УДК 517.988

О кластеризации стационарных точек функционалов невязки условно-корректных обратных задач*

М.Ю. Кокурин

Марийский государственный университет, пл. Ленина, 1, Йошкар-Ола, 424000
E-mail: kokurinm@yandex.ru

Кокурин М.Ю. О кластеризации стационарных точек функционалов невязки условно-корректных обратных задач // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 4. — С. 393–406.

Рассматривается класс условно-коррректных задач в гильбертовом пространстве, характеризуемый гельдеровой оценкой условной устойчивости на выпуклом замкнутом ограниченном множестве. Исследуются метод квазирешений В.К. Иванова и его конечномерный вариант, связанные с минимизацией многоэкстремального функционала невязки на множестве условной корректности или на его конечномерном сечении. Для этих экстремальных задач устанавливается, что каждая их стационарная точка, не слишком далекая от искомого решения исходной обратной задачи, лежит в малой окрестности решения. Даны оценки диаметра указанной окрестности в терминах погрешностей входных данных.

DOI: 10.15372/SJNM20180404

Ключевые слова: *обратная задача, условно-корректная задача, метод квазирешений, глобальная оптимизация, конечномерное подпространство, оценка точности, эффект кластеризации.*

Kokurin M.Yu. The clustering effect for stationary points of discrepancy functionals associated with conditionally well-posed inverse problems // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2018. — Vol. 21, № 4. — P. 393–406.

In the Hilbert space, we consider a class of conditionally well–posed inverse problems, for which the Hölder type estimate of conditional stability on a closed convex bounded subset holds. We investigate the Ivanov quasisolution method and its finite dimensional version associated with the minimizing a multi-extremal discrepancy functional over a conditional stability set and over the finite dimensional section of this set, respectively. For these optimization problems, we prove that each their stationary point that is located not too far from the desired solution of the original inverse problem, in reality belongs to a small neighborhood of the solution. Estimates for the diameter of this neighborhood in terms of error levels in input data are also given.

Keywords: *inverse problem, conditionally well–posed problem, quasisolution method, global optimization, finite dimensional subspace, accuracy estimate, clustering effect.*

---

1. Постановка задачи

В работе рассматриваются нелинейные обратные задачи, моделируемые операторными уравнениями

$$F(u) = f, \quad u \in D, \tag{1}$$

*Работа выполнена в рамках государственного задания по Марийскому государственному университету (проект №1.5420.2017/8.9), поддержана РФФИ (проект №16-01-00039a).

© М.Ю. Кокурин, 2018

где $F : H_1 \to H_2$ — оператор прямой задачи, предполагаемый дифференцируемым по Фреше на ограниченном замкнутом множестве $D \subset H_1$; H_1, H_2 — вещественные гильбертовы пространства. В приложениях множество D определяет априорные ограничения на искомый элемент $u \in H_1$. Этот элемент описывает подлежащий определению набор параметров исследуемой модели. Элемент $f \in H_2$ описывает результаты наблюдения, полученные в ходе экспериментов с моделируемым процессом, и выполняет роль входных данных для обратной задачи реконструкции параметров модели. Всюду далее считаем, что оператор F инъективен на множестве D и $f \in F(D)$. Обозначим через u^* искомое решение задачи (1). Ввиду неизбежных погрешностей измерения, элемент f и оператор F, как правило, бывают заданы приближенно, так что вместо них доступны аппроксимации $\widetilde{f} \in H_2$ и $\widetilde{F} : H_1 \to H_2$. В дальнейшем считаем, что

$$\|\widetilde{f} - f\|_{H_2} \leq \delta, \tag{2}$$

оператор $\widetilde{F}$ дифференцируем по Фреше на D и, кроме того,

$$\|\widetilde{F}(u) - F(u)\|_{H_2} \leq h, \qquad \|\widetilde{F}'(u) - F'(u)\|_{L(H_1,H_2)} \leq h \quad \forall u \in D. \tag{3}$$

Величины δ, h в (2), (3) характеризуют уровень погрешности в задании элемента f и оператора F соответственно. Будем предполагать, что $\delta + h \leq \Delta$, где фиксированная постоянная Δ определяет ограничения на суммарные возмущения элементов задачи. Через $\|\cdot\|_H$ и $(\cdot,\cdot)_H$ в статье обозначаются норма и скалярное произведение гильбертова пространства H.

Характерное свойство многих прикладных обратных задач, в частности обратных задач математической физики [1–5], состоит в том, что обратный оператор F^{-1} как отображение из H_2 в H_1 не является непрерывным в точках из $F(D)$ в том смысле, что из сходимости

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{H_2} = 0; \quad f_n \in H_2, \quad f \in F(D), \tag{4}$$

не следует сходимость элементов $F^{-1}(f_n)$, если они определены, к $F^{-1}(f)$ в метрике H_1. В этом случае уравнение (1) является некорректной по Адамару задачей.

Важным и широко распространенным подклассом некорректных обратных задач (1) является класс условно-корректных (корректных по А.Н. Тихонову) на D задач [1, 2, 6, 7]. Условная корректность задачи (1) на множестве D по определению означает, что оператор F^{-1} относительно непрерывен на $F(D)$, т. е. что равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{H_2} = 0; \quad f_n, f \in F(D), \tag{5}$$

влечет $\lim_{n\to\infty} \|F^{-1}(f_n) - F^{-1}(f)\|_{H_1} = 0$. В (5) в отличие от (4) требуется, чтобы аппроксимирующие $f \in F(D)$ элементы f_n также лежали в $F(D)$. Если условие (5) выполняется для фиксированного элемента f, то задача (1) называется условно-корректной в точке $u^* = F^{-1}(f)$.

Классический подход к построению устойчивых процедур аппроксимации решений некорректных задач связан с понятием регуляризующего оператора (алгоритма). В этой статье проанализируем метод квазирешений В.К. Иванова [1, 8], первоначально предложенный для задач (1) с компактным множеством D и непрерывным на D отображением $F : H_1 \to H_2$. Регуляризующий оператор, отвечающий методу квазирешений, имеет вид

$$R(\widetilde{F}, \widetilde{f}) = \arg\min_{u\in D} \widetilde{J}(u), \quad \widetilde{J}(u) = \frac{1}{2}\|\widetilde{F}(u) - \widetilde{f}\|^2_{H_2}. \tag{6}$$

Таким образом, в качестве приближения к u^* выбирается элемент из D, доставляющий глобальный минимум функционалу $\widetilde{J}$ на множестве D.

