

УДК 532.546

## **Трансцилляторный перенос тепла в жидкости с газовыми пузырьками\***

**Р.И. Нигматуллин, А.И. Филиппов, А.С. Хисматуллин**

*Стерлитамакская государственная педагогическая академия  
им. Зайнаб Бишевой, Стерлитамак*

E-mail: filippovai@rambler.ru

Описана теоретическая модель трансцилляторного теплопереноса, индуцированного всплывающими в жидкости газовыми пузырьками. Для этого температурная задача редуцирована к эквивалентному интегральному уравнению, а поле скоростей в жидкой фазе представлено в виде структур типа бегущей и стоячей волн. Найдены соотношения для вычисления коэффициента трансцилляторного переноса.

**Ключевые слова:** жидкость с пузырьками, трансцилляторный теплоперенос, плоская волна, интегральное уравнение, коэффициент теплопроводности.

Исследование процессов переноса тепла в жидкости и газах со сложной колебательной структурой полей скорости представляет важнейшую проблему в связи с научными и технологическими приложениями. Например, одним из важных факторов эффективности химических реакций является скорость их протекания, которая в большинстве случаев зависит от интенсивности обмена между компонентами, в частности, от коэффициентов диффузии и теплопроводности. Скорость процессов переноса вещества, а значит, и скорость протекания химических реакций можно увеличить при помощи барботажа — движения через жидкость пузырьков газа.

Отечественными и зарубежными учеными проводились теоретические и экспериментальные исследования процессов теплопереноса в газожидкостных потоках [1–6]. Важные закономерности теплопереноса обнаружены ими на основе численных расчетов и измерений. Авторами работы [7] экспериментально показано, что при акустическом воздействии, коэффициенты переноса в пористой среде увеличиваются. Этот факт имеет огромное значение для нефтедобывающей промышленности, так как при прогреве нефтяного пласта нефтеотдача значительно увеличивается. В работе [8] также экспериментально обнаружена зависимость коэффициента теплопередачи от амплитуды и частоты вибрации тонкого нагревателя. Аналогичные зависимости установлены и японскими учеными при обтекании цилиндра

---

\* Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ “Региональный конкурс ПОВОЛЖЬЕ” (грант 11-08-97033).

пульсирующим потоком жидкости [9]. Таким образом, к настоящему времени накоплено большое количество экспериментальных фактов, свидетельствующих об увеличении коэффициентов переноса при вибрационных воздействиях. Однако теоретически физические закономерности процессов переноса в сложных системах при относительных колебаниях ее частей не исследованы.

В настоящей статье, в отличие от предшествующих работ, развита аналитическая модель процесса теплопереноса в жидкости со всплывающими газовыми пузырьками при небольших объемных содержаниях газовой фазы. Она основана на использовании идеи транцилляторного переноса, впервые, видимо, рассмотренного в работах [10–13]. Захватывающие перспективы открывает применение развитых представлений к процессам переноса в сложных физических системах (например, в турбулентном состоянии), полная теоретическая база которых еще не создана, а фундаментальные вопросы также далеко не исчерпаны.

### 1. Описание транцилляторного переноса

При наличии всплывающих пузырьков возникает сложное поле скоростей, в котором условно можно выделить слои, смещающиеся относительно друг друга. Максимальное смещение слоя происходит при его нахождении на уровне центра пузырька (рис. 1). Процесс теплообмена между слоями приводит к тому, что возникает перенос интегрального параметра (тепла, электрического заряда, массы и др.) вдоль оси  $Ox$  за счет транцилляторной составляющей [10–13]. При определенных условиях величина транцилляторного потока может на несколько порядков превышать молекулярный, поэтому исследование механизма транцилляторного переноса имеет важное значение.

