

УДК 539.3

## ОПИСАНИЕ ПОЛЗУЧЕСТИ В РАМКАХ ПОЛЕВОЙ ТЕОРИИ ДЕФЕКТОВ

Ю. В. Гриняев, Н. В. Чертова

Институт физики прочности и материаловедения СО РАН, 634055 Томск

В рамках полевой теории на основе уравнений эволюции плотности потока однородно распределенных дефектов предложено описание закономерностей ползучести. В случае одноосного деформирования под действием постоянного напряжения установлены существование некоторого критического напряжения, имеющего значение предела устойчивости ползучести, и наличие двух режимов деформирования в зависимости от величины внешней нагрузки. Определен интервал времени до момента разрушения системы в процессе неустойчивой ползучести при напряжениях больше критического и начальной скорости, превышающей значение неустойчивой стационарной скорости.

**Введение.** Необходимость эксплуатации материалов при высоких температурах и нагрузках, а также создание новых материалов, свойства которых существенно зависят от внешних условий, обусловили появление большого количества экспериментальных и теоретических работ в области ползучести. Ползучестью называют процессы деформирования, для которых зависимость между напряжениями и деформациями содержит время в явном виде или через некоторые операторы [1]. Свойством ползучести в той или иной мере обладают материалы различной физической природы (металлы, сплавы, горные породы, пластмассы) при любых температурах (от криогенных до температур, близких к температуре плавления). Очевидно, что законы ползучести и физические механизмы этого явления для разных материалов и способов нагружения различны.

Физические теории ползучести [2–4], в которых используются представления о дефектах кристаллической решетки, позволяют лучше понять рассматриваемое явление и объяснить многие наблюдаемые закономерности. Как считают авторы указанных работ, элементарные процессы ползучести в твердых телах при умеренных температурах обусловлены главным образом перемещением дислокаций. С точки зрения физической мезомеханики [5] деформируемое твердое тело представляет собой сложную иерархическую систему, в которой в ходе деформации образуются взаимодействующие дефектные структуры разного масштабного уровня.

Поведение систем различной природы, включающих большое количество взаимодействующих элементов, является предметом исследования синергетики [6]. В синергетике различают микро-, мезо- и макроуровни описания системы. На микроскопическом уровне рассматривают отдельные структурные элементы, задавая их положения, скорости и взаимодействия. На мезоскопическом уровне вводятся переменные, относящиеся к ансамблю структурных элементов. При описании системы на макроуровне за исходный выбирается мезоскопический уровень и разрабатываются методы, позволяющие предсказать возникновение макроскопических структур.

Существующие физические теории [2–4] исследуют явление ползучести в рамках микроскопического способа описания системы, при котором рассматриваются отдельные не взаимодействующие дефекты материала и аддитивно определяется их общий вклад в деформацию. В настоящей работе закономерности ползучести анализируются на уровне мезоскопического описания, при котором рассматривается совокупность взаимодействующих

дефектов и учитываются ее кооперативные свойства. В рамках полевой теории дефектов, описывающей динамику дислокационного ансамбля [7, 8], получено уравнение, устанавливающее зависимость между скоростью потока дефектов и напряжениями и позволяющее исследовать явление ползучести. На основе этого уравнения рассмотрены закономерности одноосного деформирования, поскольку при изучении ползучести многие результаты получены в экспериментах по растяжению стержней.

**1. Динамические уравнения дислокационного ансамбля.** Согласно [7, 8] деформируемое твердое тело с дефектами можно рассматривать как смесь двух континуумов: упругого и континуума дефектов. Упругий континуум представляет собой материальную среду, воспринимающую упругие дисторсии от внешних воздействий и дефектов материала; континуум дефектов — механическое поле, передающее взаимодействие материальных объемов и являющееся носителем энергии и импульса.

