

РАВНОВЕСНЫЕ ТРЕЩИНЫ В ПОЛОСЕ КОНЕЧНОЙ ШИРИНЫ

И. А. Маркузон

(Москва)

Рассматривается задача об определении длины равновесной трещины, образующейся в полосе конечной ширины, в условиях хрупкого разрушения. С этой целью первоначально решается задача о распределении напряжений вблизи щели некоторой заданной длины, а затем используются результаты работы [1], позволяющие определить размер равновесной трещины в зависимости от приложенных нагрузок. В связи с этим рассмотрение первоначально ведется без учета сил сцепления, действующих вблизи кончика трещины.

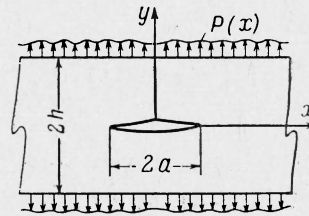
Одновременно рассмотрена аналогичная задача о трещине, имеющей форму круглого диска, в пластинке конечной толщины.

§ 1. Постановка задачи. Рассмотрим полосу шириной $2h$, ось симметрии которой примем за ось абсцисс. Ось ординат y направим вверх. Пусть на границе полосы, т. е. при $y = \pm h$, действует распределенная разрывающая нагрузка интенсивности $p(x)$, симметричная относительно оси ординат и абсцисс. Создадим в окрестности начала координат вдоль оси абсцисс трещину (разрез). Тогда под действием приложенной системы нагрузок трещина достигнет (фиг. 1), вообще говоря, некоторой равновесной длины $2a$. Снимая напряжения на границе полосы и рассматривая ввиду симметрии полуполосу, получим следующие граничные условия:

$$\begin{aligned} \text{при } y = 0 \\ \tau_{xy} = 0 \quad (|x| < \infty) \end{aligned} \quad (1.1)$$

$$\begin{aligned} \sigma_y = -g(x) \quad (|x| \leq a) \\ v = 0 \quad (|x| \geq a) \end{aligned} \quad (1.2)$$

$$\begin{aligned} \text{при } y = h \\ \tau_{xy} = 0, \quad \sigma_y = 0 \quad (|x| < \infty) \end{aligned} \quad (1.3)$$



Фиг. 1

Здесь $g(x)$ — напряжение, возникающее в сплошной полосе по оси x от приложения нагрузок, снимающих напряжения на границе.

§ 2. Получение интегральных уравнений. Следуя методу, изложенному в книге Снеддона [2], и учитывая симметрию, возьмем следующие выражения для компонент тензора напряжений и смещения:

$$\sigma_y = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi^2 G(y, \xi) \cos \xi x d\xi, \quad \tau_{xy} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \xi \frac{dG}{dy} \sin \xi x d\xi \quad (2.1)$$

$$v = \frac{2(1+\nu)}{\pi E} \int_0^{\infty} \left[(1-\nu) \frac{d^3 G}{dy^3} - (2-\nu) \xi^2 \frac{dG}{dy} \right] \cos \xi x \frac{d\xi}{\xi^2} \quad (2.2)$$

где

$$G(\xi, y) = (A + B\xi y) \operatorname{ch} \xi y + (C + D\xi y) \operatorname{sh} \xi y$$

Функции $A(\xi)$, $B(\xi)$, $C(\xi)$, $D(\xi)$ определяются из граничных условий задачи.