Для вычисления коэффициента транцилляторного переноса вектор конвективного потока тепла

$$\vec{j}_{cv} = c_l \rho_l \vec{v} T \quad (1)$$

усредняется по периоду колебаний и пространственной ячейке. Несмотря на то, что среднее значение скорости при колебательном движении равно нулю  $\langle \vec{v} \rangle = 0$ , среднее значение конвективного потока, вообще говоря, не равно нулю  $\langle \vec{v} T \rangle \neq 0$ , поскольку температурное поле  $T$  зависит от скорости  $\vec{v}$ . Для определения коэффициента транцилляторного переноса  $\lambda_{tr}$  необходимо величину усредненного конвективного потока тепла  $\langle \vec{j}_{cv} \rangle$  привести к виду, аналогичному закону теплопроводности Фурье:

$$\langle \vec{j}_{cv} \rangle = -\lambda_{tr} \langle \nabla T \rangle. \quad (2)$$

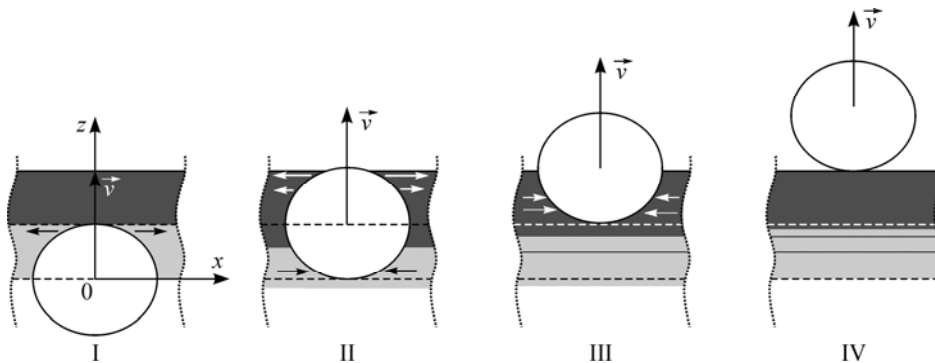


Рис. 1. Схема возникновения транцилляторного переноса при всплывании пузырьков.

Из (2) видно, что для определения коэффициента трансцилляторного переноса следует найти поля скоростей и температуры для периодических движений жидкости, возникающих при всплывании газовых пузырьков в жидкости.

## 2. Определение температурного поля

Определение температурного поля  $T$  жидкости в предположении аксиальной симметрии в цилиндрической системе координат сводится к решению задачи Коши для температурного перепада  $\theta = T - T|_{t=0}$ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} - \frac{a_\rho}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \theta}{\partial \rho} \right) - a_z \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = -v_z \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \Gamma_z \right) - v_\rho \left( \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \Gamma_\rho \right) = q(\rho, z, t), \quad (3)$$

$$\theta|_{t=0} = 0, \quad (4)$$

где введены обозначения для координат антиградиента в начальный момент времени  $\Gamma_z = -\partial T / \partial z|_{t=0}$ ,  $\Gamma_\rho = -\partial T / \partial \rho|_{t=0}$ . Нахождение полного решения задачи затруднено из-за сложного поля скоростей, но не является необходимым. Достаточно осуществить редукцию к эквивалентному интегральному уравнению, связывающему температуру и ее градиент. Для этого конвективное слагаемое в правой части (3) представлено как эквивалентный источник  $q(\rho, z, t)$ . Указанную редукцию осуществим с помощью теории обобщенных функций. Для этого выразим искомое решение через функцию Грина  $G$ :

$$\theta = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty q(\rho', z', t') G(\rho, \rho', z - z', t - t') d\rho' dz' dt', \quad (5)$$

уравнение для которой имеет вид

$$\hat{L}G = \delta(\rho - \rho') \delta(t - t') \delta(z - z'), \quad (6)$$

где введен оператор  $\hat{L} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{a_\rho}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) - a_z \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ .

Используя представление через интегралы Фурье, выразим  $\delta$ -функции через соответствующие им фундаментальные решения:

$$\delta(\rho, \rho') = \rho' \int_0^\infty k J_0(k, \rho) J_0(k, \rho') dk, \quad (7)$$

$$\delta(z - z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(i\beta(z - z')) d\beta, \quad \delta(t - t') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \exp(i\alpha(t - t')) d\alpha,$$

где  $J_0(x)$  — функция Бесселя первого порядка действительного аргумента. Тогда искомая функция Грина определяется методом деления на оператор:

$$G(\rho, \rho', z - z', t - t') = \frac{\rho'}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \frac{k J_0(k\rho) J_0(k\rho') \exp[i\alpha(t - t')] \exp[i\beta(z - z')]}{a_\rho k^2 + i\alpha + a_z \beta^2} dk d\alpha d\beta. \quad (8)$$

Выражение (8) представляется как интеграл от трех переменных. Вычисление интеграла по переменной  $\alpha$  осуществляется с использованием теории вычетов:

$$I_1 = \int_0^{\infty} \frac{\exp[i\alpha(t-t')]}{a_{\rho}k^2 + i\alpha + a_z\beta^2} d\alpha = \begin{cases} 2\pi \exp[-a_{\rho}k^2(t-t') - a_z\beta^2(t-t')], & t > t', \\ 0, & t < t'. \end{cases} \quad (9)$$

Второй интеграл в (8) по переменной  $\beta$  сводится к интегралу Пуассона:

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \exp[i\beta(z-z') - a_z\beta^2(t-t')] d\beta = \frac{\sqrt{\pi} \exp(-(z-z')^2/4a_z(t-t'))}{\sqrt{a_z(t-t')}}. \quad (10)$$

Для вычисления интеграла  $I_3$  использованы известные справочные соотношения [14]:

$$I_3 = \int_0^{\infty} J_0(k\rho)J_0(k\rho') \exp[-a_{\rho}k^2(t-t')] k dk = \frac{1}{2a_{\rho}(t-t')} \exp\left(-\frac{\rho^2 + \rho'^2}{4a_{\rho}(t-t')}\right) I_0\left(\frac{\rho \cdot \rho'}{2a_{\rho}(t-t')}\right). \quad (11)$$

Окончательно получим следующее выражение для функции Грина:

$$G(\rho, \rho', z-z', t-t') = \frac{\rho' \cdot \exp\left(-\frac{(z-z')^2}{4a_z(t-t')}\right)}{4a_{\rho}\sqrt{a_z\pi}(t-t')^{3/2}} \times \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho'^2}{4a_{\rho}(t-t')}\right] \cdot I_0\left(\frac{\rho \cdot \rho'}{2a_{\rho}(t-t')}\right). \quad (12)$$

С учетом этого эквивалентное интегро-дифференциальное уравнение, соответствующее задаче (3), (4), имеет вид:

$$\theta(\rho, z, t) = \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \left( -v_z \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \Gamma_z \right) - v_{\rho} \left( \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \Gamma_{\rho} \right) \right) \frac{\rho'}{4a_{\rho}\sqrt{a_z\pi}(t-t')^{3/2}} \times \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4a_z(t-t')}\right] \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho'^2}{4a_{\rho}(t-t')}\right] I_0\left(\frac{\rho \cdot \rho'}{2a_{\rho}(t-t')}\right) d\rho' dz' dt'. \quad (13)$$

Оно связывает интегральным соотношением функцию  $\theta$  и ее градиент. Соответствующее интегро-дифференциальное уравнение для температуры  $T$ , позволяющее выразить температурное поле через градиент, представится как

$$T = T|_{t=0} + \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \left( -v_z \frac{\partial T}{\partial z} - v_{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) \frac{\rho'}{4a_{\rho}\sqrt{a_z\pi}(t-t')^{3/2}} \times \exp\left[-\frac{(z-z')^2}{4a_z(t-t')}\right] \exp\left[-\frac{\rho^2 + \rho'^2}{4a_{\rho}(t-t')}\right] I_0\left(\frac{\rho \cdot \rho'}{2a_{\rho}(t-t')}\right) d\rho' dz' dt'. \quad (14)$$

Для вычисления интегралов в выражении (14) необходимо подставить выражение радиальной и вертикальной координат скорости  $v_\rho, v_z$ .