Заметим, что метод (6) трудно реализуем численно в случае произвольного непрерывного и даже гладкого оператора $\widetilde{F}$, заданного на выпуклом компакте D. Дело в том, что задача (6), вообще говоря, — многоэкстремальная (см. ниже пример 1) и потому трудноразрешима стандартными итерационными методами, даже отыскание ее приближенного решения может потребовать привлечения комбинаторных алгоритмов и суперкомпьютерных технологий.

В вычислительной практике используются различные схемы конечномерной аппроксимации задачи (6). Ниже рассмотрим одну из простейших таких схем. Выберем семейство конечномерных подпространств $\{\mathcal{H}_N\}_{N=1}^{\infty} \subset H_1$ таких, что

$$\mathcal{H}_N \subset \mathcal{H}_{N+1}, \quad N = 1, 2, \ldots; \quad \overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathcal{H}_N} = H_1. \tag{7}$$

Обозначим $D_N = D \cap \mathcal{H}_N$ и сопоставим (6) конечномерную экстремальную задачу:

$$\min\{\widetilde{J}(u) : u \in D_N\}. \tag{8}$$

Без потери общности можем считать, что $0 \in D$, тогда $0 \in D_N$ для всех номеров $N \geq 1$. Таким образом, в наших условиях D_N есть непустой выпуклый компакт, а $\widetilde{J}$ — непрерывный на D_N функционал. Поэтому задача (8) имеет непустое множество решений при любом $N \geq 1$. В общем случае аппроксимирующая задача (8) многоэкстремальна, как и исходная задача (6). Поэтому непосредственное применение к (8) классических итерационных методов минимизации приводит лишь к некоторой стационарной точке, близость которой к глобальному минимуму в задачах (8) или (6) априори не гарантируется. Тем не менее ниже будет показано, что для широкого класса условно-корректных задач такая близость может быть обеспечена за счет обозримых дополнительных условий на характеристики задачи (1). При этом мы отказываемся от условия компактности множества D, но вводим требование равномерной условной корректности (1) в точке u^*, т. е. равномерной относительной непрерывности оператора F^{-1} на $F(D)$ в окрестности точки f. Сформулируем это условие в следующем уточненном виде.

Условие 1. Имеет место степенная оценка условной устойчивости задачи (1) с показателем $1 \leq p \leq 2$:

$$\|F(u) - F(u^*)\|_{H_2} \geq m\|u - u^*\|_{H_1}^p \quad \forall u \in D\ (m > 0). \tag{9}$$

Из (9) очевидно следует условная корректность задачи (1) в точке u^*.

Замечание. Поскольку элемент u^* неизвестен, на практике обоснование (9) естественно заменять проверкой более жесткого условия

$$\|F(u) - F(v)\|_{H_2} \geq m\|u - v\|_{H_1}^p \quad \forall u, v \in D\ (m > 0, 1 \leq p \leq 2).$$

В этом усиленном виде условие 1 выполняется для многих обратных задач математической физики, см., например, [3–5]. Отметим, что в большинстве примеров из [3–5] можно принять $p = 1$. Для конечномерных аппроксимаций обратных задач (1) с гладким оператором F аналогичная (9) оценка использовалась также в [9].

Относительно множества D и оператора F всюду в дальнейшем считаем выполненным следующее условие.

Условие 2. Множество $D \subset H_1$ выпукло, замкнуто и ограничено, $0 \in D$. Производная F' удовлетворяет условию Липшица:

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{L(H_1,H_2)} \le L\|u - v\|_{H_1} \quad \forall u, v \in D. \tag{10}$$

Из неравенства (10) следует, что

$$\|F(u) - F(v)\|_{H_2} \le M\|u - v\|_{H_1}, \qquad \|F'(u)\|_{L(H_1,H_2)} \le M \quad \forall u, v \in D, \tag{11}$$

где $M = \|F'(\overline{u})\|_{L(H_1,H_2)} + L\mathrm{diam}(D)$ с произвольной точкой $\overline{u} \in D$. Здесь $\mathrm{diam}(D) \triangleq \sup\{\|u - v\|_{H_1} : u, v \in D\} < \infty$.

Далее будет установлено, что любая не слишком удаленная от u^* стационарная точка задач (6) и (8) на самом деле лежит в малой окрестности искомого решения u^*. Будет дана оценка диаметра указанной окрестности в терминах уровней погрешности δ, h и величины, характеризующей качество аппроксимации D множеством D_N. Тем самым обосновывается способ конструирования конечномерных устойчивых итерационных процессов аппроксимации u^*. Этот способ состоит в применении к задаче (8) произвольного итерационного процесса, сходящегося в целом или вдоль подпоследовательности к точке, удовлетворяющей необходимому условию минимума. В теории конечномерной оптимизации известен широкий спектр таких процессов. Для условно-корректных обратных задач с точно заданным оператором указанный подход развивался в [10].

План работы следующий. В пункте 2 устанавливается оценка близости произвольной стационарной точки задач (6) и (8), принадлежащей фиксированному шару, к искомому решению задачи (1). В п. 3 анализируются некоторые примеры построения аппроксимирующих подпространств, удовлетворяющих условию (7).