Указанная система напряжений и смещений удовлетворяет уравнениям равновесия и совместности (компоненты σ_x и u здесь не выписаны). Используя граничные условия (1.1) и (1.3), получим систему трех уравнений для A, B, C, D , откуда, в частности, следует

$$A(\xi) = \frac{\text{sh}^2 \xi h - \xi^2 h^2}{\xi h + \text{sh} \xi h \text{ch} \xi h} B(\xi) \equiv H(\xi h) B(\xi)$$

Потребуем теперь выполнения граничных условий (1.2). В результате, полагая $x = ax_1$, $\lambda = a\xi$, $h = a\delta$, получим следующую систему дуальных интегральных уравнений:

$$\int_0^{\infty} \lambda H(\delta\lambda) B_1(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = g_1(x_1), \quad \int_0^{\infty} B_1(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda = 0$$

$$(0 < x_1 < 1) \qquad (x_1 > 1) \qquad (2.3)$$

$$\left(g_1(x_1) = \frac{\pi}{2} a^2 g(ax_1) \right) \quad \left(B_1(\lambda) = \frac{\lambda}{a} B\left(\frac{\lambda}{a}\right) \right)$$

Отметим, что смещение $v = v^\circ$ и напряжение $\sigma_y = \sigma_y^\circ$ в точках оси абсцисс определяются формулами

$$v^\circ = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E a} \int_0^{\infty} B_1(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda, \quad \sigma_y^\circ = -\frac{2}{\pi a^2} \int_0^{\infty} \lambda H(\delta\lambda) B_1(\lambda) \cos \lambda x_1 d\lambda$$

§ 3. Сведение системы дуальных интегральных уравнений к одному уравнению Фредгольма второго рода. Проинтегрировав первое из уравнений (2.3) от 0 до x , получим систему

$$\int_0^{\infty} B(\lambda) H(\delta\lambda) \sin \lambda x d\lambda = G(x) \quad (0 < x < 1) \quad \left(G(x) = \int_0^x g_1(\xi) d\xi \right) \quad (3.1)$$

$$\int_0^{\infty} B(\lambda) \cos \lambda x d\lambda = 0 \quad (x > 1) \quad (3.2)$$

(индекс у B_1 и x_1 опущен).

Введем новую функцию $\varphi(\lambda)$ следующим образом

$$B(\lambda) = \int_0^1 \varphi'(t) J_0(\lambda t) dt \quad (3.3)$$

(J_0 — функция Бесселя нулевого порядка).

На основании формулы

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda t) \cos \lambda x d\lambda = \begin{cases} (t^2 - x^2)^{-1/2} & (x < t) \\ 0 & (x > t) \end{cases}$$

уравнение (3.2) удовлетворяется при помощи (3.3) тождественно. Уравнение (3.1) представим в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} B(\lambda) \sin \lambda x d\lambda + \int_0^{\infty} H_1(\delta\lambda) B(\lambda) \sin \lambda x d\lambda = G(x) \quad (0 < x < 1)$$

$$(H_1(\delta\lambda) = H(\delta\lambda) - 1) \quad (3.4)$$

Первое слагаемое в (3.4) при помощи соотношения (3.3) и формулы

$$\int_0^{\infty} J_0(\lambda t) \sin \lambda x d\lambda = \begin{cases} 0 & (x < t) \\ (x^2 - t^2)^{-1/2} & (x > t) \end{cases}$$

преобразуем следующим образом:

$$\int_0^{\infty} B(\lambda) \sin \lambda x d\lambda = \int_0^1 \varphi'(t) dt \int_0^{\infty} \sin \lambda x J_0(\lambda t) d\lambda = \int_0^x \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \quad (3.5)$$

Интегрируя по частям (3.3), получим

$$B(\lambda) = \varphi(1) J_0(\lambda) + \lambda \int_0^1 \varphi(t) J_1(\lambda t) dt \quad (\varphi(0) = 0) \quad (3.6)$$

Если подставить теперь (3.6) во второе слагаемое левой части уравнения (3.4) и учесть (3.5), то уравнение (3.4) можно привести к виду

$$\int_0^x \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} + \varphi(1) A_1(x; \delta) + \int_0^1 A_2(x, t; \delta) \varphi(t) dt = G(x) \quad (0 < x < 1) \quad (3.7)$$