В результате подстановки полученного значения температуры в конвективный поток (1) получается выражение, связывающее поток тепла и координаты градиента температуры. Оно гораздо сложнее, чем закон теплопроводности Фурье, и определяет локальные значения теплового потока, изменяющиеся со временем сложным образом. Такое поле является *микроскопическим* со свойственными ему значительными пространственными неоднородностями и временными вариациями, поэтому его измерение существующими приборами затруднено. Реально измерение осредненного по времени и пространству потока, который и является *макроскопическим*. В результате осреднения конвективный поток представляется в виде сложного функционала, зависящего от градиента температуры. Приведение такого функционала к виду, аналогичному закону теплопроводности Фурье, может быть осуществлено разложением его в ряд Тейлора по координатам вектора градиента температуры.

Легко показать, что среднее значение  $\langle \bar{v}T|_{t=0} \rangle$  равно нулю для любого ячеистого движения жидкости. Поскольку  $T|_{t=0}$  не зависит от времени, то осреднение по времени указанного выражения приводит к вычислению интеграла  $\int_t^{t+\tau} \bar{v}(t') dt'$ .

Этот интеграл равен нулю, поскольку он может быть представлен для каждой фиксированной частицы жидкости в виде интеграла от перемещений  $d\vec{r} = \bar{v}(t') dt'$  по замкнутому контуру, соответствующему траектории частицы в ячейке,  $\oint d\vec{r} = 0$ . Отсюда следует, что после подстановки выражения для температуры (14) в (1) и осреднения первое слагаемое, содержащее  $T|_{t=0}$ , обращается в нуль, а среднее значение конвективного потока определяется в виде функционала

$$\langle \bar{j}_{cv} \rangle = \langle c_l \rho_l \bar{v}T \rangle = -c_l \rho_l \left\langle \bar{v} \int_0^\infty \int_{-\infty}^0 \int_0^t \left( v_z \frac{\partial T}{\partial z} + v_\rho \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) G(\rho, \rho', z - z', t - t') d\rho' dz' dt' \right\rangle,$$

который, очевидно, равен нулю, если градиент температуры равен нулю. Отсюда следует также, что осредненный конвективный поток, как и кондуктивный, целиком определяется градиентом температуры. Такой поток, как и механизм, называется *транцилляторным*.

На самом деле между *конвективным* и *молекулярным* потоками существует некоторое соответствие или *эквивалентность*. На основании формул для молекулярного  $\bar{q} = -\lambda \nabla T$  и конвективного  $\bar{q} = c_l \rho_l \bar{v}T$  потоков тепла, можно сформулировать следующие положения:

– каждому молекулярному потоку можно найти эквивалентный конвективный поток, скорость которого определяется выражением:  $\bar{v}_{eq} = -\lambda \langle \nabla T \rangle / (c_l \rho_l T)$ ;

– каждому конвективному потоку может быть найден эквивалентный молекулярный поток, эффективная теплопроводность которого определяется формулой:  $\lambda_{eq} = -c_l \rho_l T \langle \bar{v} \nabla T \rangle / \langle \nabla T \rangle^2$ .

Представления о трансцилляторном переносе тепла существенно расширяют и дополняет второе положение об эквивалентности конвективного и диффузионного потоков тепла. Действительно, из приведенного в настоящей работе материала следует, что при замкнутых ячеистых течениях осредненный конвективный поток зависит от градиента температуры по формуле, аналогичной закону Фурье. В этом заключается одно из положений общенаучного значения представлений о трансцилляторном переносе.

Осредненное выражение для конвективного потока можно представить также в виде

$$\langle \bar{j}_{cv} \rangle = -c_l \rho_l \left\langle \bar{v} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^t \left( v_z \left( \frac{\partial \theta}{\partial z} - \Gamma_z \right) + v_\rho \left( \frac{\partial \theta}{\partial \rho} - \Gamma_\rho \right) \right) G(\rho, \rho', z - z', t - t') d\rho' dz' dt' \right\rangle,$$

откуда следует, что главной причиной возникновения трансцилляторного теплового потока являются преобладающие значения координат антиградиента  $\Gamma_\rho, \Gamma_z$  и корреляции между скоростью движения и температурой.