В рамках предложенной модели динамические уравнения упругой среды с дефектами можно записать следующим образом:

$$B\partial_k I_{ki} = -P_i, \quad De_{ikl}\partial_k \alpha_{lj} = -B \frac{\partial}{\partial t} I_{ij} - \sigma_{ij}; \quad (1.1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} P_i = \partial_j \sigma_{ji}. \quad (1.2)$$

Здесь  $\alpha_{ij} = e_{ikl}\partial_k \beta_{lj}^{int}$  — компоненты тензора плотности дислокаций;  $I_{ij} = -(\partial/\partial t)\beta_{ij}^{int} - \partial_i V_j^{int}$  — компоненты тензора плотности потока дислокаций;  $\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\beta_{kl}^{ext} + \beta_{kl}^{int})$  — тензор эффективных напряжений;  $P_i = \rho(V_i^{ext} + V_i^{int})$  — эффективный импульс;  $\rho$  — плотность среды;  $D, B$  — константы модели;  $C_{ijkl}$  — тензор упругих модулей;  $e_{ikl}$  — антисимметричный тензор Леви-Чивиты. Величины  $\alpha_{ij}, I_{ij}, \sigma_{ij}, P_i$  определяются компонентами упругих дисторсий от внешних воздействий  $\beta_{kl}^{ext}$  и дефектов материала  $\beta_{kl}^{int}$ , скоростью упругих смещений  $V_i^{ext}$  и скоростью  $V_i^{int}$ , обусловленной смещением дефектов. Уравнения (1.1), дополненные геометрическими соотношениями упругого континуума с дефектами [9]  $\partial_k \alpha_{ki} = 0, (\partial/\partial t)\alpha_{ij} = e_{ikl}\partial_k I_{lj}$ , представляют собой полную систему динамических уравнений дислокационного ансамбля, которая удовлетворяет условию совместности (1.2).

Как показано в [7], в отсутствие внешних воздействий внутренние напряжения и импульс определяются максвелловским тензором напряжений и плотностью потока полевого импульса:

$$\sigma_{ij}^{int} = D\left(\alpha_{ki}\alpha_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2}\alpha_{kl}\alpha_{kl}\right) + B\left(I_{ki}I_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2}I_{kl}I_{kl}\right) + \eta I_{ij},$$

$$\rho V_i^{int} = B e_{ikl}\alpha_{kn} I_{ln},$$

где  $\eta$  — коэффициент вязкости;  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера. С учетом последних равенств динамические уравнения ансамбля дефектов примут вид

$$\partial_k \alpha_{ki} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial t} \alpha_{ij} = e_{ikl}\partial_k I_{lj}, \quad B\partial_k I_{ki} = -B e_{ikl}\alpha_{kn} I_{ln} - \rho V_i^{ext}, \quad (1.3)$$

$$De_{ikl}\partial_k \alpha_{lj} = -B \frac{\partial}{\partial t} I_{ij} - D\left(\alpha_{ki}\alpha_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2}\alpha_{kl}\alpha_{kl}\right) - B\left(I_{ki}I_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2}I_{kl}I_{kl}\right) - \eta I_{ij} - \sigma_{ij}^{ext}.$$

Полученная система уравнений позволяет исследовать динамику дислокационного ансамбля при заданном внешнем воздействии, определяемом величинами  $V_i^{ext}, \sigma_{ij}^{ext}$ .

## 2. Динамические уравнения ансамбля однородно распределенных дефектов.

Анализ эволюции дефектных структур, предложенный в работе [10], позволил установить, что хаотическое распределение дефектов, наблюдаемое на пределе текучести материалов, по мере увеличения деформации сменяется последовательностью неразориентированных и разориентированных дефектных субструктур. При континуальном описании напряженности поля хаотически распределенных дефектов  $(\alpha, I)$  не зависят от координат и соответствуют однородному распределению дефектов. В этом случае уравнения (1.3) запишутся в виде

$$Be_{ikl}\alpha_{kn}I_{ln} = -\rho V_i^{ext}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \alpha_{ij} = 0,$$

$$B \frac{\partial}{\partial t} I_{ij} + D \left( \alpha_{ki} \alpha_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2} \alpha_{kl} \alpha_{kl} \right) + B \left( I_{ki} I_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2} I_{kl} I_{kl} \right) + \eta I_{ij} + \sigma_{ij}^{ext} = 0.$$