где

$$A_1(x; \delta) = \int_0^{\infty} H_1(\delta \lambda) J_0(\lambda) \sin \lambda x d\lambda$$

$$A_2(x, t; \delta) = \int_0^{\infty} \lambda H_1(\delta \lambda) J_1(\lambda t) \sin \lambda x d\lambda$$

Введем функцию $f(x)$ следующим соотношением

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{x^2 - t^2}} \quad \text{или} \quad \varphi(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^t \frac{vf(v) dv}{\sqrt{t^2 - v^2}} \quad (3.8)$$

Используя (3.8) и меняя в повторном интеграле порядок интегрирования, получим из (3.7) интегральное уравнение Фредгольма с ядром, имеющим слабую особенность

$$f(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 [L(x, v; \delta) + K(x, v; \delta)] f(v) dv = G(x) \quad (0 < x < 1) \quad (3.9)$$

где

$$L(x, v; \delta) = \frac{v A_1(x; \delta)}{\sqrt{1 - v^2}}, \quad K(x, v; \delta) = v \int_0^1 \frac{A_2(x, t; \delta) dt}{\sqrt{t^2 - v^2}} \quad (3.10)$$

Это же уравнение можно записать и в несколько ином виде, более удобном для его решения

$$f(x) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 K(x, v; \delta) f(v) dv = G_1(x) \quad (0 < x < 1) \quad (3.11)$$

Здесь

$$G_1(x) = G(x) - \varphi(1) A_1(x; \delta)$$

Если временно считать постоянной $\varphi(1)$ известной, то правая часть уравнения (3.11) будет заданной функцией. Тогда решение уравнения (3.11) можно взять в виде [3]

$$f(x) = G_1(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 G_1(v) K(x, v; \delta) dv + \dots$$

Формула (3.8) позволяет затем получить соотношение, необходимое для нахождения постоянной $\varphi(1)$.

§ 4. Случай постоянной нагрузки. Если полоса разрывается приложенной к ее поверхностям нагрузкой постоянной интенсивности p_0 , то $G(x) = 0.5 \pi p_0 a^2 x$, и, следовательно,

$$f(x) = \frac{\pi}{2} p_0 a^2 x - \varphi(1) A_1(x; \delta) - p_0 a^2 \int_0^1 v K(x, v; \delta) dv + \\ + \frac{2}{\pi} \varphi(1) \int_0^1 A_1(v; \delta) K(x, v; \delta) dv + \dots \quad (4.1)$$

Преобразуем входящие в (4.1) выражения $A_1(x; \delta)$ и $K(x, v; \delta)$. При этом используем интегральные представления функций Бесселя J_0 и J_1 . Так

$$A_1(x; \delta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty H_1(\delta \lambda) \sin \lambda x d\lambda \int_0^1 \frac{\cos \lambda u du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{2}{\pi} \int_0^1 H_{10}(x, u; \delta) \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$$

Здесь

$$H_{10}(x, u; \delta) = \int_0^\infty H_1(\delta \lambda) \sin \lambda x \cos \lambda u d\lambda$$

Аналогично

$$K(x, v; \delta) = \frac{2}{\pi} v \int_0^1 \frac{dt}{t \sqrt{t^2 - v^2}} \int_0^t H_{20}(x, u; \delta) \sqrt{t^2 - u^2} du$$

где

$$H_{20}(x, u; \delta) = \int_0^\infty \lambda^2 H_1(\delta \lambda) \sin \lambda x \cos \lambda u d\lambda$$

Заметим, что входящее в эти формулы под знаком интеграла выражение $H_1(z)$ может быть представлено следующим образом:

$$z H_1(z) = \frac{z(e^{-2z} - 1 - 2z^2 - 2z)}{2(z + \operatorname{sh} z \operatorname{ch} z)} \approx \frac{1}{4} (e^{-p_1 z} - 6.2 z e^{-p_2 z} + 8 z e^{-p_3 z} - \\ - e^{-p_4 z} + 4.2 z e^{-p_3 z} + 10.4 z^2 e^{-p_4 z} + 12.4 z^3 e^{-p_3 z} - 8 z e^{-p_4 z} - \\ - 16 z^2 e^{-p_4 z} - 16 z^3 e^{-p_4 z}) \quad (4.2)$$

$$(p_1 = 4.8, p_2 = 4.0, p_3 = 2.8, p_4 = 2.0)$$

Здесь использовано [2], что

$$\frac{u}{u + \operatorname{sh} u} \approx \left(\frac{1}{2} - 1.55 u \right) e^{-1.4u} + 2u e^{-u}$$