### 3. Поле скоростей для цепочки всплывающих пузырьков

Для простоты представим всплывающий газ как правильно чередующиеся цепочки равноудаленных пузырьков с расстоянием  $L$  между ними в цепочках. Пусть пузырьки имеют сферическую форму и одинаковы по размерам (рис. 2). Расстояния между цепочками вдоль оси  $x$  обозначим через  $L_x$ , а вдоль оси  $y$  — через  $L_y$ . Полагаем, что радиусы всплывающих пузырьков намного меньше расстояний между ними, т. е.  $R \ll L, R \ll L_x, R \ll L_y$ . Это условие введено для того, чтобы поле скоростей в цепочке пузырьков можно было определить как сумму скоростей, создаваемых отдельными пузырьками. Скорость каждого пузырька одинакова, равна  $\bar{u}$  и направлена параллельно оси  $z$ . Поле скоростей внутри пузырька является сложным, однако в нулевом приближении скорость газовой фазы внутри пузырька будем считать равной средней скорости, т. е. скорость движения пузырька  $\bar{v} = \bar{u}$  при  $R > |\bar{r}|$ .

Для нахождения поля скоростей жидкости при движении в ней бесконечной цепочки пузырьков газа воспользуемся выражением для поля скоростей жидкости, обтекающей сферу [8], в котором используем волновую координату  $\bar{r} = \bar{r}_0 - \bar{u}t$ , где  $\bar{u}$  — скорость движения пузырька,  $m$  — номер пузырька. С учетом того, что

$\bar{r}_0 = \bar{e}_x x + \bar{e}_y y + \bar{e}_z (z + mL)$ , выражение для радиус-вектора имеет вид:  $\bar{r} = \bar{e}_x x + \bar{e}_y y + \bar{e}_z (z - ut + mL)$ , а выражение для единичного вектора представится как  $\bar{n} = \bar{r} / |\bar{r}|$ .

Поле скоростей жидкости найдено путем подстановки этих соотношений в выражение для уединенной сферы [15]. Окончательно координаты вектора скорости всплывающей цепочки пузырьков имеют вид бегущей волны

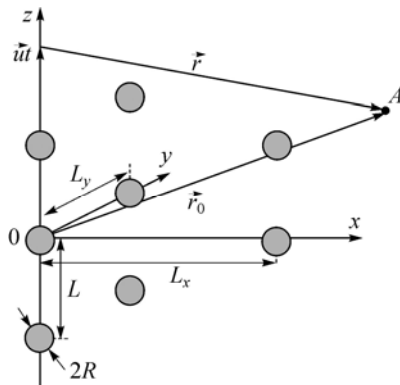


Рис. 2. Всплывание группы цепочек пузырьков.

$$v_\rho = \frac{3}{2} R^3 u \rho \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{z - ut + mL}{(\rho^2 + (z - ut + mL)^2)^{5/2}},$$

$$v_z = \frac{1}{2} R^3 u \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{2(z - ut + mL)^2 - \rho^2}{(\rho^2 + (z - ut + mL)^2)^{5/2}},$$
(15)

где  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Функции  $v_\rho$  и  $v_z$  являются периодическими относительно времени  $t$  с периодом  $T^* = L/u$ . На рис. 3, *a-d* представлены зависимости составляющих поля скоростей жидкости  $v_\rho$  и  $v_z$  от пространственных координат  $\rho, z$  для уединенного всплывающего пузырька радиусом  $R = 0,001$  м со скоростью  $u = 0,5$  м/с для момента времени  $t = 0$  с, т. е. когда его центр расположен в точке  $z = 0$ .

Из рис. 3 видно, что наибольшее значение скорости в жидкости достигается вблизи поверхности пузырька. С удалением от пузырька значения  $v_\rho$  и  $v_z$  стремятся к нулю. Зона возмущения, обусловленная движением пузырька, имеет размеры в 2–3 его радиуса.