Из второго уравнения системы следует, что плотность дислокаций не зависит от времени, когда дефекты материала распределены однородно. Полагая  $\alpha = 0$ , получим

$$B \frac{\partial}{\partial t} I_{ij} + B \left( I_{ki} I_{kj} - \frac{\delta_{ij}}{2} I_{kl} I_{kl} \right) + \eta I_{ij} + \sigma_{ij}^{ext} = 0; \quad (2.1)$$

$$I_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \beta_{ij}^{int} = -\frac{\partial}{\partial t} \beta_{ij}, \quad (2.2)$$

где  $\beta_{ij}$  — пластическая дисторсия, определяющая поток дефектов [9]. В приближении инженерных теорий, устанавливающих зависимость между деформациями, напряжениями, скоростями этих величин и временем в случае одноосного нагружения, в уравнении (2.1) останутся только продольные компоненты  $I_{11} = -\xi_{11}$ ,  $\sigma_{11}$ , тензорные индексы которых далее опускаются. В итоге получим нелинейное дифференциальное уравнение, связывающее скорость пластической деформации и напряжения:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{\eta}{B} \xi + \frac{1}{B} \sigma.$$

В безразмерных величинах  $v = (B/\eta)\xi$ ,  $\tau = (\eta/B)t$ ,  $S = (B/\eta^2)\sigma$  это уравнение примет вид

$$\frac{dv}{d\tau} = \frac{1}{2} v^2 - v + S. \quad (2.3)$$

**3. Закономерности ползучести при постоянном напряжении.** Предположим, что полученное дифференциальное уравнение (2.3) описывает закономерности деформирования твердого тела в процессе ползучести. Рассмотрим простейший случай  $\sigma = \text{const}$ , который соответствует ползучести под действием постоянного напряжения. Приравняв правую часть уравнения (2.3) к нулю, найдем стационарные точки, в которых скорость деформации постоянна, и исследуем их на устойчивость. Из условия стационарности

$$f(v) = v^2/2 - v + S = 0$$

соответствующие значения скорости установившейся ползучести равны

$$v_1 = p = 1 + \sqrt{1 - 2S}, \quad v_2 = q = 1 - \sqrt{1 - 2S}.$$

Поскольку величины  $\eta$ ,  $B$ ,  $\sigma$ , определяющие  $S$ , положительны, то имеет место неравенство  $0 < q < p$ .

Анализируя график функции  $f(v)$  и фазовый портрет дифференциального уравнения (2.3), можно установить, что стационарное состояние  $q$  является устойчивым, а  $p$  — неустойчивым. Когда управляющий параметр  $S$ , определяющий внешнее воздействие,

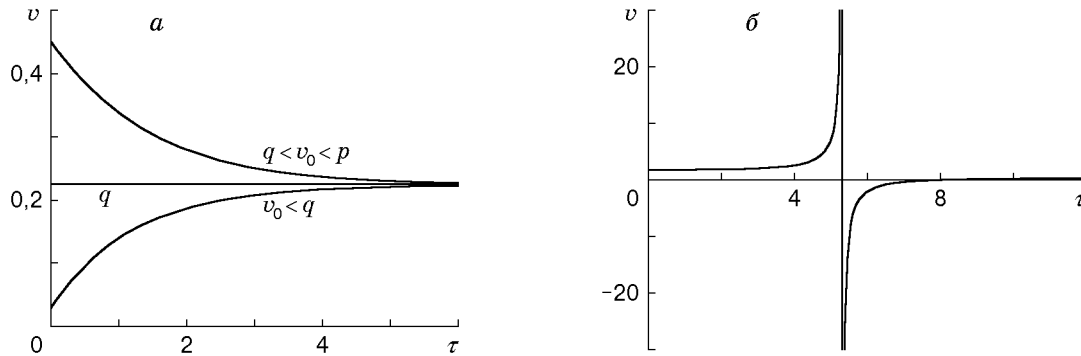


Рис. 1

приближается к  $1/2$ , устойчивое и неустойчивое стационарные состояния сближаются, при

$$S^* = 1/2 \quad (3.1)$$

совпадают, а при  $S > 1/2$  одновременно исчезают. Таким образом,  $S^*$  является критическим значением управляющего параметра. При  $S < 1/2$  поведение реальной системы, описываемой уравнением (2.3), стабилизируется. Она переходит в устойчивое стационарное состояние  $v_2 = q$ , тем самым исключается возможность экспериментально определить неустойчивое стационарное состояние  $v_1 = p$ . При  $S > S^*$  реализуется неустойчивый режим ползучести с увеличивающейся скоростью.

