

УДК 532.54

## ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ УДАРА КАПЛИ О ПОВЕРХНОСТЬ ЖИДКОСТИ С ОБРАЗОВАНИЕМ КОРОНЫ

Т. Джанг<sup>\*,\*\*</sup>, Д. Оуянг<sup>\*</sup>, Х. Ли<sup>\*</sup>, Д. Рен<sup>\*</sup>, С. Ванг<sup>\*</sup>

<sup>\*</sup> Северо-Западный политехнический университет, 710129 Сиань, Китай

<sup>\*\*</sup> Университет г. Йангджоу, 225002 Йангджоу, Китай

E-mail: jieouyang@nwpu.edu.cn

С использованием метода сглаженных гидродинамических частиц исследована динамика удара капли о поверхность жидкости с образованием короны. Построена модель, учитывающая силу тяжести, искусственную вязкость и поверхностное натяжение. Проведено сравнение результатов численных расчетов, полученных методом сглаженных гидродинамических частиц, с экспериментальными данными. Показано, что метод сглаженных гидродинамических частиц позволяет достаточно точно описать динамику падения капли на поверхность жидкости. Установлено также, что этот процесс существенно зависит от глубины водоема и начальной скорости капли.

**Ключевые слова:** метод сглаженных гидродинамических частиц, удар капли, жидкая пленка, поверхностное натяжение, всплеск.

**Введение.** Столкновение капли с поверхностью играет важную роль в различных процессах, происходящих в паровых турбинах, при эрозии почвы, при охлаждении поверхностей аэрозолем, в струйной печати и т. д.

На процесс соударения оказывают влияние свойства капли и поверхности, скорость капли и угол соударения. Сложные процессы, происходящие при соударении капли с поверхностью, изучаются уже более 100 лет [1], однако до сих пор полностью не исследованы [2].

Процесс столкновения жидкой капли с поверхностью существенно зависит от типа этой поверхности (твердая или жидкая) [2].

Соударение капли с твердой поверхностью исследовалось экспериментально [3–6] и с помощью численных методов [7–9]. Изучению соударения жидкой капли с поверхностью жидкости посвящено небольшое количество работ [10, 11].

После столкновения жидкой капли с поверхностью жидкости возможны различные процессы: капля может плавать, растекаться по поверхности, подпрыгивать, превращаться в брызги и т. д. В [12] с помощью высокоскоростной камеры изучены процессы слияния капли с поверхностью и образования брызг при падении капли в бассейн. С использованием результатов работы [12] в [10] установлено, что процессы, происходящие после падения капли, зависят от глубины бассейна. В [11] разработана новая экспериментальная

---

Работа выполнена в рамках Национальной программы фундаментальных исследований Китая № 2012СВ025903 и при финансовой поддержке Национального фонда естественных наук Китая (грант № 10871159) и Фонда естественных наук провинции Цзянсу Китая (грант № ВК20130436).

техника исследования соударения капли с очень тонкой пленкой с использованием водно-глицеринового раствора. Влияние толщины пленки на процесс соударения изучалось в работе [13].

В настоящее время существуют различные численные методы описания свободной поверхности при больших деформациях, в частности поверхности, образующейся при соударении капли с жидкостью. Наиболее подходящим методом описания сложных свободных поверхностей является метод частиц в лагранжевой формулировке, который имеет ряд преимуществ по сравнению с сеточными методами. Данный метод позволяет моделировать потоки с конвекцией, большие деформации без численной диффузии, а также сложные свободные поверхности с учетом их фрагментации; при этом не требуется использовать какие-либо иные явные способы отслеживания этой поверхности.

В [14] впервые при решении задач механики жидкости был применен метод сглаженных гидродинамических частиц (МСГЧ) [15]. Впоследствии этот метод использовался для решения задач моделирования вязких потоков [14, 16–20], течения несжимаемой жидкости [21, 22], течения многофазных потоков [23, 24] и др.

В механике жидкости задачи соударения также решались с помощью МСГЧ [16, 17, 25, 26], который можно рассматривать как новый метод решения задач об ударе, в том числе задач о соударении капли с поверхностью.

В данной работе предлагается математическая модель, описывающая удар капли о тонкую пленку, в частности образование короны в результате соударения. Эта модель включает МСГЧ, модель искусственной вязкости [27], модель поверхностного натяжения [24] и технику восстановления плотности [23], которая используется для согласования массы, плотности и площади, занимаемой массой. Для тестирования предложенной модели были выбраны примеры из работ [11, 13]. Проведено сравнение полученных результатов с экспериментальными данными.

**1. Численная модель.** Ниже изложены математическая модель рассматриваемого явления и численный алгоритм решения задачи.