2. Погрешность конечномерной аппроксимации

Пусть точка $u_N^* \in D_N$ удовлетворяет необходимому условию минимума в задаче (8):

$$(\widetilde{J}'(u_N^*), u_N^* - u)_{H_1} \le 0 \quad \forall u \in D_N. \tag{12}$$

Целью последующих рассуждений является получение оценки для $\|u_N^* - u^*\|_{H_1}$. Пусть P_{D_N} есть оператор метрического проектирования из H_1 на D_N, $P_{\mathcal{H}_N}$ — ортопроектор из H_1 на подпространство $\mathcal{H}_N$. Обозначим

$$\varepsilon_N = \|u^* - P_{D_N}(u^*)\|_{H_1}. \tag{13}$$

Величина ε_N характеризует качество аппроксимации множества D его конечномерным сечением D_N. Устанавливаемая далее оценка $\|u_N^* - u^*\|_{H_1} = O((\varepsilon_N + \delta + \sqrt{h})^{1/p})$ (см. (26)) содержательна в том случае, когда

$$\lim_{N\to\infty} \varepsilon_N = 0. \tag{14}$$

Обсуждению условия (14) и примерам его реализации посвящен п. 3.

Будем рассматривать $\widetilde{J}$ как функционал, действующий из гильбертова пространства $\mathcal{H}_N$ с метрикой, индуцированной из H_1. Градиент $\widetilde{J}$ имеет вид:

$$\widetilde{J}'(u) = P_{\mathcal{H}_N}\widetilde{F}'^*(u)(\widetilde{F}(u) - \widetilde{f}), \quad u \in D_N. \tag{15}$$

Полагая в (12) $u = P_{D_N}(u^*)$ и используя равенство $P^*_{\mathcal{H}_N} = P_{\mathcal{H}_N}$, с учетом (15) получаем

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{F}'^*(u^*_N)(\widetilde{F}(u^*_N) - \widetilde{f}), P_{\mathcal{H}_N}(u^*_N - P_{D_N}(u^*))\big)_{H_1}& \\ = \big(\widetilde{F}'^*(u^*_N)(\widetilde{F}(u^*_N) - \widetilde{f}), u^*_N - P_{D_N}(u^*)\big)_{H_1} \le 0.& \qquad (16)\end{aligned}$$

Из (10) следует, что для всех точек $u, v \in D$ выполняется

$$F'(u)(u - v) = F(u) - F(v) + G(u, v), \quad \|G(u, v)\|_{H_2} \le \frac{1}{2}L\|u - v\|^2_{H_1}. \qquad (17)$$

На основании (16) имеем

$$\begin{aligned}\big(\widetilde{F}'^*(u^*_N)&(\widetilde{F}(u^*_N) - \widetilde{f}), u^*_N - P_{D_N}(u^*)\big)_{H_1} \\ &= (F(u^*_N) - \widetilde{f}, F'(u^*_N)(u^*_N - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} + \\ &\quad (\widetilde{F}(u^*_N) - F(u^*_N), F'(u^*_N)(u^*_N - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} + \\ &\quad ([\widetilde{F}'^*(u^*_N) - F'^*(u^*_N)](\widetilde{F}(u^*_N) - \widetilde{f}), u^* - P_{D_N}(u^*))_{H_1} \\ &= (F(u^*_N) - f + (f - \widetilde{f}), F'(u^*_N)(u^*_N - u^*) + F'(u^*_N)(u^* - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} + \\ &\quad (\widetilde{F}(u^*_N) - F(u^*_N), F'(u^*_N)(u^*_N - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} + \\ &\quad (\widetilde{F}(u^*_N) - \widetilde{f}, [\widetilde{F}'(u^*_N) - F'(u^*_N)](u^*_N - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} \le 0.\end{aligned}$$

Используя (17), получаем

$$\begin{aligned}(F(u^*_N) - f + (f - \widetilde{f}), F(u^*_N) - f + G(u^*_N, u^*) + F'(u^*_N)(u^* - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} +& \\ (F(u^*_N) - f, [\widetilde{F}'(u^*_N) - F'(u^*_N)](u^*_N - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} +& \\ (\widetilde{F}(u^*_N) - F(u^*_N) + (f - \widetilde{f}), [\widetilde{F}'(u^*_N) - F'(u^*_N)](u^*_N - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} +& \\ (\widetilde{F}(u^*_N) - F(u^*_N), F'(u^*_N)(u^*_N - P_{D_N}(u^*)))_{H_2} \le 0.& \qquad (18)\end{aligned}$$

Запишем представление

$$u^*_N - P_{D_N}(u^*) = (u^*_N - u^*) + (u^* - P_{D_N}(u^*)).$$

Ввиду (2), (3), (11), (13), (17) и последнего равенства, из (18) следует оценка

$$\begin{aligned}\|F(u^*_N) - f\|^2_{H_2} \le \frac{1}{2}L\|F(u^*_N) - f\|_{H_2}&\|u^*_N - u^*\|^2_{H_1} + \\ &((M + h)\varepsilon_N + \delta)\|F(u^*_N) - f\|_{H_2} + \frac{1}{2}L\delta\|u^*_N - u^*\|^2_{H_1} + \\ &(M + h)(h + \delta)\varepsilon_N + \|F(u^*_N) - f\|_{H_2}\|u^*_N - u^*\|_{H_1}h + \\ &(M + h + \delta)\|u^*_N - u^*\|_{H_1}h.\end{aligned}$$

Обозначим:

$$M_1 = M + \Delta, \qquad M_2 = M_1 + M\mathrm{diam}(D), \qquad M_3 = \max\{L, M_2\}.$$

Тогда из предыдущей оценки с учетом неравенства

$$\|F(u^*_N) - f\|_{H_2} \le M\|u^*_N - u^*\|_{H_1} \le M\mathrm{diam}(D)$$

следует

$$\begin{aligned}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^2 \leq \frac{1}{2}L\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}\|u_N^* - u^*\|_{H_1}^2 + \\ (M_1\varepsilon_N + \delta)\|F(u_N^*) - f\|_{H_2} + \frac{1}{2}L\delta\|u_N^* - u^*\|_{H_1}^2 + \\ M_1(h+\delta)\varepsilon_N + M_2\|u_N^* - u^*\|_{H_1}h.\end{aligned}$$

Пользуясь неравенством

$$\|u_N^* - u^*\|_{H_1} \leq \frac{1}{2}(1 + \|u_N^* - u^*\|_{H_1}^2),$$

далее получаем

$$\begin{aligned}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^2 \leq \frac{1}{2}L\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}\|u_N^* - u^*\|_{H_1}^2 + \\ (M_1\varepsilon_N + \delta)\|F(u_N^*) - f\|_{H_2} + \frac{1}{2}M_3(\delta + h)\|u_N^* - u^*\|_{H_1}^2 + \\ M_1(h+\delta)\varepsilon_N + \frac{1}{2}M_2 h.\end{aligned}$$