Рассмотрим сказанное выше более подробно. При  $S < S^*$  решение уравнения (2.3) имеет вид

$$\frac{2}{p-q} \ln \left| \frac{v(\tau) - p}{v(\tau) - q} \right| = \tau + C,$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, определяемая из начальных условий  $v(0) = v_0$ . В итоге решение можно записать следующим образом:

$$v(\tau) = \frac{p - q[(v_0 - p)/(v_0 - q)] \exp[(p - q)\tau/2]}{1 - [(v_0 - p)/(v_0 - q)] \exp[(p - q)\tau/2]}. \quad (3.2)$$

На рис. 1 приведены кривые скорости деформации, показывающие характер эволюции этой величины при  $S = 0,2$ . При малых  $\tau$  вид функции  $v(\tau)$  определяется начальным значением  $v_0$ . Можно выделить следующие интервалы:  $0 < v_0 < q$ ,  $q < v_0 < p$  и  $v_0 > p$ . На рис. 1,а представлены кривые  $v(\tau)$ , полученные при значениях  $v_0$ , принадлежащих двум первым интервалам. Зависимость  $v(\tau)$  при  $v_0 > p$ , приведенная на рис. 1,б, имеет особенность типа  $1/x$  при  $x = 0$ , где  $x = 1 - [(v_0 - p)/(v_0 - q)] \exp[(p - q)\tau/2]$ . Следовательно, время до момента разрушения системы, при котором скорость деформации становится бесконечно большой, определяется по формуле

$$\tau_1 = \frac{2}{p-q} \ln \frac{v_0 - q}{v_0 - p}.$$

Время  $\tau_1$  уменьшается при увеличении внешней нагрузки и начальной скорости нагружения. При больших  $\tau$  скорость деформации не зависит от  $v_0$  и при  $\tau \rightarrow \infty$   $v(\tau) \rightarrow q$ , т. е. происходит стабилизация процесса ползучести.

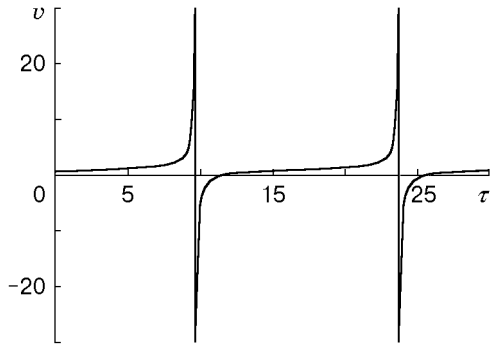


Рис. 2

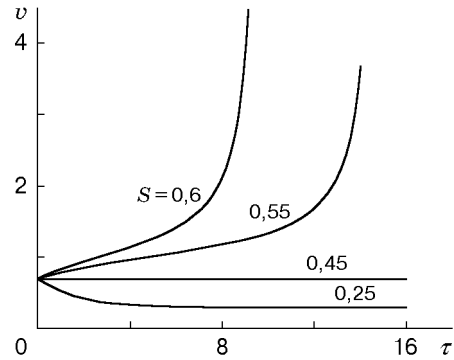


Рис. 3

При  $S > S^*$  решение уравнения (2.3) может быть записано следующим образом:

$$v(\tau) = \frac{n + \alpha^2}{n} + \frac{(n^2 + \alpha^2) \cos(\alpha\tau/2)}{n(\cos(\alpha\tau/2) - (n/\alpha) \sin(\alpha\tau/2))}, \quad (3.3)$$