1.1. *Основные уравнения.* В двумерной лагранжевой формулировке изотермическое течение несжимаемой жидкости описывается уравнениями движения и неразрывности

$$\frac{d\rho}{dt} = -\rho \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \mathbf{T} + \mathbf{g},$$

где  $\mathbf{u} = (u, v)$  — вектор скорости;  $\rho$  — плотность;  $t$  — время;  $\mathbf{T}$  — тензор напряжений Коши;  $\mathbf{g} = (g_x, g_y)$  — ускорение свободного падения;  $d/dt = \partial/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla$  — материальная производная.

Тензор Коши напряжений представляется в виде суммы

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau},$$

где  $\mathbf{I}$  — единичный тензор;  $p$  — всестороннее давление. Для ньютоновской жидкости тензор  $\boldsymbol{\tau}$  представляется в виде

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon},$$

где  $\mu$  — вязкость раствора. Компоненты тензора скоростей деформаций записываются в виде

$$\varepsilon^{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u^\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta} \right) - \frac{1}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \delta^{\alpha\beta},$$

где  $u^\beta$  —  $\beta$ -компонента вектора скорости;  $x^\beta$  — пространственные координаты;  $\delta^{\alpha\beta} = 1$  при  $\alpha = \beta$  и  $\delta^{\alpha\beta} = 0$  при  $\alpha \neq \beta$ .

1.2. *Уравнение состояния.* Во многих работах несжимаемая жидкость рассматривается как слабосжимаемая с соответствующим уравнением состояния (см., например, [14]). В настоящей работе несжимаемая жидкость также рассматривается как слабосжимаемая с уравнением состояния [18]

$$p(\rho) = c^2(\rho - \rho_0), \quad (1)$$

где  $c$  — скорость звука;  $\rho_0$  — отсчетная плотность. Для того чтобы отклонение плотности от отсчетной составляло менее 1 %, квадрат числа Маха ( $M \equiv V/c$ , где  $V$  — скорость потока) должен быть меньше 0,1 [15].

1.3. *Метод сглаженных гидродинамических частиц.* В МСГЧ область  $\Omega$ , занимаемая жидкостью, представляется в виде конечного числа частиц, физическими параметрами которых являются соответствующие параметры, осредненные по соседним частицам.

В МСГЧ аппроксимация функции  $f(\mathbf{r})$  ( $\mathbf{r} = (x, y)$  — радиус-вектор) и ее первой производной для частицы с номером  $i$  принимается в следующем виде [14, 16, 23]:

$$f_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{ij};$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{r}_i} = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (f_j - f_i) \frac{\partial W_{ij}}{\partial \mathbf{r}_i}. \quad (2)$$

Здесь  $m_j$ ,  $\rho_j$  — масса и плотность  $j$ -й частицы;  $f_j = f(\mathbf{r}_j)$ ;  $m_j/\rho_j$  — объем, занимаемый  $j$ -й частицей; ядро  $W$  является четной функцией и симметричным распределением по области  $\Omega$ ;  $W_{ij} = W(|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|, h)$ ;  $\partial W_{ij}/\partial \mathbf{r}_i = -\partial W_{ji}/\partial \mathbf{r}_j$ ;  $h$  — длина области сглаживания ядра  $W$ .

В качестве сглаживающей функции выбран кубический сплайн [21], являющийся функцией  $r = |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|$  и  $q = r/h$ . В двумерном случае выражения для  $W_{ij}$  имеют следующий вид:

$$W_{ij} = W(r, h) = \frac{15}{7\pi h^2} \begin{cases} 2/3 - q^2 + q^3/2, & 0 \leq q < 1, \\ q^3/6, & 1 \leq q < 2, \\ 0, & q \geq 2. \end{cases} \quad (3)$$

Для обеспечения высокой точности аппроксимации выбираемая длина интервала сглаживания  $h$  должна быть больше расстояния между частицами. В настоящей работе  $h = 1,5d_0$  ( $d_0$  — начальное расстояние между соседними частицами). Согласно уравнению (3) компактный носитель области равен  $2h$ .