Отсюда с учетом (9) находим

$$\begin{aligned}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^2 \leq &\frac{L}{2m^{2/p}}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{1+2/p} + \\ &(M_1\varepsilon_N + \delta)\|F(u_N^*) - f\|_{H_2} + \frac{M_3(\delta+h)}{2m^{2/p}}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{2/p} + \\ &M_1(\delta+h)\varepsilon_N + \frac{1}{2}M_2 h \\ \leq &\frac{L}{2m^{2/p}}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{1+2/p} + M_1(\delta+h)\varepsilon_N + \frac{1}{2}M_2 h + \\ &(M_1\varepsilon_N + \delta + h)\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}\Big(1 + \frac{M_3}{2m^{2/p}}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{2/p-1}\Big) \\ \leq &\frac{L}{2m^{2/p}}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{1+2/p} + C_1(M_1\varepsilon_N + \delta + h)\|F(u_N^*) - f\|_{H_2} + \\ &M_1(\delta+h)\varepsilon_N + \frac{1}{2}M_2 h, \end{aligned} \tag{19}$$

где $C_1 = 1 + (2m^{2/p})^{-1}M_3(M\operatorname{diam}(D))^{2/p-1}$. Пользуясь неравенством

$$(M_1\varepsilon_N + \delta + h)\|F(u_N^*) - f\|_{H_2} \leq \frac{C_1}{2}(M_1\varepsilon_N + \delta + h)^2 + \frac{1}{2C_1}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^2,$$

из (19) получаем

$$\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^2 \leq \frac{L}{m^{2/p}}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{1+2/p} + (C_1^2 + 1)(M_1\varepsilon_N + \delta + h)^2 + M_2 h.$$

Отсюда следует, что

$$\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^2 \leq \frac{L}{m^{2/p}}\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{1+2/p} + C_2(M_1\varepsilon_N + \delta + \sqrt{h})^2, \tag{20}$$

где $C_2 = (C_1^2 + 1)\max\{1, \Delta\} + M_2$.

Рассмотрим далее два возможных случая.

Случай 1. $p = 2$. Предположим, что

$$\frac{L}{m} < 1. \tag{21}$$

Тогда из (20) следует оценка

$$\|F(u_N^*) - f\|_{H_2} \le C_3(M_1\varepsilon_N + \delta + \sqrt{h}), \quad C_3 = \Big[C_2\Big(1 - \frac{L}{m}\Big)^{-1}\Big]^{1/2}. \tag{22}$$

Случай 2. $1 \le p < 2$. Предположим, что

$$\|F(u_N^*) - f\|_{H_2} \le \Big(\frac{m^{2/p}}{2L}\Big)^{p/(2-p)}. \tag{23}$$

Тогда с использованием равенства

$$\|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{1+2/p} = \|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^2 \|F(u_N^*) - f\|_{H_2}^{2/p-1}$$

из (20) получаем оценку (22) с константой

$$C_3 = \sqrt{2C_2}. \tag{24}$$

Используя первое неравенство в (11), заключаем, что условие (23) выполняется, если

$$\|u_N^* - u^*\|_{H_1} \le \frac{1}{M}\Big(\frac{m^{2/p}}{2L}\Big)^{p/(2-p)}. \tag{25}$$

В свою очередь неравенство (22) ввиду (9) приводит к оценке

$$\|u_N^* - u^*\|_{H_1} \le \Big(\frac{C_3}{m}\Big)^{1/p}(M_1\varepsilon_N + \delta + \sqrt{h})^{1/p}. \tag{26}$$

Следующая теорема подытоживает проведенные рассуждения.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1 и 2. Предположим, что при $p = 2$ выполнено* (21), *а в случае $1 \le p < 2$ справедливо соотношение либо* (23), *либо* (25). *Тогда имеет место оценка* (26), *в которой константа C_3 определена в* (22) *и* (24).

Прокомментируем вкратце полученный результат. В случае $1 \le p < 2$ теорема 1 утверждает, что если величины ε_N, δ, h достаточно малы, то все стационарные точки задачи (8), лежащие в шаре

$$\Omega_N(u^*; m, L, M) = \Big\{u \in \mathcal{H}_N : \|u - u^*\|_{H_1} \le \frac{1}{M}\Big(\frac{m^{2/p}}{2L}\Big)^{p/(2-p)}\Big\},$$

реально находятся от u^* на расстоянии порядка $O((\varepsilon_N + \delta + \sqrt{h})^{1/p})$. Тем самым возможная многоэкстремальность задачи (8) оказывается несущественной, если ограничиться указанным шаром. В частности, любая стационарная предельная точка из $\Omega_N(u^*; m, L, M)$, порожденная произвольным итерационным процессом конечномерной минимизации, служит хорошим приближением для u^* при малых ε_N, δ, h. В случае $h = 0$ для одного из вариантов метода проекции градиента это свойство было отмечено в [10]. В случае $p = 2$ при выполнении условия (21) дополнительных ограничений на u_N^* нет, т. е. можно положить $\Omega_N(u^*; m, L, M) = \mathcal{H}_N$.

