},\theta_{\max})$ такое, что $\sin(\theta-\gamma)=0$. Приведенные рассуждения показывают, что условие (2.7) необходимо для гиперболичности уравнений (1.6).

В дальнейшем при построении собственных функционалов в фиксированной точке (x_0,y_0) плоскости (x,y) будем выбирать базис системы декартовых координат с центром в (x_0,y_0) так, что $\theta_{\max}=-\theta_{\min}$. В окрестности точки (x_0,y_0) уравнения характеристик будем задавать в виде $y=y(x)$ и обозначать $k=dy/dx$. Полагая в предыдущих формулах $\xi=-k$, $\eta=1$, находим из (2.6) компоненты собственного функционала $\boldsymbol{F}^{1\lambda}=(F_1^{1\lambda},F_2^{1\lambda},F_3^{1\lambda})$

$$F_1^{1\lambda}=\delta(\nu-\lambda),\qquad F_2^{1\lambda}=k^\lambda\delta(\nu-\lambda),\qquad F_3^{1\lambda}=0,$$

соответствующего собственному значению $k^\lambda(x,y)=\operatorname{tg}\theta(x,y,\lambda)$ (λ фиксировано). Второй вектор-функционал $\boldsymbol{F}^{2\lambda}=(F_1^{2\lambda},F_2^{2\lambda},F_3^{2\lambda})$, отвечающий значению $k^\lambda(x,y)=\operatorname{tg}\theta(x,y,\lambda)$, определяем с помощью (2.4) и соотношений

$$F_2-\operatorname{tg}\theta(\lambda)F_1=(1+\operatorname{tg}^2\theta(\lambda))\delta'(\nu-\lambda),\qquad F_1+\operatorname{tg}\theta(\lambda)F_2=0.$$

Непосредственной подстановкой проверяется, что

$$F_1^{2\lambda}=-\operatorname{tg}\theta(\lambda)\delta'(\nu-\lambda),\qquad F_2^{2\lambda}=\delta'(\nu-\lambda),\qquad F_3^{2\lambda}=\frac{v_\lambda-\operatorname{tg}\theta(\lambda)u_\lambda}{H}\,\delta(\nu-\lambda)$$

удовлетворяют уравнениям (2.1). В этих формулах $\delta(\nu-\lambda)$ — дельта-функция Дирака, действующая на гладкую функцию $\varphi(\nu)$ по правилу $(\delta(\nu-\lambda),\varphi(\nu))=\varphi(\lambda)$, а $\delta'(\nu-\lambda)$ — ее производная, действующая на гладкие функции по правилу $(\delta'(\nu-\lambda),\varphi(\nu))=-\varphi_\lambda(\lambda)$.

Для построения еще одного решения задачи на собственные значения введем функционал P^λ, действующий на гладкую функцию φ по правилу

$$(P^\lambda,\varphi(\nu))=\int\limits_0^1\frac{H'(\varphi(\nu)-\varphi(\lambda))}{(v'-u'\operatorname{tg}\theta)^2}\,d\nu.$$

Здесь и далее величины со штрихом зависят от ν, без штриха — от переменной λ. Интеграл в приведенной выше формуле вычисляется в смысле главного значения. Уравнение (2.5) выполнено при $\boldsymbol{n}=(\xi,\eta)=(-\operatorname{tg}\theta(\lambda),1)$, если

$$F_2-\operatorname{tg}\theta(\lambda)F_1=\delta(\nu-\lambda)+g(1+\operatorname{tg}^2\theta(\lambda))P^\lambda. \tag{2.8}$$

Компоненты третьего вектор-функционала $\boldsymbol{F}^{3\lambda}$, отвечающего тому же собственному значению $k^\lambda=\operatorname{tg}\theta(\lambda)$, определяем, используя соотношения (2.4), (2.8) и дополнительное равенство

$$F_1+\operatorname{tg}\theta(\lambda)F_2=0.$$

В результате получим

$$F_1^{3\lambda}=-\frac{\operatorname{tg}\theta(\lambda)}{1+\operatorname{tg}^2\theta(\lambda)}\,\delta(\nu-\lambda)-g\operatorname{tg}\theta(\lambda)P^\lambda,\qquad F_2^{3\lambda}=\frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta(\lambda)}\,\delta(\nu-\lambda)+gP^\lambda,$$

$$(F_3^{3\lambda},\varphi)=-g\int\limits_0^1\frac{\varphi'\,d\nu}{v'-u'\operatorname{tg}\theta}.$$

