ПМТФ, № 4, 1970

О НЕУСТАНОВИВШЕЙСЯ ФИЛЬТРАЦИИ В СЛОИСТЫХ ГРУНТАХ

М. А. Саттаров

(Душанбе)

Ряд теоретических исследований, проведенных П. Я. Полубариновой-Кочиной и другими отечественными исследователями, гидродинамическое доказательство формулы Дюпюи, данное И. А. Чарным, показали хорошее согласование результатов гидравлической теории с точной — гидродинамической. В дальнейшем на большие возможности и эффективность гидравлической теории при решении практических задач фильтрации обратили внимание многие ведущие исследователи.

В настоящее время гидравлическая теория фильтрации, благодаря работам П. Я. Полубариновой-Кочиной, И. А. Чарного, С. Ф. Аверьянова, Н. Н. Веригина, В. И. Аравина, С. Н. Нумерова, В. М. Шестакова, Ф. М. Бочевера и других исследователей получила свое широкое развитие и прочно вошла в основу гидрогеологических расчетов.

В этой области П. Я. Полубариновой-Кочиной [1-3], в частности, разработаны методы точного решения, а также рассмотрены вопросы линеаризации уравнения Буссинеска, решены ряд практически важных задач фильтрации во взаимосвязанных пластах и исследованы общие вопросы влияния инфильтрации и испарения на распределение напоров в слоистых грунтах при установившихся движениях.

В рамках гидравлической теории, базирующейся на гипотезе А. Н. Мятиева — Н. К. Гиринского, согласно которой в водоносных пластах движение жидкости происходит в основном параллельно к плоскости напластования, а в разделяющих их слабопроницаемых глинистых пластах — перпендикулярно к ней, процесс фильтрации в слоистых грунтах описывается замкнутой системой дифференциальных уравнений эллиптического и параболического типов [1,2].

При выводе уравнений предполагается, что в процессе взаимодействия водоносных пластов слабопроницаемым пластам принадлежит лишь роль связывающего звена и при внешних воздействиях (при понижении и повышении напоров в водоносных горизонтах) изменения, происходящие в слабопроницаемых пластах из-за незначительности упругих запасов свободной влаги, являются весьма малыми.

Для систем водоносных пластов, связанных между собой с помощью сплошных глинистых прослоек небольшой толщины, по-видимому, такое допущение не приведет к большим погрешностям. При этом результаты, полученные решением систем уравнений гидравлической теории, отражают реальную картину процесса фильтрации в слоистых грунтах.

1. Систему дифференциальных уравнений нестационарной фильтрации в n взаимодействующих пластах с одинаковым слабым уклоном i_0 можно написать в виде [1,2]

$$\sigma_i \frac{\partial h_i}{\partial t} = k_i m_i \Delta h_i - \frac{\lambda_{i-1}}{\mu_{i-1}}(h_i - h_{i-1}) - \frac{\lambda_i}{\mu_i}(h_i - h_{i+1}) + w_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.1}$$

Здесь Δ — оператор Лапласа, $h_i = h_i(x, y, t)$ — искомый напор, отсчитываемый от некоторой горизонтальной плоскости

$$w_i = \begin{cases} w(x, y, t) & \text{при} \quad i = 1 \\ 0 & \text{при} \quad i \neq 1 \end{cases}$$

$w(x, y, t)$ — ограниченная функция инфильтрации, σ_1 — эффективная пористость безнапорного пласта, $\sigma_i = \gamma_i m_i \beta_i^*$ $(i = 2, 3, \ldots, n)$, γ_i — удельный вес воды, β_i^* — коэффициент упругоемкости напорных пластов, k_i, λ_i — коэффициенты фильтрации, m_i, μ_i — мощности водоносных и слабопроницаемых пластов. В системе (1.1) величина испарения со свободной поверхности аппроксимирована слагаемым

$$-\frac{\lambda_0}{\mu_0}(h_1 - h_0) \qquad (h_1 > h_0)$$

Здесь $h_0 = h_{00} + i_0 x$, а напор в $n+1$ пласте $h_{n+1} = h_{n+1,0} + i_0 x$, где h_{00}, $h_{n+1,0}$, λ_0, μ_0 — некоторые константы.