С помощью уравнения (2) и тождества

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial T^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta} = \frac{\partial (T^{\alpha\beta}/\rho)}{\partial x^\beta} + \frac{T^{\alpha\beta}}{\rho^2} \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta}$$

вычисляются скорость и градиент напряжений. Таким образом, для  $i$ -й частицы принимается следующая дискретизация основных уравнений [14, 21, 23]:

$$\left(\frac{d\rho}{dt}\right)_i = \rho_i \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (u_i^\beta - u_j^\beta) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}; \quad (4)$$

$$\left(\frac{du^\alpha}{dt}\right)_i = \sum_j m_j \left( \frac{T_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{T_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} \right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + g^\alpha. \quad (5)$$

При этом аппроксимация градиента скорости имеет вид

$$\left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\beta}\right)_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (u_j^\alpha - u_i^\alpha) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}.$$

Для увеличения устойчивости МСГЧ предлагалось несколько форм искусственной вязкости. В данной работе искусственная вязкость добавлена в уравнение (5) в следующем виде [27]:

$$\Pi_{ij} = \begin{cases} (-\alpha_{\Pi} \bar{c}_{ij} \varphi_{ij} + \beta_{\Pi} \varphi_{ij}^2) / \bar{\rho}_{ij}, & \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} < 0, \\ 0, & \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij} \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Здесь

$$\varphi_{ij} = \frac{h \mathbf{u}_{ij} \cdot \mathbf{r}_{ij}}{|\mathbf{r}_{ij}|^2 + 0,01h^2}, \quad \bar{c}_{ij} = \frac{c_i + c_j}{2}, \quad \bar{\rho}_{ij} = \frac{\rho_i + \rho_j}{2}, \quad \mathbf{u}_{ij} = \mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j, \quad \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j.$$

Член  $0,01h^2$  добавлен для того, чтобы исключить численную расходимость в том случае, когда расстояние между двумя частицами очень мало. Значения коэффициентов  $\alpha_{\Pi}$  и  $\beta_{\Pi}$  обычно выбираются близкими к единице.

Во многих системах, как естественных, так и искусственных, поверхностное натяжение играет большую роль. В данной работе член, учитывающий поверхностное натяжение, используется в МСГЧ при моделировании удара капли о жидкую поверхность и принимается в виде, который предложен и протестирован в [24]. Поэтому в дискретизированное уравнение сохранения количества движения добавляется член, учитывающий поверхностное натяжение, которое может трактоваться как результат взаимодействия частиц [24]:

$$S_{ij} = \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial \varphi^{\alpha\beta}}{\partial x^\beta}\right)_i = \sum_j m_j \left(\frac{\varphi_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{\varphi_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2}\right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta}. \quad (7)$$

Здесь  $\varphi_i^{\alpha\beta} = \sigma |\mathbf{n}_i| (\delta^{\alpha\beta} - \hat{\mathbf{n}}_i^\alpha \hat{\mathbf{n}}_i^\beta)$  — тензор поверхностного натяжения;  $\sigma$  — коэффициент поверхностного напряжения;  $\delta^{\alpha\beta}$  — тензор Кронекера;  $\mathbf{n}$  — вектор нормали к поверхности;  $\hat{\mathbf{n}}$  — единичный вектор нормали к поверхности.

Для отслеживания взаимодействия частиц вводится функция-метка частиц  $a$ :

$$a_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} a_j W_{ij}.$$

Для того чтобы повысить точность и избежать вырождения нормали  $\mathbf{n}$  и единичной нормали  $\hat{\mathbf{n}}$ , они представляются в следующем виде:

$$\mathbf{n}_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} (a_j - a_i) \nabla_i W_{ij}, \quad \hat{\mathbf{n}}_i = \begin{cases} \mathbf{n}_i / |\mathbf{n}_i|, & |\mathbf{n}_i| > \zeta, \\ 0, & |\mathbf{n}_i| \leq \zeta. \end{cases}$$

В данной работе величина  $\zeta$ , как правило, принимается равной  $0,01/h$ .

Члены с искусственной вязкостью (6) и поверхностным натяжением (7) добавляются в дискретизированное уравнение закона сохранения количества движения, которое принимает следующий вид:

$$\left(\frac{du^\alpha}{dt}\right)_i = \sum_j m_j \left(\frac{T_i^{\alpha\beta}}{\rho_i^2} + \frac{T_j^{\alpha\beta}}{\rho_j^2} - \Pi_{ij} \delta^{\alpha\beta}\right) \frac{\partial W_{ij}}{\partial x_i^\beta} + S_{ij} + g^\alpha. \quad (8)$$

Для того чтобы предотвратить взаимное проникновение частиц и адаптировать модель слабосжимаемой жидкости для моделирования больших деформаций жидкой поверхности, положение частиц определяется в соответствии с модифицированным вариантом МСГЧ [28]:

$$\frac{d\mathbf{r}_i}{dt} = \mathbf{u}_i^\alpha - \varepsilon \sum_j m_j \frac{\mathbf{u}_{ij}}{\bar{\rho}_{ij}} W_{ij}. \quad (9)$$

Здесь  $\varepsilon = 0,5$ . Поэтому в данном варианте МСГЧ частица движется со скоростью, приближенно равной средней скорости близлежащих частиц.