Найдем собственные значения k вне множества значений функции $\operatorname{tg}\theta(\lambda)$ ($v - ku \neq 0$ для любого $\lambda \in [0,1]$) и соответствующие им собственные функционалы. Уравнение (2.2) дает равенство $F_1 + kF_2 = 0$. Из (2.5) следует

$$(F_2 - kF_1, \varphi) = g(1+k^2)\int\limits_0^1 \frac{\varphi H'\,d\nu}{(v'-ku')^2}\,(F_2 - kF_1, 1).$$

Полагая в этом равенстве $\varphi = 1$, получаем характеристическое уравнение для определения величины k

$$1 = g(1+k^2)\int\limits_0^1 \frac{H'\,d\nu}{(v'-ku')^2}. \tag{2.9}$$

Учитывая, что $F_2 - kF_1$ определяется с точностью до сомножителя, выберем этот сомножитель так, чтобы $(F_2 - kF_1, 1) = 1$. Тогда, используя (2.4), (2.6), находим компоненты вектор-функционалов $\boldsymbol{F}^i = (F_1^i, F_2^i, F_3^i)$, отвечающих корням k^i характеристического уравнения (2.9):

$$(F_1^i, \varphi) = -k^i g\int\limits_0^1 \frac{H'\varphi'}{(v'-k^iu')^2}\,d\nu, \qquad (F_2^i, \varphi) = g\int\limits_0^1 \frac{H'\varphi'}{(v'-k^iu')^2}\,d\nu,$$

$$(F_3^i, \varphi) = -g\int\limits_0^1 \frac{\varphi'}{v'-k^iu'}\,d\nu.$$

3. Характеристическое уравнение. Перепишем характеристическое уравнение (2.9) в виде

$$\chi(k) = g\int\limits_0^1 \frac{(1+k^2)H'\,d\nu}{u'^2(\operatorname{tg}\theta'-k)^2} - 1 = \tilde\chi(\gamma) = g\int\limits_0^1 \frac{H'\,d\theta'}{\theta'_\nu q'^2\sin^2(\theta'-\gamma)} - 1 = 0.$$

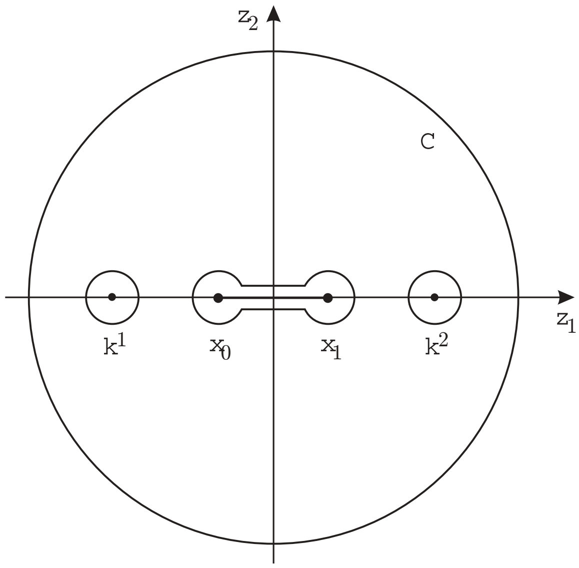
Здесь величина k и переменная γ связаны соотношением $k = \operatorname{tg}\gamma$. Отметим, что $\tilde\chi(\gamma) = \tilde\chi(\gamma \pm \pi)$ и $\tilde\chi(\gamma) \to \infty$ при $\gamma \to \theta_1$, а также при $\gamma \to \theta_0 + \pi$. Учитывая, что

$$\tilde\chi''(\gamma) = g\int\limits_0^1 \frac{(\sin^2(\theta'-\gamma) + 3\cos^2(\theta'-\gamma))H'\,d\theta'}{\theta'_\nu q'^2\sin^4(\theta'-\gamma)} > 0,$$