Следует отметить, что при выводе первого уравнения системы (1.1) обычно приходят к нелинейному уравнению относительно h_1. Здесь оно линеаризовано, мощность слоя воды $h_1 - i_0 x$ принята равной некоторой средней величине $m_1 = \mathrm{const}$.

В дальнейшем, переходя к безразмерным величинам, будем иметь дело со следующими обозначениями:

$$h_i = \frac{h_i(x, y, t)}{m_k}, \quad \xi = \begin{cases} x / m_k \\ r / m_k \end{cases}, \quad q_i = \begin{cases} q_i(x, t) / k_i m_i \\ q_i(r, t) / 2\pi k_i m_i m_k \end{cases} \tag{1.2}$$

$$\tau = \frac{\lambda_k t}{\sigma_1 \mu_k}, \quad \alpha_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_1}, \quad \beta_i = \frac{\lambda_i \mu_k}{\lambda_k \mu_i}, \quad a_i = \frac{k_i \mu_k}{m_i \lambda_k}, \quad \varepsilon_i = \frac{\mu_k w_i}{\lambda_k m_k}$$

Здесь m_k, μ_k, λ_k — величины, соответствующие k-му водоносному и слабопроницаемому пластам, x и r — координаты пространства, $q_i(x, t)$, $q_i(r, t)$ — соответствующие расходы в плоскопараллельном ($\nu = 0$) и осесимметрическом ($\nu = 1$) случаях движения, которые по закону Дарси выражаются в безразмерных величинах так:

$$q_i = \xi^\nu \partial h_i / \partial \xi \qquad (\nu = 0{,}1) \tag{1.3}$$

Если в плоскопараллельном случае систему (1.1), умноженную на $k_i m_i$, продифференцировать по x, а в случае осесимметричного течения систему (1.3) продифференцировать по r и умножить на $2\pi\, r k_i m_i$, и принять во внимание (1.3), для безразмерных расходов получим систему дифференциальных уравнений

$$\alpha_i \frac{\partial q_i}{\partial \tau} = a_i \Delta^* q_i - \beta_{i-1}(q_i - q_{i-1}) - \beta_i (q_i - q_{i+1}) + \varepsilon_i^\circ \quad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)} \tag{1.4}$$

где

$$\Delta^* = \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} - \frac{\nu}{\xi}\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \varepsilon_i^\circ = a_i \xi^\nu \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \xi}, \quad q_0 = q_{n+1} = i_0(1 - \nu) \quad (\nu = 0, 1)$$

При выводе системы (1.4) в осесимметричном случае уклон i_0 принят равным нулю.

В дальнейшем при решении задач с заданными значениями расхода на границах области потока будем исходить из системы (1.4).

Предположим теперь, что в начальный момент времени $\tau = 0$ функции расхода q_i равны некоторым произвольным постоянным величинам q_{i0}. С помощью преобразования Лапласа по времени переходим от области оригинала к области изображений

$$Q_i = \int_0^\infty q_i e^{-p\tau} d\tau$$

и получаем следующую систему неоднородных обыкновенных дифференциальных уравнений: (1.5)

$$a_i \Delta^* Q_i - (\alpha_i p + \beta_{i-1} + \beta_i) Q_i + \beta_{i-1} Q_{i-1} + \beta_i Q_{i+1} = -\alpha_i q_{i0} - F_i(\xi, p)$$

где

$$F_i(\xi, p) = a_i \xi^\nu \int\limits_0^\infty \frac{\partial \varepsilon_i}{\partial \xi} e^{-p\tau} d\tau \quad (\nu = 0, 1)$$

Общее решение системы (1.5) состоит из суммы частного решения ее и общего решения соответствующей однородной системы.

Если ограничиться рассмотрением движения в бесконечных пластах с ограниченными расходами на бесконечности, то решением соответствующей однородной системы являются функции

$$Q_i = \begin{cases} A_i \exp(-\omega\xi) & \text{(в плоскопараллельном случае)} \\ A_i \xi K_1(\omega\xi) & \text{(в осесимметрическом случае)} \end{cases} \tag{1.6}$$

где $K_1(\omega\xi)$ — функция Бесселя первого порядка второго рода с мнимым аргументом.