Выясним теперь, когда в шаре $\Omega_N(u^*; m, L, M)$ имеются стационарные точки задачи (8). Пусть $\widetilde{u}_N^* = \operatorname{argmin}\{\widetilde{J}(u) : u \in D_N\}$ есть произвольная точка, реализующая глобальный минимум в (8). Тогда, согласно (11), (13),

$$\|\widetilde{F}(\widetilde{u}_N^*) - \widetilde{f}\|_{H_2} \leq \|\widetilde{F}(P_{D_N}(u^*)) - \widetilde{f}\|_{H_2} \leq M\varepsilon_N + \delta + h.$$

Следовательно,

$$\|F(\widetilde{u}_N^*) - f\|_{H_2} \leq M\varepsilon_N + 2(\delta + h). \tag{27}$$

Используя (9), из (27) получаем

$$\|\widetilde{u}_N^* - u^*\|_{H_1} \leq \Big(\frac{M\varepsilon_N + 2(\delta + h)}{m}\Big)^{1/p}.$$

Видим, что стационарная точка $\widetilde{u}_N^*$ задачи (8) удовлетворяет условиям (23) и (25), если выполняются соответственно условия

$$M\varepsilon_N + 2(\delta + h) \leq \Big(\frac{m^{2/p}}{2L}\Big)^{p/(2-p)}, \qquad M\varepsilon_N + 2(\delta + h) \leq \frac{m}{M^p}\Big(\frac{m^{2/p}}{2L}\Big)^{p^2/(2-p)}.$$

Если величины δ, h достаточно малы и выполняется условие (14), то последние неравенства выполнены при всех $N \geq N_0$ с подходящим N_0. Итак, при выполнении условия (14) и малых δ, h шар $\Omega_N(u^*; m, L, M)$, $N \geq N_0$, действительно содержит стационарные точки задачи (8).

В процессе доказательства теоремы 1 конечномерность подпространства $\mathcal{H}_N$ фактически не использовалась. Условие $\dim\mathcal{H}_N < \infty$ требуется лишь для обеспечения непосредственной численной реализуемости алгоритмов, применяемых для решения задачи (8). Таким образом, результат теоремы 1 остается в силе при выборе $\mathcal{H}_N = H_1$. В этом случае $D_N = D$, и согласно (13) величина $\varepsilon_N = 0$. Используя оценку (26), приходим к следующему результату.

Теорема 2. *Пусть выполняются условия 1, 2 и $\overline{u}^* \in D$ есть произвольная стационарная точка задачи* (6). *Предположим, что при $p = 2$ выполнено условие* (21). *В случае $1 \leq p < 2$ пусть выполняется условие*

$$\|\overline{u}^* - u^*\|_{H_1} \leq \frac{1}{M}\Big(\frac{m^{2/p}}{2L}\Big)^{p/(2-p)}.$$

Тогда имеет место оценка

$$\|\overline{u}^* - u^*\|_{H_1} \leq \Big(\frac{C_3}{m}\Big)^{1/p}(\delta + \sqrt{h})^{1/p}. \tag{28}$$

Наличие стационарных точек в задаче (6) гарантировано, например, в случае компактного множества D.

Как показывает оценка (28), при наших предположениях несмотря на возможную многоэкстремальность задачи (6), имеет место эффект кластеризации ее стационарных точек. Именно, любая стационарная точка, не слишком далекая от решения u^*, лежит от u^* на расстоянии порядка $O((\delta + \sqrt{h})^{1/p})$ и при малых δ, h годится в качестве аппроксимации u^*. В [11] этот эффект использовался при обосновании аппроксимирующих свойств бесконечномерной версии метода проекции градиента в исходном пространстве H_1.

В заключение пункта приведем пример, иллюстрирующий эффект кластеризации в конечномерном пространстве.

Пример 1. Зафиксируем постоянные $a > 0$, $c_i > 0$, $1 \leq i \leq m$, $m \geq 2$, и рассмотрим отображение

$$F(x) = (c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_mx_m, x_2^2, \ldots, x_m^2), \quad x = (x_1, \ldots, x_m),$$

действующее из компакта $D = \{x \in \mathbb{R}^m : 0 \leq x_i \leq a, 1 \leq i \leq m\} \subset \mathbb{R}^m$ в $\mathbb{R}^m$. Ясно, что F инъективно на D. Кроме того, производная $F'(x)$ удовлетворяет на D условию Липшица. Положим: $f = (0, 0, \ldots, 0)$, $\widetilde{f} = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_m)$, $\widetilde{F} \equiv F$, $h = 0$. Решением задачи $F(x) = f$, $x \in D$, является $x^* = (0, 0, \ldots, 0)$. Следовательно, для всех точек $x \in D$ выполняется

$$\begin{aligned}\|F(x) - F(x^*)\|_{\mathbb{R}^m} &= \Big((c_1x_1 + \cdots + c_mx_m)^2 + \sum_{i=2}^m x_i^4\Big)^{1/2} \\ &\geq \Big(\min_{1\leq i\leq m} c_i\Big)\|x\|_{\mathbb{R}^m} = \Big(\min_{1\leq i\leq m} c_i\Big)\|x - x^*\|_{\mathbb{R}^m}.\end{aligned}$$

Поэтому условие 1 выполнено при $p = 1$ и $m = \min_{1\leq i\leq m} c_i$. Функция (6) в данном случае имеет вид

$$\widetilde{J}(x) = \frac{1}{2}(c_1x_1 + \cdots + c_mx_m - \delta_1)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=2}^m (x_i^2 - \delta_i)^2, \quad x \in \mathbb{R}^m.$$

Предположим, что погрешности в задании компонент вектора f удовлетворяют условиям:

$$\delta_i > 0, \quad 1 \leq i \leq m; \quad c_2\sqrt{\delta_2} + \cdots + c_m\sqrt{\delta_m} \leq \delta_1 < 1, \tag{29}$$

$$\delta_1 < \min\{1, c_1\}a; \quad \delta_i \leq a^2, \quad c_i\delta_1 + \frac{4}{3\sqrt{3}}\delta_i^{3/2} < c_i^2 a, \quad 2 \leq i \leq m. \tag{30}$$

С учетом (29) получаем

$$\|\widetilde{f} - f\|_{\mathbb{R}^m} = \|\widetilde{f}\|_{\mathbb{R}^m} \leq \delta_1\sqrt{1 + \Big(\min_{2\leq i\leq m} c_i\Big)^{-4}} \triangleq \delta.$$

Необходимое условие минимума функции $\widetilde{J}$ в точке $\overline{x} \in D$ (см. (12)) означает, что:

(i) либо $\overline{x} \in D$ является стационарной точкой задачи

$$\min\{\widetilde{J}(x) : x \in K_+\}, \quad K_+ = \{x \in \mathbb{R}^m : x_i \geq 0, 1 \leq i \leq m\},$$