Вычисляя входящие в решение (4.1) интегралы и разлагая при этом подынтегральные функции в ряды по степеням δ^{-1} , получим

$$f(x) = \frac{1}{2} \pi p_0 a^2 x - \varphi(1) c_1 x \delta^{-2} + \varphi(1) c_2 (2x^3 + 3x) \delta^{-4} + \\ + \frac{1}{2} \pi p_0 a^2 c_3 x \delta^{-4} + \dots \quad (4.3)$$

$$(c_1 = -2.31, c_2 = -0.83, c_3 = -0.63)$$

Найдя $\varphi(t)$ по формуле (3.8), определим значение входящей в (4.3) постоянной $\varphi(1)$. После этого непосредственно найдем, что

$$\varphi'(t) = \frac{1}{2} \pi p_0 a^2 t \{ 1 + a_1 \delta^{-2} - (a_2 + a_3 t^2) \delta^{-4} + (a_4 + a_5 t^2 + a_6 t^4) \delta^{-6} + \dots \} \quad (4.4)$$

$$(a_1 = 1.15, a_2 = -0.71, a_3 = 1.25, a_4 = -0.38, a_5 = 0.09, a_6 = 0.77)$$

Выражение (4.4) позволяет по формуле (3.3) найти $B(\lambda)$ и тем самым на основании формул § 2 получить решение задачи о напряженном состоянии в полосе с трещиной. В частности, смещение точек поверхности трещины ($x \leq 1$) выражается так

$$v^0 = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E a} \int_x^1 \frac{\varphi'(t) dt}{\sqrt{t^2 - x^2}} = \frac{2(1-\nu^2)}{E} p_0 a \sqrt{1-x^2} \Delta(x; \delta) \quad (4.5)$$

где

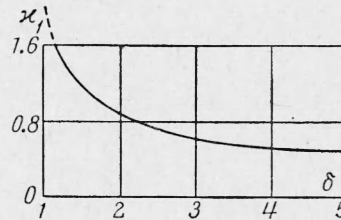
$$\Delta(x; \delta) = 1 + a_1 \delta^{-2} - \left[a_2 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} x^2 \right) a_3 \right] \delta^{-4} + \left[a_4 + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} x^2 \right) a_5 + \left(\frac{1}{5} + \frac{4}{15} x^2 + \frac{8}{15} x^4 \right) a_6 \right] \delta^{-6} - \dots \quad (4.6)$$

Однако длина равновесной трещины еще не определена, ибо, как было сказано, решение задачи проводилось без учета сил сцепления. Для нахождения длины $2a$ равновесной трещины потребуем плавности смыкания противоположных поверхностей ее вблизи кончика. Эта длина может быть определена из соотношения, записанного в безразмерной форме

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{dv^0}{dx} \sqrt{1-x^2} \right) = \frac{2K(1-\nu^2) \sqrt{a}}{\pi E} \quad (4.7)$$

Отсюда

$$\frac{p_0 \sqrt{a}}{\sqrt{2}} \Delta(1; \delta) = \frac{K}{\pi} \quad (\Delta(1; \delta) = 1 + 1.15 \delta^{-2} - 0.55 \delta^{-4} + 0.49 \delta^{-6} + \dots = \frac{\varphi'(1)}{\frac{1}{2} \pi p_0 a^2}) \quad (4.8)$$



Фиг. 2

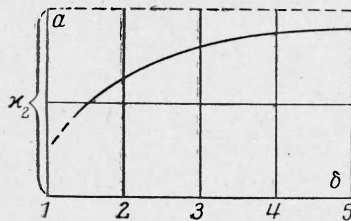
При $\delta \rightarrow \infty$ ($\Delta(1; \delta) = 1$) условие (4.8) принимает вид, совпадающий с известным решением для полосы бесконечной ширины.