можно установить, что функция $\tilde\chi(\gamma)$ достигает на интервале $(\theta_1, \theta_0+\pi)$ единственного минимума в точке $\gamma_* \in (\theta_1, \theta_0+\pi)$, в которой $\tilde\chi'(\gamma_*) = 0$. Отметим, что если $\tilde\chi(\gamma_*) < 0$, то уравнение $\tilde\chi(\gamma) = 0$ имеет корни γ_1, γ_2 на интервале $(\gamma_* - \pi, \gamma_*)$, причем $\gamma_1 \in (\gamma_* - \pi, \theta_0)$, $\gamma_2 \in (\theta_1, \gamma_*)$. В противном случае, когда $\tilde\chi(\gamma_*) > 0$, характеристическое уравнение действительных корней не имеет. Таким образом, выполнения в точке γ_*, в которой $\tilde\chi'(\gamma_*) = 0$, неравенства

$$\tilde\chi(\gamma_*) < 0 \tag{3.1}$$

необходимо и достаточно для существования двух действительных корней характеристического уравнения. В дальнейшем будем считать, что условие (3.1) выполнено.



Заметим, что можно сформулировать более простое достаточное условие для существования двух вещественных корней. Действительно, если

$$g\int\limits_0^1 \frac{H'\,d\nu}{u'^2} - 1 < 0, \tag{3.2}$$

то найдутся k^i $(i = 1, 2)$ такие, что $\chi(k^i) = 0$, при этом $k^1 \in (-\infty, \operatorname{tg}\theta_0)$, $k^2 \in (\operatorname{tg}\theta_1, \infty)$. Это вытекает из следующих свойств функции $\chi(k)$: $\chi(k) \to \infty$ при $k \to u_1$ и $k \to u_0$ и $\chi(k) < 0$ при достаточно больших по модулю значениях k в силу (3.2). Из непрерывности $\chi(k)$ вытекает, что эта функция обращается в нуль по крайней мере в двух точках k^1 и k^2.

Предполагая существование двух действительных корней γ_1, γ_2 на отрезке длины π (и соответствующих им $k^1 = \operatorname{tg}\gamma_1$, $k^2 = \operatorname{tg}\gamma_2$), получим условия, при выполнении которых характеристическое уравнение (2.9) не имеет комплексных корней. Рассмотрим продолжение функции χ в плоскость комплексного аргумента z. Пусть $\xi_0 = \operatorname{tg}\theta(0)$, $\xi_1 = \operatorname{tg}\theta(1)$. Функция $\chi(z)$ аналитична вне отрезка $[\xi_0, \xi_1]$, имеет нули в точках $z = k^i$ $(i = 1, 2)$ и полюсы первого порядка в точках $z = \xi_0$ и $z = \xi_1$. Рассмотрим контур C (см. рисунок), включающий окружность радиуса δ^{-1} и контуры, окружающие точки $z = k^i$ и разрез $[\xi_0, \xi_1]$. Контуры расположены на расстоянии δ от соответствующих точек и разреза. Согласно принципу аргумента [7] имеем

$$(2\pi)^{-1}\Delta_C \arg\chi(z) = N - P,$$

где N — число нулей; P — число полюсов в области, ограниченной контуром C; $\Delta_C \arg$ обозначает приращение аргумента вдоль контура C. Так как $\chi(z)$ не имеет полюсов вне $[\xi_0, \xi_1]$, то условие

$$\Delta_C \arg\chi(z) = 0 \tag{3.3}$$

гарантирует отсутствие комплексных нулей в указанной области. Заметим, что при $\delta \to 0$ приращение аргумента при обходе по большой окружности стремится к нулю, а приращения аргумента при обходе вдоль контуров, окружающих нули k^1, k^2 и полюсы ξ_0, ξ_1, взаимно уничтожаются. В пределе условие (3.3) переходит в

$$\Delta_{[\xi_0,\xi_1]} \arg\chi^+(z)/\chi^-(z) = 0, \tag{3.4}$$

где $\chi^{\pm}(z)$ — предельные значения функции на отрезке $\chi(z)$ из верхней и нижней полуплоскостей. Потребуем также выполнения условия

$$\chi^{\pm}(z) \neq 0, \qquad z \in [\xi_0, \xi_1], \tag{3.5}$$

исключающего нейтральный случай, когда корни появляются на отрезке $[\xi_0, \xi_1]$.