где  $2\alpha = p - q$ ;  $n = 1 - v_0$ . На рис. 2 представлено решение (3.3) при  $S = 0,6$ ,  $v_0 = 0,7$ . Очевидно, что для реальной системы время эволюции до момента разрушения будет ограничено условием

$$\cos(\alpha\tau/2) - (n/\alpha) \sin(\alpha\tau/2) = 0, \quad (3.4)$$

при котором скорость деформации обращается в бесконечность. Согласно (3.4) время “жизни” системы до разрушения равно  $\tau_2 = (2/\alpha)(\arctg(\alpha/n) + \pi)$ .

Анализ последних соотношений показывает, что  $\tau_2$  уменьшается при увеличении  $S$  и  $v_0$ . На рис. 3 показано изменение скорости ползучести в зависимости от времени при различных значениях внешней нагрузки и значении  $v_0 = 0,7$ , удовлетворяющем условию  $q(S) < v_0 < p(S)$ .

**4. Кривые ползучести.** Обычно результаты экспериментальных исследований представляют в виде кривой ползучести, характеризующей изменение деформации со временем. На кривой ползучести выделяют три участка [1, 11, 12]. На первом участке скорость деформации постепенно уменьшается до минимального значения, которое остается постоянным на втором участке. На третьем участке скорость ползучести увеличивается и деформация заканчивается разрывом образца. В рамках данного подхода соответствующие зависимости можно получить, проинтегрировав по времени выражения (3.2), (3.3). При  $S < S^*$  кривая ползучести описывается соотношением

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0 + p\tau + 2 \ln |(p - q) / \{p - v_0 - (q - v_0) \exp[(p - q)\tau/2]\}|, \quad (4.1)$$

а при  $S > S^*$  — уравнением

$$\varepsilon(\tau) = \varepsilon_0 + \tau - 2 \ln |\cos(\alpha\tau/2) - (n/\alpha) \sin(\alpha\tau/2)|, \quad (4.2)$$

где  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0)$ . Из выражения (4.1) следует, что при  $\tau \rightarrow \infty$   $\varepsilon(\tau) \approx C + q\tau$ , где  $C$  — постоянная. Это указывает на то, что при  $S < S^*$  существует стационарный режим деформирования с постоянной скоростью  $q$ . При  $S > S^*$ , как отмечалось выше, время до момента разрушения системы ограничено условием (3.4). В пределе малых  $\tau$ , удовлетворяющих условию  $\alpha\tau < 1$ , выражения (4.1), (4.2) могут быть записаны в виде  $\varepsilon(\tau) \approx \varepsilon_0 + v_0\tau$ .

На рис. 4, а, б приведены кривые ползучести, полученные при  $S = 0,15 < S^*$ ,  $v_0 = 0,7$  и  $S = 0,6 > S^*$ ,  $v_0 = 0,3$  соответственно. В обоих случаях начальная деформация полагалась равной 0,01 %.