Подставив значения Q_i из (1.6) в соответствующую однородную систему, получим следующую систему алгебраических уравнений относительно A_i

$$(a_i\omega^2 - \alpha_i p - \beta_{i-1} - \beta_i) A_i + \beta_{i-1} A_{i-1} + \beta_i A_{i+1} = 0$$
$$(A_0 = A_{n+1} \equiv 0) \tag{1.7}$$

Для существования нетривиального решения A_i этой системы должен равняться нулю ее определитель. Так, получим относительно ω^2 характеристическое уравнение в виде определителя

$$|\Lambda_{kl}| = 0 \qquad (k, l = 1, 2, \ldots, n) \tag{1.8}$$

Элементы этого определителя, неравные нулю, расположены по главной диагонали, а также по двум симметричным диагоналям

$$\{\Lambda_{12}, \Lambda_{23}, \Lambda_{34}, \cdots, \Lambda_{n-1,n}\} \text{ и } \{\Lambda_{21}, \Lambda_{32}, \Lambda_{43}, \cdots, \Lambda_{n,n-1}\}$$

и определяются следующими формулами:

$$\Lambda_{kk} = a_k^2\omega^2 - \alpha_k p - \beta_{k-1} - \beta_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$
$$\Lambda_{k,k+1} = \Lambda_{k+1,k} = \beta_k \quad (k = 1, \ldots, n-1)$$

В. Н. Эмихом показано [4], что при $p = 0$ (случай установившегося движения подземных вод) уравнение (1.8) имеет n простых положительных корней. Аналогично можно показать, что при $0 \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant \infty$ уравнение (1.8) имеет тоже n простых положительных корней ω_k^2, $k = 1, 2, \ldots, n$.

При этом для каждого корня ω_k^2 уравнения (1.8) ранг матрицы системы (1.7) равен $n - 1$ и для каждого ω_k^2 система (1.7) имеет решение $\{A_{1k}, \ldots, \ldots, A_{nk}\}$, определяемое с точностью до постоянной A_{1k}. Тогда $A_{ik} = B_{ik} A_{1k}$.

Частное решение $Q_i^\circ(\xi, p)$ неоднородной системы определяется методом вариации постоянных.

При этом решение неоднородной системы (1.5) запишется так:

$$Q_i = \sum_{k=1}^{n} A_{1k} B_{ik} \xi^\nu \Theta_\nu + Q_i^\circ(\xi, p) \tag{1.9}$$

$$\Theta_0 = e^{-\omega_k \xi}, \quad \Theta_1 = K_1(\omega_k \xi) \quad (i = 1, \ldots, n) \quad (\nu = 0, 1)$$

Для определения произвольных A_{1k} нужно задать n условий. Например, при эксплуатации пластов скважиной задать расходы скважины в каждом пласте.

Операцией перехода от функции изображения Q_i к функциям оригинала q_i определяется решение системы (1.4). При этом интегрирование выражения (1.3) от ξ_0 до ξ дает соответственно

$$h_i(\xi, \tau) = \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{q_i(\xi, \tau)}{\xi^\nu} d\xi + h_i(\xi_0, \tau) \quad (\nu = 0, 1) \tag{1.10}$$

Произвольные пока функции $h_i(\xi_0, \tau)$ можно трактовать как значения напоров при $\xi = \xi_0$. Пусть функции $h_i(\xi, \tau)$ из (1.10) удовлетворяют системе (1.1) в случаях плоскопараллельного и осесимметрического движения. Тогда, подставляя $h_i(\xi, \tau)$ из (1.10) в систему (1.1), при $\xi = \xi_0$ для определения функций $h_i(\xi_0, \tau)$ приходим к системе уравнений

$$\alpha_i \frac{dh_i}{d\tau} + \beta_{i-1}(h_i - h_{i-1}) + \beta_i(h_i - h_{i+1}) = \varepsilon_i(\xi_0, \tau) + f_i(\xi_0, \tau) \tag{1.11}$$

Здесь

$$f_i(\xi_0, \tau) = \frac{1}{\xi_0^\nu}\left(\frac{\partial q_i}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0}, \quad h_0 = h_{00} + i_0 x_0 (1 - \nu), \quad h_{n+1} = h_{n+1,0} + i_0 x_0 (1 - \nu)$$

$$(\nu = 0, 1)$$

Частное решение системы (1.11), соответствующее начальному условию $h_i(\xi_0, 0) = h_{i0}$, будем искать операционным методом.