Соотношение (4.8) можно записать в

виде

$$\frac{\Delta(1; \delta)}{\sqrt{\delta}} = \frac{K \sqrt{2}}{\pi p_0 \sqrt{h}} = \kappa_1 \quad (h = a\delta) \quad (4.9)$$

Как видно из построенного по формуле (4.9) графика (фиг. 2), при данной ширине полосы с увеличением нагрузки p_0 размер равновесной трещины уменьшается. Как и следовало ожидать, равновесие трещин в рассматриваемом случае нагрузки постоянной интенсивности неустойчиво. Из



Фиг. 3

графика, кроме того, видно, что неустойчивость развития трещины с уменьшением параметра $\delta = h/a$ принимает более резкий характер. Это видно также из фиг. 3, на которой дана зависимость размера a равновесной трещины при данной нагрузке от параметра δ . Так, например, если $h = 1.5 a$, то критический размер трещины уменьшается примерно вдвое

по сравнению с таковым в безграничном теле. При $h \geq 5a$ критический размер равновесной трещины в полосе практически совпадает с критическим размером

$$a = 2K^2\pi^2 p_0^2 = \kappa_2$$

трещины в безграничном теле.

§ 5. Случай осевой симметрии. Рассмотрим толстую безграничную пластинку с круглой трещиной в срединной плоскости; выбрав начало координат в центре трещины, направим ось z перпендикулярно срединной плоскости пластинки. Пусть под действием заданной симметричной относительно оси z разрывающей нагрузки трещина раскрывается. Снимая аналогично тому, как это сделано в § 1, напряжения на границе, получим следующие граничные условия:

при $z = 0$

$$\tau_{rz} = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad (5.1)$$

$$\sigma_z = -g(r) \quad (0 \leq r \leq a) \quad \omega = 0 \quad (r \geq a) \quad (5.2)$$

при $z = h$

$$\tau_{rz} = 0, \quad \sigma_z = 0 \quad (0 \leq r < \infty) \quad (5.3)$$

Здесь $g(r)$ — раскалывающее напряжение в точках поверхности трещины (в преобразованном напряженном состоянии [1]), $2h$ — толщина пластинки, a — радиус равновесной трещины, r — радиальная координата.

Бигармоническая функция [4]

$$\begin{aligned} \Theta(\rho, \zeta) = a^3 \int_0^\infty \lambda^{-2} \left\{ \left[2\nu + \frac{\lambda \zeta \operatorname{sh}^2 \lambda \delta}{\lambda \delta + \operatorname{sh} \lambda \delta \operatorname{ch} \lambda \delta} \right] \operatorname{ch} \lambda \zeta - \right. \\ \left. - \left[\lambda \zeta - \frac{\lambda^2 \delta^2 - 2\nu \operatorname{sh}^2 \lambda \delta}{\lambda \delta + \operatorname{sh} \lambda \delta \operatorname{ch} \lambda \delta} \right] \operatorname{sh} \lambda \zeta \right\} \chi(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda \\ (\rho = r/a, \delta = h/a, \zeta = z/a) \end{aligned}$$