(ii) либо для некоторого номера $1 \leq j \leq m$ выполняется

$$\overline{x}_j = a, \quad \widetilde{J}'_{x_j}(\overline{x}) \leq 0. \tag{31}$$

В случае (i) необходимое условие минимума $\widetilde{J}$ на конусе K_+ имеет вид

$$\widetilde{J}'_{x_i}(\overline{x}) \geq 0, \qquad \widetilde{J}'_{x_i}(\overline{x})\overline{x}_i = 0, \quad 1 \leq i \leq m. \tag{32}$$

Вычислим все такие точки $\overline{x}$. Имеем

$$\widetilde{J}'_{x_1}(x) = c_1(c_1x_1 + \cdots + c_mx_m - \delta_1),$$

$$\widetilde{J}'_{x_i}(x) = c_i(c_1x_1 + \cdots + c_mx_m - \delta_1) + 2x_i(x_i^2 - \delta_i), \quad 2 \leq i \leq m.$$

Предположим вначале, что $\widetilde{J}'_{x_s}(\overline{x}) > 0$ для некоторого номера s. Тогда, согласно (32), $\overline{x}_s = 0$. Следовательно,

$$\widetilde{J}'_{x_1}(\overline{x}) = c_1(c_1\overline{x}_1 + \dots + c_m\overline{x}_m - \delta_1) = \frac{c_1}{c_s}\widetilde{J}'_{x_s}(\overline{x}) > 0. \tag{33}$$

Вновь, используя (32), получаем $\overline{x}_1 = 0$. В то же время соотношение $\widetilde{J}'_{x_s}(\overline{x}) > 0$ не может иметь место для всех номеров $1 \le s \le m$. В этом случае мы имели бы $\overline{x}_1 = \dots = \overline{x}_m = 0$ и $\widetilde{J}'_{x_1}(\overline{x}) = -c_1\delta_1 < 0$ вопреки условию $\widetilde{J}'_{x_1}(\overline{x}) > 0$. Производя при необходимости перенумерацию переменных $x_2, \dots, x_m$, без ограничения общности можем считать, что для некоторого $1 \le l \le m-1$ выполняется

$$\widetilde{J}'_{x_i}(\overline{x}) > 0, \quad 1 \le i \le l; \qquad \widetilde{J}'_{x_i}(\overline{x}) = 0, \quad l+1 \le i \le m.$$

Таким образом,

$$\overline{x}_i = 0, \quad 1 \le i \le l;$$
$$\widetilde{J}'_{x_i}(\overline{x}) = c_i(c_1\overline{x}_1 + \dots + c_m\overline{x}_m - \delta_1) + 2\overline{x}_i(\overline{x}_i^2 - \delta_i) = 0, \quad l+1 \le i \le m.$$

Отсюда с учетом (33) следует $0 < \overline{x}_i < \sqrt{\delta_i}$ при $l+1 \le i \le m$. Но тогда в силу (29)

$$c_1\overline{x}_1 + \dots + c_m\overline{x}_m = c_{l+1}\overline{x}_{l+1} + \dots + c_m\overline{x}_m < c_{l+1}\sqrt{\delta_{l+1}} + \dots + c_m\sqrt{\delta_m} \le \delta_1.$$

Последнее неравенство противоречит (33). Тем самым установлено, что для любой стационарной точки $\overline{x}$ функции $\widetilde{J}$ на K_+ выполняется $\widetilde{J}'(\overline{x}) = 0$. Решая систему уравнений

$$\widetilde{J}'_{x_i}(x) = 0, \quad 1 \le i \le m,$$

получаем 2^{m-1} стационарных точек $\overline{x} = (\overline{x}_1, \dots, \overline{x}_m)$:

$$\overline{x}_i \in \{0, \sqrt{\delta_i}\}, \quad 2 \le i \le m; \qquad \overline{x}_1 = c_1^{-1}(\delta_1 - (c_2\overline{x}_2 + \dots + c_m\overline{x}_m)). \tag{34}$$

Здесь, ввиду (29), $0 \le \overline{x}_1 \le c_1^{-1}\delta_1$. Кроме того, из (30) следует, что $\overline{x} \in D$ для любой определенной в (34) точки $\overline{x}$. При этом на основании (29)

$$\|\overline{x} - x^*\|_{\mathbb{R}^m} = \|\overline{x}\|_{\mathbb{R}^m} \le (c_1^{-2}\delta_1^2 + \delta_2 + \dots + \delta_m)^{1/2} \le c_1^{-1}\delta_1 + \sqrt{\delta_2} + \dots + \sqrt{\delta_m}$$
$$\le \left(c_1^{-1} + \left(\min_{2\le i\le m} c_i\right)^{-1}\right)\delta_1 = \left(c_1^{-1} + \left(\min_{2\le i\le m} c_i\right)^{-1}\right)\left(1 + \left(\min_{2\le i\le m} c_i\right)^{-4}\right)^{-1/2}\delta.$$

Убедимся, что в случае (ii) стационарные точки $\widetilde{J}$ на D отсутствуют. Непосредственно проверяется, что

$$\min_{t\ge 0} 2t(t^2 - \delta) = -\frac{4}{3\sqrt{3}}\delta^{3/2}, \quad \delta > 0. \tag{35}$$

Пусть $j = 1$. Тогда, ввиду (30) и равенства $\overline{x}_1 = a$, выполняется

$$\widetilde{J}'_{x_1}(\overline{x}) = c_1(c_1\overline{x}_1 + \dots + c_m\overline{x}_m - \delta_1) \ge c_1^2 a - c_1\delta_1 > 0.$$

Полученное неравенство противоречит (31). В случае $2 \le j \le m$ с использованием (30), (35) и соотношения $\overline{x}_j = a$ имеем

$$\widetilde{J}'_{x_j}(\overline{x}) = c_j(c_1\overline{x}_1 + \dots + c_m\overline{x}_m - \delta_1) + 2\overline{x}_j(\overline{x}_j^2 - \delta_j) \ge c_j^2 a - c_j\delta_1 - \frac{4}{3\sqrt{3}}\delta_j^{3/2} > 0.$$

Последнее неравенство противоречит (31), тем самым, наше утверждение доказано.