Вводя новую функцию $y_i = h_i - h_{i0}$ и обозначая $h_{i-1,0} - h_{i,0}$ через $y_{i-1,i}$ относительно изображений

$$H_i(\xi_0, \tau) = \int_0^\infty y_i(\xi_0, \tau) e^{-p\tau} d\tau$$

получим систему алгебраических уравнений

$$(\alpha_i p + \beta_{i-1} + \beta_i) H_i - \beta_{i-1} H_{i-1} - \beta_i H_{i+1} = b_{i-1,i} p^{-1} + F_i(p) + E_i(p) \tag{1.12}$$

где

$$F_i(p) = \int_0^\infty f_i(\xi_0, p) e^{-p\tau} d\tau, \; E_i(p) = \int_0^\infty \varepsilon_i(\xi_0, \tau) e^{-p\tau} d\tau, \; b_{i-1,i} = \beta_{i-1} y_{i-1,i} - \beta_i y_{i,i+1}$$

Определитель системы (1.12) D_n отличен от нуля при любом $\operatorname{Re} p \geqslant 0$, так как D_n имеет n простых отрицательных корней p_k [4], и, следовательно, система (1.12) разрешима.

Таким образом, из (1.10) — (1.12) получим решение системы (1.1).

Заметим, что применяя преобразование Лапласа по τ к функциям $h_i(\xi, \tau)$ и изменяя порядок интегрирования в правой части выражения (1.10), на основании представления (1.9) получаем

$$H_i(\xi, p) = \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{ik} A_{1k}}{\omega_k} \Omega_\nu(\xi) + \int_{\xi_0}^{\xi} \frac{Q_i^\circ(\xi, p)}{\xi^\nu} d\xi + H_i(\xi_0, p) \quad (\nu = 0, 1) \tag{1.13}$$

$$\Omega_0(\xi) = e^{-\omega_k \xi_0} - e^{-\omega_k \xi}, \qquad \Omega_1(\xi) = K_0(\omega_k \xi_0) - K_0(\omega_k \xi)$$

Здесь $K_0(\omega \xi)$ — функция Бесселя нулевого порядка второго рода. Тем самым определение основных функций $h_i(\xi, \tau)$ в данном случае приведено к операции перехода от изображений $H_i(\xi, \tau)$ к оригиналу $h_i(\xi, \tau)$.

2. В системе безнапорно-напорных взаимодействующих водоносных пластов с ограниченными мощностями величина $\alpha_i = \sigma_i / \sigma_1$ для напорных пластов ($i = 2, 3, \ldots, n$) представляет собой малую величину высокого порядка, что в первом приближении можно положить $\alpha_i = 0$ для $i = 2, 3, \ldots, n$ ($\alpha_1 = 1$).

Нетрудно показать, что при таком допущении определитель системы (1.12) отличен от нуля при любом $\operatorname{Re} p \geqslant 0$.

В рассматриваемом случае решение системы (1.11) непосредственно определяется последовательностью следующих функций:

$$h_1(\xi_0, \tau) = H_1 - e^{-b\tau}\left[H_1 - h_{10} - \int_0^\tau \left(\varepsilon(\xi_0, \tau) + \frac{1}{\varphi_1(n)} R_1(\xi_0, \tau)\right) e^{b\tau} d\tau\right] \quad (2.1)$$

$$h_i(\xi_0, \tau) = \frac{\varphi_i(n)}{\varphi_{i-1}(n)} h_{i-1} + \frac{1}{\beta_{i-1}\varphi_{i-1}(n)}(R_i + h_{n+1}) \qquad (i = 2, \ldots, n) \quad (2.2)$$

Здесь

$$b = \beta_0 + \frac{1}{\varphi_1(n)}, \quad \varphi_i(n) = \sum_{k=i}^{n} \frac{1}{\beta_k}, \quad H_1 = \frac{1}{b}\left[\beta_0 h_0 + \frac{h_{n+1}}{\varphi_1(n)}\right] \quad (2.3)$$

$$R_i(\xi_0, \tau) = \sum_{k=i}^{n} f_k(\xi_0, \tau)\varphi_k(n) \qquad (\varphi_n(n) = 1)$$

Заметим, что функция $h_1(\xi_0, \tau)$ является решением уравнения

$$\frac{dh_1}{d\tau} + b(h_1 - H_1) = \frac{1}{\varphi_1(n)} R_1(\xi_0, \tau) + \varepsilon(\xi_0, \tau) \quad (2.4)$$

при начальном условии $h_1 = h_{10}$.