через которую выражаются компоненты смещения и напряжения, позволяет удовлетворить граничным условиям (5.1) и (5.3), уравнениям равновесия и совместности. При этом на основании граничных условий (5.2) функция $\chi(\lambda)$ должна являться решением следующей системы дуальных интегральных уравнений:

$$\int_0^\infty \lambda H(\lambda \delta) \chi(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda = \frac{\pi}{2} a^2 g(\rho) \quad (0 \leq \rho < 1) \quad (5.4)$$

$$\int_0^\infty \chi(\lambda) J_0(\lambda \rho) d\lambda = 0 \quad (\rho > 1), \quad (H(\lambda \delta) = \frac{\operatorname{sh}^2 \lambda \delta - \lambda^2 \delta^2}{\lambda \delta + \operatorname{sh} \lambda \delta \operatorname{ch} \lambda \delta} \equiv 1 + H_1(\lambda \delta))$$

Интересно отметить, что, как и в задаче о штампе, плоский и осесимметричный случаи описываются аналогичными по виду уравнениями с заменой лишь функции Бесселя (для случая осевой симметрии) на косинус.

Введем новую функцию [4, 5]

$$\chi(\lambda) = \int_0^1 \Phi(t) \sin \lambda t dt \quad (5.5)$$

Тогда второе из уравнений (5.4) удовлетворится тождественно, а первое из уравнений (5.4) с учетом формул типа (3.8) после соответствующих преобразований [4] примет вид

$$f(\rho) + \frac{2}{\pi} \int_0^1 f(v) K(v, \rho; \delta) dv = \frac{\pi}{2} g(\rho) a^2 \quad (\rho \leq 1) \quad (5.6)$$

Здесь

$$f(\rho) = \int_0^\rho \frac{\Phi'(t) dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}}, \quad K(v, \rho; \delta) = \frac{2}{\pi} v \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - v^2}} \int_0^\rho N(u, t; \delta) \frac{du}{\sqrt{\rho^2 - u^2}}$$

где

$$N(u, t; \delta) = \int_0^\infty \lambda H_1(\delta \lambda) \sin \lambda t \cos \lambda u d\lambda$$

Решение уравнения (5.6) можно взять в виде

$$f(\rho) = \frac{\pi}{2} a^2 \left\{ g(\rho) - \frac{2}{\pi} \int_0^1 K(v; \rho; \delta) g(v) dv + \left(\frac{2}{\pi} \right)^2 \int_0^1 K(z; \rho; \delta) dz \int_0^1 K(v, z; \delta) g(v) dv + \dots \right\} \quad (5.7)$$

Рассмотрим частный случай, когда пластинка разрывается постоянной нагрузкой интенсивности p_0 , приложенной на ее границе. Используя соотношение (4.2) и, кроме того, разлагая в (5.7) подынтегральные функции по степеням δ^{-1} , после довольно громоздких выкладок получим

$$\Phi(t) = a^2 p_0 \left\{ t - \frac{2}{\pi} \sum_{m=1,3,5}^\infty (-1)^{1/2(m+3)} \frac{1}{\delta^{m+2}} a_{\frac{m+1}{2}} \sum_{k=0}^{1/2(m-1)} C_m^{2k} \frac{t^{2k+1}}{(2k+1)(m-2k+2)} + \dots \right\} \quad (5.8)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_1 &= -4.21, & a_2 &= -4.84, & a_3 &= -3.24, & a_4 &= -1.68 \\ a_5 &= -0.75, & a_6 &= -0.31, & a_7 &= -0.12, & a_8 &= -0.04 \end{aligned}$$

При достаточно больших m

$$a_{1/2(m+1)} = 2^{-(m+2)} (m+3)^2 (m+2)$$

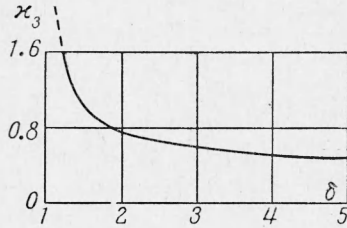
Теперь по формуле (5.5) можно найти функцию $\chi(\lambda)$. Однако для нахождения смещений и напряжений в точках срединной поверхности пластинки нет необходимости находить $\chi(\lambda)$. Действительно, напряженные σ_z° вне трещины ($z=0$, $\rho > 1$) определяется формулой (5.9)

$$\sigma_z^\circ = \frac{2}{\pi a^2} \left\{ -\frac{\Phi(1)}{\sqrt{\rho^2 - 1}} + \int_0^1 \frac{\Phi'(t) dt}{\sqrt{\rho^2 - t^2}} + \int_0^1 \Phi(t) dt \int_0^\infty \lambda H_1(\lambda \delta) \sin \lambda t J_0(\lambda \rho) d\lambda \right\}$$