В МСГЧ каждая частица имеет фиксированную массу. Если число частиц является постоянным, то закон сохранения массы выполняется автоматически. Однако если используется только уравнение (4), то согласованность между массой, плотностью и занимаемым объемом нарушается. Для преодоления этой трудности применяется интерполяционная схема первого порядка [23], основанная на методе подвижных наименьших квадратов (МПНК) и предназначенная для восстановления поля плотности:

$$\rho_i = \sum_j m_j W_{ij}^{\text{МПНК}}. \quad (10)$$

Ядро  $W_{ij}^{\text{МПНК}}$  вычисляется следующим образом:

$$W_{ij}^{\text{МПНК}} = (\beta_0 + \beta_1 x_{ij} + \beta_2 y_{ij}) W_{ij},$$

$$\left( \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij} \begin{pmatrix} 1 & x_{ij} & y_{ij} \\ x_{ij} & x_{ij}^2 & x_{ij} y_{ij} \\ y_{ij} & x_{ij} y_{ij} & y_{ij}^2 \end{pmatrix} \right) \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

( $x_{ij} = x_i - x_j$ ,  $y_{ij} = y_i - y_j$ ). Эта процедура применяется через каждые 20 шагов по времени.

Во многих экспериментах после соударения капли и жидкой поверхности образуются пузырьки газа. Авторы работы [29], изучив экспериментальные данные, пришли к выводу, что в случае неглубокого бассейна пузырьки не образуются. Поэтому в настоящей работе модель газовых пузырьков не рассматривается.

Для решения системы дифференциальных уравнений (4), (8), (9) использовался метод предиктор-корректор [18]. Этот метод является методом второго порядка точности, его применение эффективно при численной реализации.

При использовании МСГЧ большое значение имеют постановка и реализация краевых условий. Прежде всего, жесткая стенка может моделироваться либо неподвижными частицами, либо образами частиц с зеркально отображенными физическими свойствами. В отличие от работы [14], в которой для предотвращения проникания частиц в жесткую стенку вводились искусственные отталкивающие силы, в данной работе в качестве граничных частиц используются виртуальные частицы. Для моделирования жесткой границы вводятся виртуальные частицы двух типов. Виртуальные частицы первого типа располагаются справа от жесткой стенки (жесткие  $R$ -частицы). Плотность жестких частиц не определяется. Выполняется условие непротекания на жесткой стенке, поэтому положение жесткой частицы фиксировано во времени. Сила, действующая на жесткую частицу, вычисляется по формуле [30]

$$f_i = \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} f_j W_{ij} / \sum_j \frac{m_j}{\rho_j} W_{ij}, \quad (11)$$

где индекс  $i$  соответствует граничной частице; индекс  $j$  — соседним частицам.

Виртуальные частицы второго типа ( $I$ -образы частицы) размещаются непосредственно за жесткой стенкой и заполняют область, ширина которой сравнима с шириной компактного носителя ядра, используемого в вычислениях. Эти частицы имеют фиксированные плотность и положение. Скорость и давление  $I$ -образов частиц вычисляются с помощью линейной интерполяционной формулы

$$\mathbf{L}_I = \mathbf{L}_F + (1 + d_I/d_F)(\mathbf{L}_R - \mathbf{L}_F),$$

где  $\mathbf{L}$  — вектор переменных  $p, u^\alpha$ ; нижние индексы  $R, I, F$  соответствуют жестким частицам, частицам-образам и жидким частицам. Для удобства вычислений можно определить расстояния от жесткой стенки, на которых находятся частицы-образы  $d_I$  и жидкие частицы  $d_F$ . Расстояние  $d_F$  выбирается равным начальному расстоянию между жидкими частицами. Для определения значения  $\mathbf{L}_F$  вновь используется интерполяционная формула (11).

Граничное условие на свободной поверхности  $T \cdot \mathbf{n} = 0$  является естественным в МСГЧ и, следовательно, выполняется автоматически.

**2. Результаты численных расчетов и их обсуждение.** В данном пункте численно моделируются экспериментальные данные о всплеске с образованием короны в результате удара капли об очень тонкую пленку [11, 13]. Капля и жидкая пленка состоят из одной и той же жидкости.

Характеристики капли и жидкой пленки те же, что и в работе [29]: начальная плотность глицеринового раствора  $\rho_0 = 1200 \text{ кг/м}^3$ , вязкость  $\eta = 0,022 \text{ Н} \cdot \text{с/м}^2$ , диаметр капли  $D = 0,0042 \text{ м}$ , коэффициент поверхностного натяжения  $\sigma = 0,0652 \text{ Н/м}$ , число Онезорге  $\text{Oh} = \eta(\sigma\rho_0 D)^{-1/2} = 0,0384$ . Динамическое число Вебера определяется следующим образом:  $\text{We} = \rho_0 U^2 D / \sigma$ . Вводится безразмерная толщина пленки  $H^*$  — отношение толщины пленки к диаметру капли.