4. Полнота системы характеристических функционалов. Предполагая, что условия гиперболичности (3.4), (3.5) выполнены, исследуем полноту семейства собственных функционалов. Пусть вектор-функция $\boldsymbol{\varphi}$ удовлетворяет равенствам

$$(\boldsymbol{F}^{1\lambda}, \boldsymbol{\varphi}) = 0, \qquad (\boldsymbol{F}^{2\lambda}, \boldsymbol{\varphi}) = 0, \qquad (\boldsymbol{F}^{3\lambda}, \boldsymbol{\varphi}) = 0, \qquad (\boldsymbol{F}^{i}, \boldsymbol{\varphi}) = 0.$$

Покажем, что $\boldsymbol{\varphi} = 0$. Из первых двух равенств получаем

$$\varphi_1 + \varphi_2 \operatorname{tg}\theta = 0, \qquad \varphi_{1\lambda} \operatorname{tg}\theta - \varphi_{2\lambda} + (v_\lambda - u_\lambda \operatorname{tg}\theta)\varphi_3/H = 0.$$

Учитывая, что $v_\lambda - u_\lambda \operatorname{tg}\theta = q\theta_\lambda/\cos\theta$, $\theta_\lambda \neq 0$, разрешим эти соотношения относительно φ_1, φ_3

$$\varphi_1 = -\varphi_2 \operatorname{tg}\theta, \qquad \varphi_3 = H(\varphi_{2\lambda} + \varphi_2\theta_\lambda \operatorname{tg}\theta)/(q\theta_\lambda \cos\theta) \tag{4.1}$$

и подставим φ_1, φ_3 в равенство

$$(\boldsymbol{F}^{3\lambda}, \boldsymbol{\varphi}) = -\frac{\operatorname{tg}\theta}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\,\varphi_1 - g\operatorname{tg}\theta \int\limits_0^1 \frac{H'(\varphi_1' - \varphi_1)}{(v' - u'\operatorname{tg}\theta)^2}\,d\nu +$$
$$+ \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\theta}\,\varphi_2 + g\int\limits_0^1 \frac{H'(\varphi_2' - \varphi_2)}{(v' - u'\operatorname{tg}\theta)^2}\,d\nu - g\int\limits_0^1 \frac{\varphi_3'\,d\nu}{v' - u'\operatorname{tg}\theta} = 0.$$

После несложных преобразований получим интегральное уравнение для определения φ_2

$$\varphi_2 - g\int\limits_0^1 \frac{H'}{q'^2\theta_\lambda'}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta')\varphi_2' - (1+\operatorname{tg}^2\theta)\varphi_2}{\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\theta}\,d\nu = 0. \tag{4.2}$$

Покажем, что это однородное интегральное уравнение имеет нетривиальные решения. Сначала установим, что если $\boldsymbol{\varphi}_i$ — решение задачи

$$(B - k^i A)\boldsymbol{\varphi}_i = 0 \tag{4.3}$$

($k^i \neq \operatorname{tg}\theta$), то

$$(\boldsymbol{F}^{3\lambda}, A\boldsymbol{\varphi}^i) = 0. \tag{4.4}$$

Действительно, равенство

$$(\boldsymbol{F}^{3\lambda}, B\boldsymbol{\varphi}_i) = \operatorname{tg}\theta(\lambda)(\boldsymbol{F}^{3\lambda}, A\boldsymbol{\varphi}^i) \tag{4.5}$$

выполняется в силу того, что $\boldsymbol{F}^{3\lambda}$ является собственным функционалом, отвечающим собственному значению $\operatorname{tg}\theta(\lambda)$. Равенство

$$(\boldsymbol{F}^{3\lambda}, B\boldsymbol{\varphi}_i) = k^i(\boldsymbol{F}^{3\lambda}, A\boldsymbol{\varphi}^i) \tag{4.6}$$

является следствием (4.3). Сравнивая (4.5) и (4.6) и учитывая, что $\operatorname{tg}\theta(\lambda) \neq k^i$, получаем (4.4). Простое вычисление показывает, что собственная функция, отвечающая корню k^i характеристического уравнения (2.9), имеет вид

$$\boldsymbol{\varphi}^i = (k^i/(v - k^i u), -1/(v - k^i u), (1 + k^{i2})H/(v - k^i u)^2).$$