На рис. 4, *a, b* представлены графики колебаний поля скоростей  $v_z$  и  $v_\rho$  при всплывании цепочки равноудаленных пузырьков, в которой расстояния между пузырьками составляют 15 радиусов пузырьков, т. е.  $L = 15 R$ . Остальные значения величин приняты теми же, что и на предыдущем рисунке.

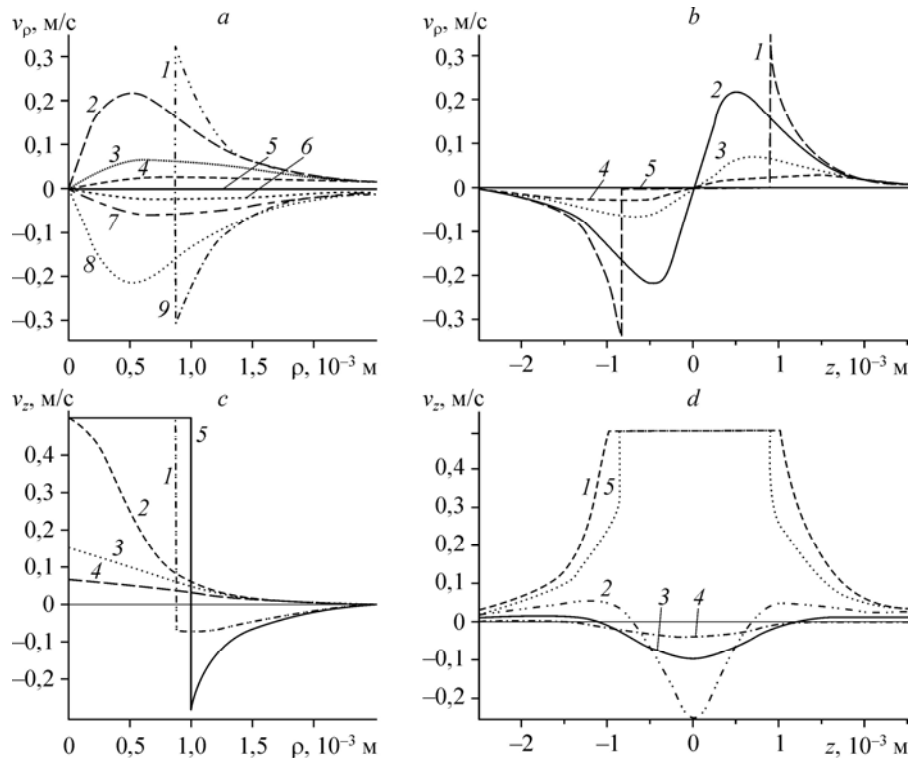


Рис. 3. Зависимости радиальной  $v_\rho$  (*a, b*) и вертикальной  $v_z$  (*c, d*) составляющих скорости от горизонтальной координаты  $\rho$  (*a, c*) при значениях:  $z = 0,5 R$  (1),  $R$  (2),  $1,5 R$  (3),  $2 R$  (4),  $0$  (5),  $0,5 R$  (6),  $R$  (7),  $1,5 R$  (8),  $2 R$  (9) и вертикальной координаты  $z$  (*b, d*) при:  $\rho = 0,5 R$  (1),  $R$  (2),  $1,5 R$  (3),  $2 R$  (4),  $0$  (5).