Данное уравнение (2.4) совместно с рекуррентными соотношениями (2.2) составляет идентичную системе (1.11) систему при $\alpha_1 = 1$, $\alpha_i = 0$, $i = 2, \ldots, n$.

Из полученного здесь решения (2.1), (2.2) можно сделать некоторые выводы, относящиеся и к качественному и к количественному анализу вопроса взаимодействия водоносных пластов при неустановившихся движениях.

1. Так как функция

$$f_k(\xi_0, \tau) = \frac{1}{\xi_0^\nu}\left(\frac{\partial q_k}{\partial \xi}\right)_{\xi=\xi_0}$$

является скоростью изменения расходов по координате в фиксированной точке ($\xi_0 \neq 0$) пространства в любой момент времени τ, то очевидно, что изменение $f_k(\xi_0, \tau)$ оказывается наибольшим в том пласте (или в тех пластах), из которого производится откачка. Например, если понижение уровня производится только в первом безнапорном пласте, то среди функций $f_k(\xi_0, \tau)$ наибольшей будет $f_1(\xi_0, \tau)$.

С другой стороны, из представления (2.1) — (2.3) видно, что она состоит из суммы интегралов функций инфильтрации $\varepsilon(\xi_0, \tau)$ и функции скорости изменения расходов $f_k(\xi_0, \tau)$, причем перед каждой функцией $f_k(\xi_0, \tau)$ стоит множитель

$$\frac{\varphi_k(n)}{\varphi_{i-1}(n)} = \frac{\beta_k^{-1} + \ldots + \beta_n^{-1}}{\beta_{i-1}^{-1} + \ldots + \beta_n^{-1}} \qquad (k \geqslant i) \quad (2.5)$$

который с ростом k пропорционально уменьшается. В данном случае для $h_1(\xi_0, \tau)$ перед $f_1(\xi_0, \tau)$ стоит множитель единица, а перед $f_n(\xi_0, \tau)$ — множитель $1 / \varphi_1(n)$. Следовательно, функция напора $h_1(\xi_0, \tau)$ состоит из слагаемых, которые отражают изменения функции расходов каждого пласта в интервале времени $[0, \tau)$, причем влияние более отдаленных водоносных горизонтов на динамику данного пласта уменьшается пропорционально числу слабопроницаемых пластов по формуле (2.5).

К аналогичным выводам можно прийти и для других функций $h_i(\xi_0, \tau)$. Так, возмущение, происходящее в первом безнапорном пласте, уменьшаясь в $1 / \varphi_1(n)$ раз передается в n-й напорный горизонт. Такой анализ нагляднее всего получается, если для всех β_i выполняется условие $\beta_i = 1$, которое означает, что плохопроницаемые пласты имеют одинаковое отношение λ_i / μ_i. Тогда

$$\frac{\varphi_k(n)}{\varphi_{i-1}(n)} = \frac{n-k+1}{n-i+2}, \quad b = \beta_0 + \frac{1}{n}$$

При этом вид функций $h_i(\xi_0, \tau)$ несколько упрощается. Если считать, что проницаемость слабопроницаемых пластов с увеличением глубины их залегания под поверхностью земли уменьшается, то, как видно из представления (2.5), эта величина с ростом k еще больше уменьшается и при небольших понижениях или подъемах уровня в безнапорном пласте (вследствие применения горизонтального дренажа или полива) изменения напоров в более глубоких пластах будут незначительными.