*2.1. Качественное сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными.* Ниже проводится сравнение результатов численных расчетов с экспериментальными данными [11]. Рассматривается два варианта исходных данных.

Случай 1 (см. рис. 2 в [11]):  $\text{We} = 381, H^* = 0,05$ . В момент падения капли на пленку в области контакта образуется небольшой ободок (рис. 1, *a*). Это обусловлено тем, что на частицы жидкости действуют импульс со стороны капли и сила сопротивления покоящейся жидкости. Сила сопротивления, направленная под углом к поверхности, отсутствует. Затем появляется всплеск, ободок расширяется и удаляется от поверхности. Поскольку направление скорости жидких частиц изменяется, они удаляются от поверхности. Образуется корона. С течением времени края ободка заостряются и корона постепенно погружается в жидкость. Результаты численного моделирования в целом соответствуют экспериментальным данным. Основное отличие заключается в следующем: при численном моделировании на краю короны появляются мелкие капли, в эксперименте этого не наблюдается.

Случай 2 (см. рис. 3b в [11]):  $\text{We} = 2010, H^* = 0,5$ . Результаты численного моделирования представлены на рис. 1, *б*. На рис. 1 видны два главных отличия исследуемого явления.

На рис. 1, *б* форма короны после удара подобна цилиндру, в то время как на рис. 1, *a* она подобна чаше. На рис. 1, *a* в результате разрушения короны образуется большое количество мелких капель, на рис. 1, *б* образуется только несколько таких капель, вылетающих из вершины короны. Это обусловлено тем, что кинетическая энергия удара капли поглощается пленкой и диссипирует в ней. В случае более толстой пленки количество отраженной энергии меньше. Поэтому в отличие от случая 1 в случае 2 на образование короны расходуется меньше энергии, следствием чего является меньшая скорость расширения короны, не позволяющая преодолеть силу поверхностного натяжения.