Видим, что множество стационарных точек функции $\widetilde{J}$ на D образует кластер из 2^{m-1} точек, лежащих в $O(\delta)$-окрестности решения x^*. Этот результат соответствует оценке (28) при $p = 1$, $h = 0$. Показательно, что количество стационарных точек кластера экспоненциально растет с размерностью задачи. При этом глобальный минимум $\widetilde{J}$ на D достигается в единственной точке $(\delta_1 - c_1^{-1}(c_2\sqrt{\delta_2} + \cdots + c_m\sqrt{\delta_m}), \sqrt{\delta_2}, \ldots, \sqrt{\delta_m})$.

3. Примеры аппроксимирующих подпространств

Оценка (26) из теоремы 1 актуальна лишь при малых значениях погрешностей конечномерной аппроксимации ε_N. Обсудим в этой связи практические возможности выбора подпространства $\mathcal{H}_N$, обеспечивающего выполнение условия (14). Следующий пример показывает, что произвольный выбор $\mathcal{H}_N$ в рамках условия (7), не учитывающий специфики множества D, не приводит к построению стремящейся к нулю последовательности ε_N даже в случае компактного D.

Пример 2. Пусть

$$H_1 = l_2 \equiv \Big\{(a_1, a_2, \ldots) : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \ldots; \sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty\Big\}.$$

Зафиксируем элемент $g = (g_1, g_2, \ldots) \in l_2$ такой, что $g_i \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots$, и положим $D = \{t\, g : |t| \le 1\}$. Выберем в l_2 семейство подпространств

$$\mathcal{H}_N = \{(a_1, \ldots, a_N, 0, 0, \ldots) : a_i \in \mathbb{R}, i = 1, \ldots, N\}, \quad N = 1, 2, \ldots .$$

Очевидно, что так определенные $\mathcal{H}_N$ удовлетворяют условию (7). Нетрудно видеть, что $D_N = D \cap \mathcal{H}_N = \{0\}$. Следовательно, в случае $u^* = g$ имеем постоянное значение $\varepsilon_N = \|g\|_{l_2} > 0$ для любого $N = 1, 2, \ldots$.

Пример 3. Пусть выполняется условие (7). Используя [12, лемма 4.2], получаем, что соотношение (14) имеет место для любого выпуклого замкнутого ограниченного множества D такого, что $0 \in \operatorname{int}(D)$.

В следующих примерах представлены другие возможности конструктивного построения аппроксимирующих подпространств $\mathcal{H}_N$.

Пример 4. Предположим, что множество условной устойчивости компактно и задается истокообразным представлением

$$D = \{Av : v \in H_1, \|v\|_{H_1} \le R\},$$

где A — неотрицательный вполне непрерывный оператор, $A^* = A \in L(H_1, H_1)$, такой, что $\{v \in H_1 : Av = 0\} = \{0\}$. Пусть $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ есть полная система ортонормированных собственных векторов оператора A, отвечающих собственным значениям $\sigma_i > 0$, $\lim_{i\to\infty} \sigma_i = 0$. Положим

$$\mathcal{H}_N = \operatorname{span}\{e_i\}_{i=1}^{N}.$$

В данном случае

$$D = \left\{\sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i v_i e_i : \sum_{i=1}^{\infty} v_i^2 \le R\right\}, \qquad D_N = \left\{\sum_{i=1}^{N} \sigma_i v_i e_i : \sum_{i=1}^{N} v_i^2 \le R\right\}.$$

Для произвольного элемента $u^* \in D$ имеем представление:

$$u^* = \sum_{i=1}^{\infty} \sigma_i v_i^* e_i, \quad \sum_{i=1}^{\infty} (v_i^*)^2 \le R.$$

Поэтому

$$P_{\mathcal{H}_N} u^* = \sum_{i=1}^{N} \sigma_i v_i^* e_i \in D_N.$$

Следовательно, $P_{D_N}(u^*) = P_{\mathcal{H}_N} u^*$ и

$$\varepsilon_N = \|(E - P_N)u^*\|_{H_1} = \left(\sum_{i=N+1}^{\infty} \sigma_i^2 (v_i^*)^2 \right)^{1/2} \to 0, \quad N \to \infty.$$

Пример 5. Пусть H_1 есть пространство $L_2(-\pi, \pi)$ суммируемых с квадратом периодических функций на отрезке $[-\pi, \pi]$ и

$$D = \{u \in W_2^1(-\pi, \pi) : u(-\pi) = u(\pi), \|u\|_{W_2^1} \le R\}.$$

Пространство Соболева $W_2^1(-\pi, \pi)$ снабдим стандартной нормой:

$$\|u\|_{W_2^1} = (\|u\|_{L_2}^2 + \|u'\|_{L_2}^2)^{1/2}.$$

Очевидно, что D компактно в H_1. Для функции $u \in L_2(-\pi, \pi)$ имеет место разложение в ряд Фурье:

$$u(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) < \infty. \tag{36}$$

Определим подпространство

$$\mathcal{H}_N = \left\{ a_0 + \sum_{k=1}^{N} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt)) : a_0, a_1, \ldots, b_N \in \mathbb{R} \right\}$$

и оператор ортогонального проектирования $P_{\mathcal{H}_N} : L_2(-\pi, \pi) \to \mathcal{H}_N$, сопоставляющий функции (36) начальный отрезок $a_0 + \sum\limits_{k=1}^{N} (a_k \cos(kt) + b_k \sin(kt))$ ее разложения в ряд Фурье. В рассматриваемом случае имеем

$$D_N = \{u \in \mathcal{H}_N : \|u\|_{W_2^1} \le R\}.$$

Убедимся, что для любого элемента $u^* \in D$ выполняется $P_{\mathcal{H}_N} u^* \in D_N$. В этом случае, подобно примеру 4, будем иметь

$$u_N^* = P_{D_N}(u^*) = P_{\mathcal{H}_N} u^*; \qquad \varepsilon_N = \|u^* - u_N^*\|_{L_2} \to 0, \quad N \to \infty. \tag{37}$$