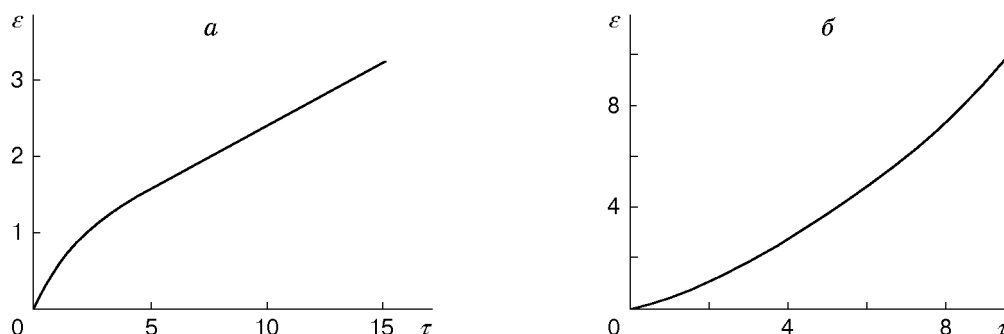


Рис. 4

**5. Обсуждение результатов.** Из анализа ползучести на основе уравнения, описывающего эволюцию потока однородно распределенных дефектов, следует, что характер процесса существенно зависит от внешней нагрузки  $S$  и начальной скорости деформации  $v_0$ . При постоянном растягивающем напряжении область устойчивой ползучести ограничена условиями  $0 < S < S^*$  и  $0 < v_0 < p$ , где  $S^*$  имеет значение предела устойчивой ползучести и согласно (3.1) определяется параметрами материала, описывающими инерционные свойства ансамбля дефектов и вязкость среды. Как следует из анализа эволюции скорости ползучести, эта величина при малых  $\tau$  увеличивается при  $0 < v_0 < q$  и уменьшается при  $q < v_0 < p$  до минимального стационарного значения  $q(S)$  при  $S < S^*$ . Поскольку на экспериментальных кривых скорость ползучести на первом участке постепенно уменьшается до минимальной, соответствующей установившейся ползучести, то в качестве начальных значений  $v(\tau)$  следует рассматривать  $v_0 > q$ .

Полученные соотношения  $v(\tau)$  описывают также известную монотонно возрастающую зависимость скорости ползучести от напряжений ( $v_1(S_1) > v_2(S_2)$  при  $S_1 > S_2$ ) [12] и условие  $q(S) = 0$  при  $S = 0$ , учитываемое при определении этой величины в рамках феноменологических теорий [11].

При  $S < S^*$  на кривой ползучести можно выделить стадии неустановившейся и установившейся ползучести [1, 11, 12]. Полученная зависимость  $\varepsilon(\tau)$  не справедлива для третьего участка диаграммы ползучести, на котором скорость деформации увеличивается и процесс заканчивается разрывом образца. Однако экспериментальные кривые ползучести получены под действием постоянной нагрузки. Как считают авторы [1, 12], в рассматриваемом случае постоянной нагрузки ускоренная ползучесть отсутствует вплоть до момента разрушения образца.

Описание кривой ползучести при  $S > S^*$  имеется в работе [12]. Отмечая разнообразие наблюдаемых картин ползучести, ее автор считает, что на кривой ползучести может отсутствовать первый участок с уменьшающейся скоростью деформации; после непродолжительного периода деформации с относительно постоянной скоростью скорость ползучести увеличивается, т. е. на диаграмме присутствует только третий участок. Из анализа ползучести в рамках полевой теории дефектов следует, что различные действительные режимы ползучести можно наблюдать в одном и том же образце при разной величине приложенной нагрузки.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Работнов Ю. Н.** Ползучесть элементов конструкций. М.: Наука, 1966.
2. **Коттрелл А.** Дислокации и пластическое течение в кристаллах. М.: Metallurgizdat, 1958.

3. **Рид В. Т.** Дислокации в кристаллах. М.: Metallurgizdat, 1957.
4. **Розенберг В. М.** Ползучесть металлов. М.: Metallurgiya, 1967.
5. **Rapin V. E.** Foundations of physical mesomechanics // Phys. Mesomech. 1998. V. 1, N 1. P. 5–20.
6. **Хакен Г.** Синергетика. М.: Мир, 1985.
7. **Гриняев Ю. В., Панин В. Е.** Полевая теория дефектов на мезоуровне // Докл. РАН. 1997. Т. 353, № 1. С. 37–39.
8. **Гриняев Ю. В., Чертова Н. В., Панин В. Е.** Динамические уравнения ансамбля дефектов при наличии разориентированных субструктур // Журн. техн. физики. 1998. Т. 68, № 9. С. 134, 135.
9. **Косевич А. М.** Основы механики кристаллической решетки. М.: Мир, 1972.
10. **Конева Н. А., Козлов Э. В.** Физическая природа стадийности пластической деформации // Изв. вузов. Физика. 1990. № 2. С. 89–106.
11. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого твердого тела. М.: Наука, 1979.
12. **Качанов Л. Н.** Теория ползучести. М.: Физматгиз, 1960.

*Поступила в редакцию 1/VI 1999 г.*

---