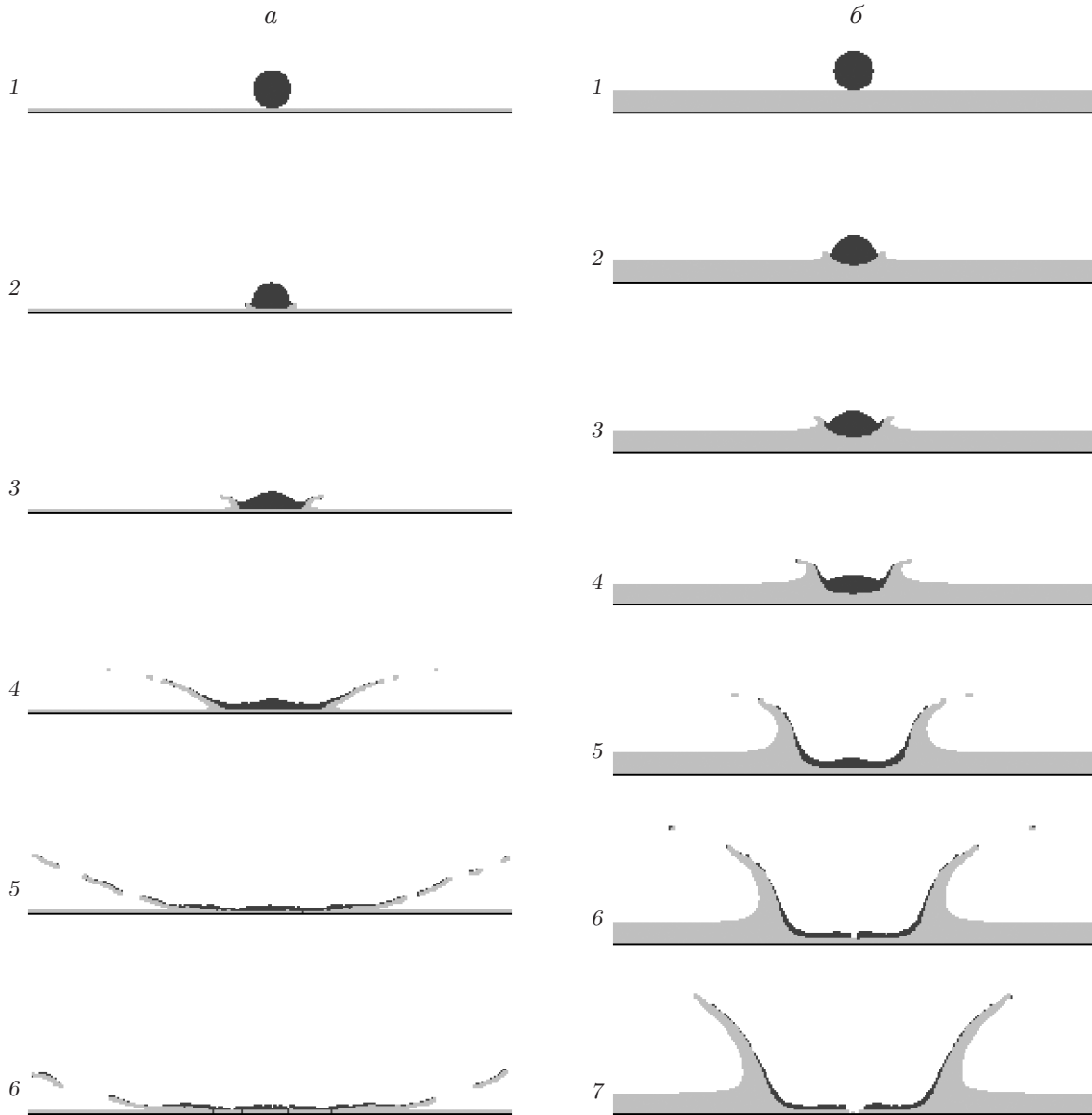


Рис. 1. Всплеск жидкости и образование короны:

*a* —  $We = 381$ ,  $H^* = 0,05$  (1 —  $t = 0$ , 2 —  $t = 0,2$  мс, 3 —  $t = 1$  мс, 4 —  $t = 3$  мс, 5 —  $t = 6$  мс, 6 —  $t = 7,5$  мс); *б* —  $We = 2010$ ,  $H^* = 0,5$  (1 —  $t = 0$ , 2 —  $t = 0,3$  мс, 3 —  $t = 0,5$  мс, 4 —  $t = 1$  мс, 5 —  $t = 3$  мс, 6 —  $t = 5$  мс, 7 —  $t = 7$  мс)

Следует отметить, что в случае 2 зависимость эффективной ширины короны от времени, полученная при численном моделировании, имеет вид  $x_c = 0,0075(t - 0,3)^{1/2}$ . Эта зависимость согласуется с экспериментальной зависимостью  $x_c = c(t - t_0)^{1/2}$  ( $c$ ,  $t_0$  — некоторые константы) [29].

**2.2. Распределения давления и скорости.** При численном моделировании давление вычислялось с использованием уравнения состояния (1) на каждом шаге по времени. Однако вычисленная плотность корректировалась через каждые 20 шагов по времени с использованием уравнения (10), поэтому вычисленное давление также корректировалось через каждые 20 шагов по времени.