Из доказанного выше можно установить, что

$$(A\boldsymbol{\varphi}^i)_2 = -u/(v - k^i u) = -1/(\operatorname{tg}\theta - k^i) \tag{4.7}$$

является нетривиальным решением уравнения (4.2). Последнее утверждение легко проверить и с помощью подстановки функции (4.7) в (4.2). Рассмотрим функцию

$$\phi = \varphi_2 - \sum_{i=1}^{2} \frac{\beta^i}{\operatorname{tg}\theta - k^i},$$

где коэффициенты β^i, не зависящие от λ, выбраны из условий $\phi(0) = 0$, $\phi(1) = 0$. Очевидно, что ϕ также удовлетворяет уравнению (4.2). Выполняя интегрирование по частям, приведем сингулярное интегральное уравнение (4.2) к стандартному виду

$$(1+\xi^2)\phi\Big(\frac{1}{1+\xi^2} - \frac{gH_1}{q_1^2\theta_{1\lambda}(\xi_1-\xi)} + \frac{gH_0}{q_0^2\theta_{1\lambda}(\xi_0-\xi)} + g\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\partial}{\partial\xi'}\Big(\frac{H'}{q'^2\theta'_\lambda}\Big)\frac{d\xi'}{\xi'-\xi}\Big) + {} \\ + g\int\limits_{\xi_0}^{\xi_1} \frac{\partial}{\partial\xi'}\Big(\frac{H'}{q'^2\theta'_\lambda}\Big)\frac{(1+\xi'^2)\phi'\,d\xi'}{\xi'-\xi} = 0.$$

Пусть функции H, q имеют производную по переменной λ, удовлетворяющую условию Гёльдера, функция θ дважды дифференцируема по λ и ее вторая производная также удовлетворяет условию Гёльдера. Условия гиперболичности (3.4), (3.5) гарантируют единственность решения этого сингулярного уравнения в классе гёльдеровых функций [8]. Поэтому $\phi = 0$ и

$$\varphi_2 = \sum_{i=1}^{2} \frac{\beta^i}{\operatorname{tg}\theta - k^i}.$$

Соотношения $(\boldsymbol{F}^i, \boldsymbol{\varphi}) = 0$ с учетом (4.1) можно представить в виде

$$g\int\limits_0^1 \frac{H'}{q'^2\theta'_\lambda}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{(1+\operatorname{tg}^2\theta')\varphi'_2}{\operatorname{tg}\theta' - k^i}\Big)\,d\nu = 0.$$

Используя те же рассуждения, на основе которых выводилось равенство (4.4), легко показать, что $A_{ii} \neq 0$ и при $i \neq j$

$$A_{ij} = g\int\limits_0^1 \frac{H'}{q'^2\theta'_\lambda}\,\frac{\partial}{\partial\nu}\Big(\frac{1+\operatorname{tg}^2\theta'}{(\operatorname{tg}\theta' - k^i)(\operatorname{tg}\theta' - k^j)}\Big)\,d\nu = 0. \tag{4.8}$$

Тогда из (4.1), (4.8) вытекает, что $\beta^i = 0$ $(i = 1, 2)$, $\varphi_2 = 0$ и $\boldsymbol{\varphi} = 0$. Полнота системы собственных функционалов доказана.

5. Характеристическая форма уравнений движения. Запишем уравнения движения жидкости в характеристическом виде. Для этого последовательно действуем найденными собственными функционалами $\boldsymbol{F}^{1\lambda}$, $\boldsymbol{F}^{2\lambda}$, $\boldsymbol{F}^{3\lambda}$, $\boldsymbol{F}^i$ на систему уравнений (1.6). После преобразований получаем

$$D\Big(\frac{q^2}{2} + gh\Big) = 0, \qquad D\Big(\frac{\theta_\lambda}{H}\Big) - \frac{2q_\lambda}{qH}\,D\theta = 0,$$