Смещение точек поверхности трещины ($\rho < 1$) дается следующим выражением:

$$w^\circ = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E a} \int_0^1 \frac{\Phi(t) dt}{\sqrt{t^2 - \rho^2}} \quad (5.10)$$

В обе эти формулы входит функция $\Phi(t)$. Покажем, что для определения не известного заранее радиуса равновесной трещины достаточно знать значение $\Delta(1; \delta) = \Phi(1) / a^2 p_0$. Для нахождения соотношения, определяющего искомый радиус равновесной трещины, потребуем, чтобы напряжение σ_z° при $r \rightarrow a$ ($\rho \rightarrow 1$) имело порядок величины $K / \pi \sqrt{r - a}$. В результате получим



Фиг. 4

$$p_0 \sqrt{2a} \Delta(1; \delta) = K \quad (5.11)$$

Это же условие можно получить, используя принцип плавного смыкания свободных поверхностей равновесной трещины (см. (4.7)). Из (5.10) находим, что

$$\frac{dw^\circ}{d\rho} = \frac{4(1-\nu^2)}{\pi E a} \left\{ -\Phi(1) \frac{\rho}{\sqrt{1-\rho^2}} + \int_1^{\rho} \frac{\Phi'(u) du}{u \sqrt{u^2-1}} - \frac{1}{\rho} \int_1^{\rho} \frac{\Phi(u) du}{u^2 \sqrt{u^2-1}} \right\}$$

Отсюда при помощи (4.7) приходим вновь к соотношению (5.11).

При $\delta \rightarrow \infty$ из формулы (5.8) имеем $\Phi(1) = a^2 p_0$, поэтому соотношение (5.11) при $\delta \rightarrow \infty$ полностью совпадает с известным результатом для пространства с трещиной.

Вычисленное при помощи формулы (5.8) выражение для $\Delta(1; \delta)$ имеет вид:

$$\Delta(1; \delta) = 1 + (0.89 \delta^{-3} - 1.64 \delta^{-5} + 2.36 \delta^{-7} - 3.05 \delta^{-9} + 3.72 \delta^{-11} - \dots) + \\ + (0.80 \delta^{-6} - 2.57 \delta^{-8} + 5.46 \delta^{-10} - 9.69 \delta^{-12} + 14.4 \delta^{-14} - \dots) + \dots$$

На фиг. 4 при помощи соотношения

$$\frac{\Delta(1; \delta)}{\sqrt{\delta}} = \frac{K}{p_0 \sqrt{2h}} = \kappa_3 \quad (5.12)$$

полученного из формулы (5.11), построен график, позволяющий находить равновесный радиус трещины в зависимости от приложенной нагрузки. Сравнение графиков, построенных на фиг. 2 и 4, показывает, что поведение трещины в осесимметричном случае аналогично поведению прямой трещины в полосе.

Поступила 7 III 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Баренблатт Г. И. О равновесных трещинах, образующихся при хрупком разрушении. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3, 4, 5.
2. Снеддон И. Преобразования Фурье. ИЛ, 1955.
3. Привалов И. И. Интегральные уравнения. ОНТИ, 1935.
4. Lowengrub M. Stress in the vicinity of a crack in a thick elastic plate. Quart. Appl. Math., 1961, vol. XIX, № 2, 119—126.
5. Лебедев Н. Н., Уфлянд Я. С. Осесимметричная контактная задача для упругого слоя. ПММ, 1958, т. XXII, вып. 3, 320—326.