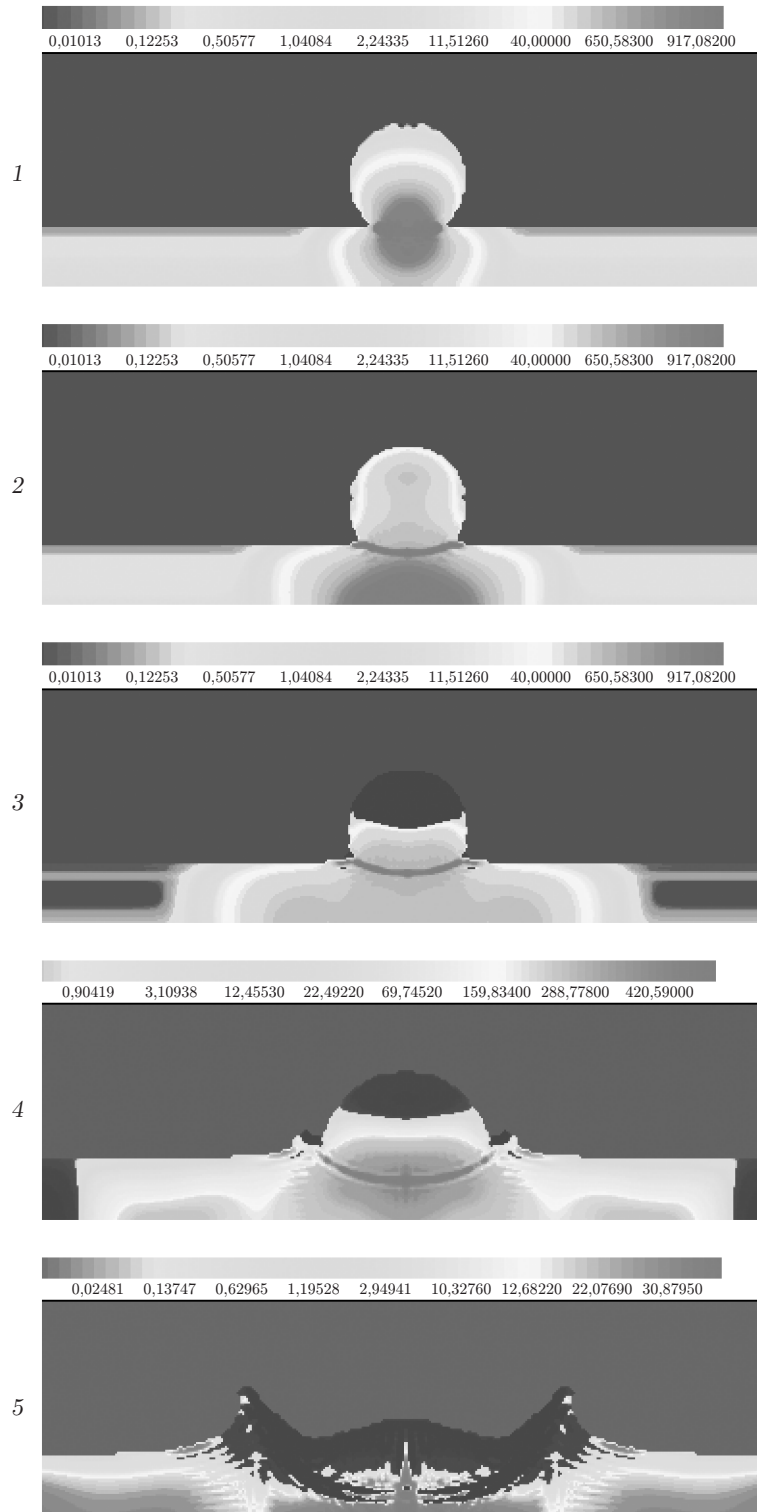


Рис. 2. Распределение давления после удара капли о жидкую пленку:  
1 —  $t = 0,08$  мс, 2 —  $t = 0,13$  мс, 3 —  $t = 0,17$  мс, 4 —  $t = 0,30$  мс, 5 —  $t = 0,80$  мс



На рис. 2 показано распределение давления на свободной поверхности капли, ударяющейся о поверхность жидкости, которое соответствует рис. 1, б. На рис. 2 видно, что после удара давление возрастает в течение малого промежутка времени и концентрируется на поверхности раздела капли и жидкости, а также вблизи жесткой стенки, в результате чего капля сжимает тонкий слой жидкости с большей скоростью. Увеличение давления приводит к появлению всплеска и образованию короны, которая по мере уменьшения давления расширяется. Следует отметить, что увеличение осцилляций давления может вызвать быстрое разрушение поля давления в некоторых областях и затруднить его физическую интерпретацию.

Таким образом, полученные выше результаты численного моделирования в основном согласуются с экспериментальными данными [11, 13]. Заметим, что предложенная реализация краевых условий обеспечивает отсутствие проникновения частиц через жесткую стенку во всех приведенных выше численных примерах.

**Закключение.** В работе с использованием МСГЧ выполнено численное моделирование удара капли о поверхность жидкости с образованием короны. Представленный вариант МСГЧ в комбинации с моделями искусственной вязкости и поверхностного натяжения является устойчивым и позволяет достаточно точно моделировать сложные поверхности, наблюдаемые в эксперименте при ударе капли о поверхность жидкости. Все полученные результаты численных расчетов согласуются с экспериментальными данными. Показано, что динамика удара капли о поверхность жидкости существенно зависит от начальной скорости капли и толщины слоя жидкости: чем больше начальная скорость капли, тем сильнее всплеск и больше погружение капли в жидкость. Если пленка очень тонкая, то непосредственно после удара образуется имеющая форму чаши тонкая корона, которая затем расширяется и распадается на множество мелких капель. С увеличением толщины пленки корона принимает форму цилиндра, со временем от нее отделяется несколько мелких капель. Также обнаружено, что ширина короны пропорциональна корню квадратному из времени. Если пленка имеет достаточно большую толщину, то непосредственно после удара образуются корона и глубокая каверна в жидкости.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Worthington A. M.** Impact with a liquid surface, studied by the aid of instantaneous photography // *Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A.* 1897. V. 189. P. 137–148.
2. **Rein M.** Phenomena of liquid drop impact on solid and liquid surfaces // *Fluid Dynamics Res.* 1993. V. 12. P. 61–93.
3. **Fukai J., Zhao Z., Poulikakos D.** Modeling of the deformation of a liquid droplet impinging upon a fat surface // *Phys. Fluids. A.* 1993. V. 5. P. 2588–2599.
4. **Kang B. S., Lee D. H.** On the dynamic behavior of a liquid droplet impacting upon an inclined heated surface // *Exp. Fluids.* 2000. V. 29. P. 380–387.
5. **Kim H. Y., Chun J. M.** Recoiling of liquid droplets upon collision with solid surfaces // *Phys. Fluids.* 2001. V. 13. P. 643–659.
6. **Sikalo S., Marengo M., Tropea C., Ganic E. N.** Analysis of impact of droplets on horizontal surfaces // *Exp. Thermal Fluid Sci.* 2002. V. 25. P. 503–510.
7. **Fukai J., Shiiba Y., Yamamoto Y.** Wetting effects on the spreading of a liquid droplet colliding with a flat surface: experiment and modeling // *Phys. Fluids.* 1995. V. 7. P. 236–247.
8. **Bussmann M., Chandra S., Mostaghimi D. J.** Modeling the splash of a droplet impacting a solid surface // *Phys. Fluids.* 2000. V. 12. P. 3121–3132.
9. **Yarin A. L., Weiss D. A.** Impact of drops on solid surfaces: self-similar capillary waves, and splashing as a new type of kinematic discontinuity // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 283. P. 141–173.