$$
\begin{gathered}
q^2 D\theta - g\operatorname{tg}\theta Dh + \frac{g}{\cos^2\theta}\int\limits_0^1 \frac{H'(q'^2 D\theta' - q^2 D\theta)\,d\nu}{q'^2\cos^2\theta'(\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\theta)^2} - \frac{g}{\cos^2\theta}\int\limits_0^1 \frac{DH'\,d\nu}{\operatorname{tg}\theta' - \operatorname{tg}\theta} = 0,\\
\frac{k^i}{1+k^{i2}}\,D^i h + \int\limits_0^1 \frac{H' D^i\theta'\,d\nu}{\cos^2\theta'(\operatorname{tg}\theta' - k^i)^2} - \int\limits_0^1 \frac{DH'\,d\nu}{\operatorname{tg}\theta' - k^i} = 0.
\end{gathered}
\tag{5.1}
$$

Здесь $D = \partial/\partial x + \operatorname{tg}\theta\,\partial/\partial y$, $D^i = \partial/\partial x + k^i\,\partial/\partial y$ — производные вдоль характеристических направлений непрерывного и дискретного спектров; k^i $(i = 1, 2)$ — корни характеристического уравнения (2.9). При выполнении условий гиперболичности (3.4), (3.5) соотношения на характеристиках (5.1) эквивалентны уравнениям (1.6).

Из уравнений (5.1) получаем интеграл Бернулли

$$
q^2 + 2gh = q_m^2(\psi, \lambda), \tag{5.2}
$$

где $q_m(\psi, \lambda)$ — произвольная функция, а $\psi(x, y, \lambda)$ (аналог функции тока) определяется соотношениями $\psi_y = Hu$, $\psi_x = -Hv$. В частном случае, когда $q_{m\psi}(\psi, \lambda)\psi_\lambda(x, y, \lambda) + q_{m\lambda}(\psi, \lambda) = 0$, из (5.2) получаем соотношение $q_\lambda(x, y, \lambda) = 0$. Тогда из второго уравнения системы (5.1) следует

$$
D(\theta_\lambda/H) = 0, \qquad \theta_\lambda/H = A(\psi, \lambda) \tag{5.3}
$$

($A(\psi, \lambda)$ — произвольная функция).

6. Новый класс точных решений. Рассмотрим класс частных решений уравнений (5.1), характеризуемый равенствами $q_m \equiv \mathrm{const}$, $A \equiv \mathrm{const}$. Из (5.3) вытекает, что

$$
\theta = Az + \theta_0(x, y), \qquad q(x, y) = \sqrt{q_m^2 - 2gh(x, y)},
$$

где $\theta_0(x, y)$ — искомая функция. Подставив представление решения

$$
u(x, y, z) = q(x, y)\cos\,(Az + \theta_0(x, y)), \qquad v(x, y, z) = q(x, y)\sin\,(Az + \theta_0(x, y))
$$

в (1.4), получаем систему уравнений для неизвестных функций $q(x, y)$ и $\theta_0(x, y)$

$$
\begin{gathered}
\operatorname{tg}\theta_0 q_x - q_y + q\theta_{0x} + q\operatorname{tg}\theta_0\theta_{0y} = 0,\\
(g\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) - Aq^2)q_x - (g + Aq^2\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0))q_y + gq\theta_{0x} + gq\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0)q_y = 0.
\end{gathered}
\tag{6.1}
$$

Найдем характеристики системы (6.1). Угловые коэффициенты наклона характеристик находятся из квадратного уравнения

$$
k^2 - \frac{Aq^2(\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) + \operatorname{tg}\theta_0)}{Aq^2 - g(\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) - \operatorname{tg}\theta_0)}k + \frac{Aq^2\operatorname{tg}\theta_0\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) - g(\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) - \operatorname{tg}\theta_0)}{Aq^2 - g(\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) - \operatorname{tg}\theta_0)} = 0.
$$

Корни этого уравнения

$$
k_{1,2} = \frac{Aq^2(\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) + \operatorname{tg}\theta_0)}{2(Aq^2 - g(\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) - \operatorname{tg}\theta_0)} \pm
$$

$$
\pm\frac{\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) - \operatorname{tg}\theta_0}{2(Aq^2 - g(\operatorname{tg}\,(Ah + \theta_0) - \operatorname{tg}\theta_0)}\sqrt{A^2q^4 + 4Agq^2\operatorname{ctg}Ah - 4g^2}
$$

действительны при выполнения условия

$$
q^2/(gh) > 2\operatorname{tg}\,(Ah/2)/(Ah).
$$

Так как $\operatorname{tg}\,(Ah/2) > Ah/2$ при $0 < Ah < \pi$, то приведенное условие более сильное по сравнению с обычным условием сверхкритичности потока $q^2 > gh$.