Имеем

$$\|P_{\mathcal{H}_N} u^*\|_{W_2^1}^2 = \|P_{\mathcal{H}_N} u^*\|_{L_2}^2 + \|(P_{\mathcal{H}_N} u^*)'\|_{L_2}^2. \tag{38}$$

Здесь $\|P_{\mathcal{H}_N} u^*\|_{L_2} \le \|u^*\|_{L_2}$. Далее, ряд, полученный почленным дифференцированием разложения (36), есть ряд Фурье для функции $u'(t)$ [13, с. 87]. Поэтому $(P_{\mathcal{H}_N} u^*)' = P_{\mathcal{H}_N}[(u^*)']$, и значит, $\|(P_{\mathcal{H}_N} u^*)'\|_{L_2} \le \|(u^*)'\|_{L_2}$. Суммируя последние неравенства, из (38) получаем

$$\|P_{\mathcal{H}_N} u^*\|^2_{W_2^1} \le \|u^*\|^2_{L_2} + \|(u^*)'\|^2_{L_2} = \|u^*\|^2_{W_2^1} \le R^2.$$

Тем самым включение $P_{\mathcal{H}_N} u^* \in D_N$ доказано. Заметим, что для величины ε_N в (37) имеет место оценка $\varepsilon_N \le C_4 N^{-1}$ [13, с. 882].

Литература

1. **Лаврентьев М.М., Романов В.Г., Шишатский С.П.** Некорректные задачи математической физики и анализа. — М.: Наука, 1980.
2. **Кабанихин С.И.** Обратные и некорректные задачи. — Новосибирск: Сибирское научное изд-во, 2008.
3. **Романов В.Г.** Устойчивость в обратных задачах. — М.: Научный мир, 2004.
4. **Isakov V.** Inverse Problems for Partial Differential Equations. — N.Y.: Springer, 2006.
5. **Яхно В.Г.** Обратные задачи для дифференциальных уравнений упругости. — Новосибирск: Наука, 1990.
6. **Кокурин М.Ю.** Об условно-корректных и обобщенно-корректных задачах // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2013. — Т. 53, № 6. — С. 857–866; Перевод: Kokurin M.Yu. Conditionally well-posed and generalized well-posed problems // Comput. Mathem. and Math. Phys. — 2013. — Vol. 53. — P. 681–690.
7. **Kokurin M.Yu.** On a characteristic property of conditionally well–posed problems // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2015. — Vol. 23, № 3. — P. 245–262.
8. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
9. **Бакушинский А.Б.** Апостериорные оценки погрешности приближенных решений нерегулярных операторных уравнений // Доклады АН. — 2011. — Т. 437, № 4. — С. 439–440; Перевод: Bakushinsky A.B. A posteriori error estimates for approximate solutions of irregular operator equations // Dokl. Math. — 2011. — Vol. 83, № 2. — P. 192–193.
10. **Kokurin M.Yu.** On stable finite dimensional approximation of conditionally well-posed inverse problems // Inverse Problems. — 2016. — Vol. 32, № 10. — P. 105007.
11. **Kokurin M.Yu.** Stable gradient projection method for nonlinear conditionally well-posed inverse problems // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2016. — Vol. 24, № 3. — P. 323–332.
12. **Bauschke H.H., Borwein J.M.** On the convergence of von Neumann's alternating projection algorithm for two sets // Set–Valued Analysis. — 1993. — Vol. 1. — P. 185–212.
13. **Бари Н.К.** Тригонометрические ряды. — М.: ГИФМЛ, 1961.

Поступила в редакцию 25 августа 2017 г.,
в окончательном варианте 15 декабря 2017 г.

Литература в транслитерации

1. **Lavrent'ev M.M., Romanov V.G., Shishatskij S.P.** Nekorrektnye zadachi matematicheskoj fiziki i analiza. — M.: Nauka, 1980.

2. **Kabanikhin S.I.** Obratnye i nekorrektnye zadachi. — Novosibirsk: Sibirskoe nauchnoe izd-vo, 2008.
3. **Romanov V.G.** Ustojchivost' v obratnyh zadachah. — M.: Nauchnyj mir, 2004.
4. **Isakov V.** Inverse Problems for Partial Differential Equations. — N.Y.: Springer, 2006.
5. **Yahno V.G.** Obratnye zadachi dlya differencial'nyh uravnenij uprugosti. — Novosibirsk: Nauka, 1990.
6. **Kokurin M.Yu.** Ob uslovno-korrektnyh i obobshchenno-korrektnyh zadachah // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2013. — T. 53, № 6. — S. 857–866; Perevod: Kokurin M.Yu. Conditionally well-posed and generalized well-posed problems // Comput. Mathem. and Math. Phys. — 2013. — Vol. 53. — P. 681–690.
7. **Kokurin M.Yu.** On a characteristic property of conditionally well–posed problems // J. of Inverse and Ill-Posed Problems. — 2015. — Vol. 23, № 3. — P. 245–262.
8. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Teoriya linejnyh nekorrektnyh zadach i ee prilozheniya. — M.: Nauka, 1978.
9. **Bakushinsky A.B.** Aposteriornye ocenki pogreshnosti priblizhennyh reshenij neregulyarnyh operatornyh uravnenij // Doklady AN. — 2011. — T. 437, № 4. — S. 439–440; Perevod: Bakushinsky A.B. A posteriori error estimates for approximate solutions of irregular operator equations // Dokl. Math. — 2011. — Vol. 83, № 2. — P. 192–193.
10. **Kokurin M.Yu.** On stable finite dimensional approximation of conditionally well-posed inverse problems // Inverse Problems. — 2016. — Vol. 32, № 10. — P. 105007.
11. **Kokurin M.Yu.** Stable gradient projection method for nonlinear conditionally well-posed inverse problems // J. of Inverse and Ill-posed Problems. — 2016. — Vol. 24, № 3. — P. 323–332.
12. **Bauschke H.H., Borwein J.M.** On the convergence of von Neumann's alternating projection algorithm for two sets // Set-Valued Analysis. — 1993. — Vol. 1. — P. 185–212.
13. **Bari N.K.** Trigonometricheskie ryady. — M.: GIFML, 1961.