10. **Rein M. J.** The transition regime between coalescing and splashing drops // *J. Fluid Mech.* 1996. V. 306. P. 145–165.
11. **Wang A. B., Chen C. C.** Splashing impact of a single drop onto very thin liquid films // *Phys. Fluids.* 2000. V. 12. P. 2155–2158.
12. **Rodriguez F., Mesler R. J.** Some drops don't splash // *J. Colloid Interface Sci.* 1985. V. 106. P. 347–352.
13. **Manzello S. L., Yang J. C.** An experimental study of a water droplet impinging on a liquid surface // *Exp. Fluids.* 2000. V. 32. P. 580–589.
14. **Monaghan J. J.** Simulating free surface flows with SPH // *J. Comput. Phys.* 1994. V. 110. P. 399–406.
15. **Gingold R. A., Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics theory and application to non-spherical stars // *Mon. Notic. Roy. Astron. Soc.* 1977. V. 181. P. 375–389.
16. **Anghileri M., Castelletti L. M. L., Francesconi E., et al.** Rigid body water impact-experimental tests and numerical simulations using the SPH method // *Intern. J. Impact Engng.* 2011. V. 38. P. 141–151.
17. **Dalrymple R. A., Rogers B. D.** Numerical modeling of water waves with the SPH method // *Coastal Engng.* 2006. V. 53, N 23. P. 141–147.
18. **Fang J., Aurele P., Martin R., Christophe A.** Improved SPH methods for simulating free surface flows of viscous fluids // *Appl. Numer. Math.* 2009. V. 59, N 2. P. 251–271.
19. **Monaghan J. J.** A turbulence model for smoothed particle hydrodynamics // *Eur. J. Mech. B. Fluids.* 2011. V. 30. P. 360–370.
20. **Shao J. R., Li H. Q., Liu G. R., Liu M. B.** An improved SPH method for modeling liquid sloshing dynamics // *Comput. Structures.* 2012. V. 100. P. 18–26.
21. **Liu G. R.** Smoothed particle hydrodynamics: A meshfree particle method / G. R. Liu, M. B. Liu. River Edge, L.: World Sci. Publ., 2003.
22. **Shao S., Lo E. Y. M.** Incompressible SPH method for simulating Newtonian and non-Newtonian flows with a free surface // *Adv. Water Resources.* 2003. V. 26, N 7. P. 787–800.
23. **Colagrossi A., Landrini M.** Numerical simulation of interfacial flows by smoothed particle hydrodynamics // *J. Comput. Phys.* 2003. V. 191, N 2. P. 448–475.
24. **Morris J. P.** Simulating surface tension with smoothed particle hydrodynamics // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2000. V. 33. P. 333–353.
25. **Ata R., Soulaïmani A.** A stabilized SPH method for inviscid shallow water flows // *Intern. J. Numer. Methods Fluids.* 2005. V. 47. P. 139–159.
26. **Panciroli R., Abrate S., Minak G., Zucchelli A.** Hydroelasticity in water-entry problems: Comparison between experimental and SPH results // *Composite Structures.* 2012. V. 94. P. 532–539.
27. **Monaghan J. J.** Smoothed particle hydrodynamics // *Annu. Rev. Astron. Astrophys.* 1992. V. 30. P. 543–574.
28. **Monaghan J. J.** On the problem of penetration in particle methods // *J. Comput. Phys.* 1989. V. 82, N 1. P. 1–15.
29. **Weiss D. A., Yarin A. L.** Single drop impact onto liquid films: neck distortion, jetting, tiny bubble entrainment, and crown formation // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 385. P. 229–254.
30. **Chen J. K., Beraun J. E.** A generalized smoothed particle hydrodynamics method for nonlinear dynamic problems // *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.* 2000. V. 190. P. 225–239.