Условия на характеристиках

$$\theta_x + k^i \theta_x + \frac{1}{gq}\Big[-\frac{Aq^2}{2} \mp \sqrt{\frac{A^2 q^4}{4} + Agq^2 \operatorname{ctg} Ah - g^2}\,\Big](q_x + k^i q_y) = 0$$

приводятся к инвариантам Римана. Учитывая, что $h = (q_m^2 - q^2)/(2g)$, введем функции

$$\mu^{1,2}(q) = \frac{1}{g}\int\limits_{q_0}^{q} \Big[\frac{Aq'}{2} \pm \sqrt{\frac{A^2 q'^2}{4} + Ag \operatorname{ctg} \frac{A(q_m^2 - q'^2)}{2g} - \frac{g^2}{q'^2}}\,\Big]\, dq'$$

и запишем систему уравнений в эквивалентном виде

$$r_x^1 + k^1 r_x^1 = 0, \qquad r^1 = \theta - \mu^1(q),$$
$$r_x^2 + k^2 r_x^2 = 0, \qquad r^2 = \theta - \mu^2(q).$$

При $A \to 0$ эта система переходит в классические уравнения теории мелкой воды для стационарных сверхкритических течений (см. монографию [9], в которой рассмотрены уравнения газовой динамики, совпадающие при определенном показателе политропы с уравнениями мелкой воды).

В классе простых волн (решений вида $r^1 = r^1(\alpha(x,y))$, $r^2 = r^2(\alpha(x,y))$) уравнения (6.1) интегрируются. Следуя [9], получаем в простой волне первого типа соотношения

$$r^1 = \theta_0 - \mu^1(q) = r_0^1 = \text{const}, \qquad y - k^2 x = F(\theta_0),$$

а в простой волне второго типа — соотношения

$$r^2 = \theta_0 - \mu^2(q) = r_0^2 = \text{const}, \qquad y - k^1 x = F(\theta_0),$$

где $F(\theta_0)$ — произвольная функция. Записанные соотношения выражают постоянство одного из инвариантов Римана и прямолинейность одного из семейств характеристик в области определения простой волны. Если функция $F(\theta_0)$ задана, то в обоих случаях для определения двух неизвестных q и θ_0 имеем два уравнения. Отметим, что вопрос о существовании простых волн для общей системы (1.6) изучался в [10].

В данной работе сформулированы условия обобщенной гиперболичности, найдены обобщенные характеристики и условия на них для системы интегродифференциальных уравнений (1.6), описывающей стационарные длинные волны на сдвиговом течении жидкости в слое со свободной границей. На основе этого анализа обнаружен новый класс точных решений уравнений (1.6), характеризуемый специальной зависимостью искомых функций от вертикальной координаты. Уравнения простых волн для построенного специального класса пространственных течений проинтегрированы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Овсянников Л. В.** Обоснование теории мелкой воды // Тр. Всесоюз. конф. по уравнениям с частными производными. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978. С. 185–188.
2. **Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1985.
3. **Тешуков В. М.** О гиперболичности уравнений длинных волн // Докл. АН СССР. 1985. Т. 284, № 3. С. 555–562.
4. **Тешуков В. М.** Длинные волны в завихренной баротропной жидкости // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 17–26.

5. **Varley E., Blythe P. A.** Long eddies in sheared flows // Stud. Appl. Math. 1983. V. 68. P. 103–187.
6. **Ляпидевский В. Ю., Тешуков В. М.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
7. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958.
8. **Мусхелишвили Н. И.** Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
9. **Овсянников Л. В.** Лекции по основам газовой динамики. М.: Наука, 1981.
10. **Тешуков В. М.** Пространственные простые волны на сдвиговом течении // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 28–40.

Поступила в редакцию 15/XII 2003 г.