2. Если при отсутствии откачки через свободную поверхность безнапорного пласта в систему пластов поступает одинаковое по площади инфильтрационное питание ($\varepsilon > 0$ соответствует инфильтрации, $\varepsilon < 0$ — испарению, $\beta_0 = 0$), то все $f_k(\xi_0, \tau) = 0$, т. е. в пластах внутреннее возмущение отсутствует и функция напоров примет вид

$$h_1(\xi_0, \tau) = h_{n+1} - e^{-b\tau}\left[h_{n+1} - h_{10} - \int_0^\tau \varepsilon(\xi_0, \tau)\, e^{b\tau} d\tau\right] \tag{2.6}$$

$$h_i(\xi_0, \tau) = \frac{\varphi_i(n)}{\varphi_{i-1}(n)} h_{i-1}(\xi_0, \tau) + \frac{h_{n+1}}{\beta_{i-1}\varphi_{i-1}(n)}$$

Из (2.6) нетрудно видеть, что амплитуда колебания, данная функцией инфильтрации $\varepsilon(\xi_0, \tau)$, с удалением от поверхности земли вглубь уменьшается пропорционально числу слабопроницаемых пластов с соответствующими им параметрами.

Заметим, что сделанные здесь выводы относятся только к случаю предположения о постоянстве напора h_{n+1} в $n + 1$-м напорном горизонте.

Очевидно, небольшие локальные изменения, происходящие в соседних, тем более в удаленных пластах, не оказывают существенного количественного изменения в динамике водоносных песчаных горизонтов, когда они имеют определенный уклон, отдаленный боковой источник питания и достаточно большую мощность. Поэтому постановка и решение задач подземных вод в предположении о постоянстве напора в подобных пластах, когда из них не ведется откачка, возможны, поскольку такое допущение приведет только лишь к упрощению математической модели явления, не меняя его сущности.

3. Имеют место случаи, когда система пластов, располагаясь в верхних частях земной коры, снизу ограничивается с водонепроницаемыми горными породами и образует единый бассейн взаимосвязанных водоносных горизонтов.

Решение задачи, соответствующее этому случаю, получается из систем (2.1) — (2.3) при $\beta_n \to 0$

$$h_1(\xi_0,\tau) = h_0 - e^{-\beta_0\tau}\Big[h_0 - h_{10} - \int\limits_0^\tau \Big(\sum_{k=0}^{n} f_k(\xi_0,\tau) + \varepsilon(\xi_0,\tau)\Big) e^{\beta_0\tau} d\tau\Big] \qquad (2.7)$$

$$h_i(\xi_0,\tau) = h_{i-1}(\xi_0,\tau) + \frac{1}{\beta_{i-1}} \sum_{k=1}^{n} f_k(\xi_0,\tau)$$

Из (2.7) видно, что в отличие от предыдущего случая здесь отсутствие постоянного источника питания снизу несколько меняет результат в количественном отношении. Теперь $h_1(\xi_0, \tau)$ состоит из слагаемых, которые отражают изменения функций расходов каждого пласта системы в промежутке времени $[0, \tau)$, причем влияние каждого из них на безнапорный пласт передается без каких-либо изменений со стороны слабопроницаемых пластов.

Укажем еще на одну формулу, которая из системы (2.7) получается путем последовательного сложения

$$h_n(\xi_0,\tau) = h_1(\xi_0,\tau) + \sum_{k=2}^{n} f_k(\xi_0,\tau) \sum_{l=i}^{k-1} \frac{1}{\beta_i} \qquad (2.8)$$

Как следует из (2.8), в бассейн взаимосвязанных пластов с непроницаемым водоупором в силу жесткости режима напорных горизонтов любое изменение, происходящее в безнапорном пласте в момент времени τ, непосредственно передается в нижний горизонт. Однако при этом, как в предыдущем случае, влияние любого локально-внутреннего процесса (откачки и др.) передается в другие пласты бассейна в полной зависимости от степени водопроницаемости слабопроницаемых глинистых пропластков.

Поступила 5 IX 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. К гидравлической теории колодцев в многослойной среде. ПММ, 1947, т. 11, вып. 3.
2. Полубаринова-Кочина П. Я. Теория движения грунтовых вод. М., Гостехтеоретиздат, 1952.
3. Полубаринова-Кочина П. Я. О распределении напоров в слоистых грунтах. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1963, № 3.
4. Эмих В. Н. Скважины в произвольном числе взаимосвязанных напорных горизонтов. ПМТФ, 1962, № 5.