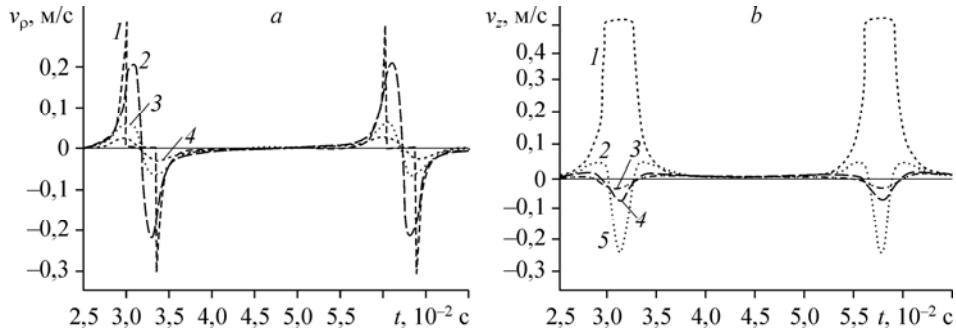


Рис. 4. График колебаний поля скоростей  $v_\rho$  (a) и  $v_z$  (b) в цепочке всплывающих пузырьков при  $z = 0,001$  м при различных значениях горизонтальной координаты: a —  $\rho = 0,5 R$  (1),  $R$  (2),  $1,5 R$  (3),  $2 R$  (4), b —  $\rho = 0$  (1) м,  $0,75 R$  (2),  $R$  (3),  $1,5 R$  (4),  $2 R$  (5).

Из анализа рис. 3 и 4 следует, что при всплывании цепочки пузырьков возникает структура типа бегущей волны, при этом  $v_\rho$  соответствует поперечным возмущениям, а  $v_z$  — продольным. Эти возмущения локализованы в цилиндрических областях — треках размерами в 2–3 радиуса пузырька. Поэтому для группы цепочек пузырьков выделяются зоны, в которых возмущение отсутствуют. В этом смысле в плоскости  $xOy$  поля скоростей образуют структуру типа стоячей волны. Эти особенности поля возмущений необходимо учитывать при вычислении коэффициента трансцилляторного переноса.

Поскольку в цепочке пузырьки расположены с интервалом, равным  $L$ , то зависимость вертикальной составляющей скорости  $v_z$  по оси  $Oz$  также будет периодической с периодом, равным  $L/u$ . Причем профиль скорости движется вдоль оси  $Oz$  со скоростью  $u$ , т. е. представляет собой продольную волну. Полученные выражения (15) являются периодическими функциями времени и могут быть разложены в ряд Фурье. Например,  $\rho$  — компонента вектора скорости может быть определена в виде

$$v_\rho = \sum_{n=0}^{\infty} \{a_n \cos[k \omega t] + b_n \sin[k \omega t]\}, \quad (16)$$

где  $k = 2\pi/L = \omega/u$  — волновое число. Коэффициенты ряда выражаются как

$$a_n = \frac{3R^3 u}{2\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \rho \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{z - ut + mL}{\left(\rho^2 + (z - ut + mL)^2\right)^{5/2}} \cos(n \omega t) dt, \quad (17)$$

$$b_n = \frac{3R^3 u}{2\tau} \int_{-\tau/2}^{\tau/2} \rho \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{z - ut + mL}{\left(\rho^2 + (z - ut + mL)^2\right)^{5/2}} \sin(n \omega t) dt,$$

где  $\tau = 2\pi/\omega = L/u$ ,  $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Первые коэффициенты разложения определяют амплитуду колебаний. Последующими коэффициентами разложения можно пренебречь, так как они часто намного меньше по величине, т. е.  $a_2 \ll a_1$ ,  $b_2 \ll b_1$ .

Для группы всплывающих пузырьков, цепочки которой расположены относительно друг друга на расстояниях  $L_x \gg R$ ,  $L_y \gg R$ , можно считать, что поле одной цепочки пузырьков не влияет на поле скоростей другой (рис. 2). Таким



образом, для группы цепочек также справедливы выражения, получаемые из (15) путем соответствующего сдвига и последующего суммирования.

Итак, при всплывании цепочек пузырьков возникают сложные поля скорости, которые могут быть представлены в виде структур типа бегущей волны при описании трансляторного переноса в горизонтальном направлении и структур типа стоячей волны — в вертикальном.

#### 4. Вычисление горизонтальной составляющей коэффициента трансляторного переноса

Для простоты представим поле горизонтальной координаты скорости  $v_y(z, t)$  вблизи цепочки пузырьков в виде *плоской поперечной монохроматической волны* с частотой  $\omega$  и скоростью распространения  $u$ , равной скорости всплывания пузырьков. В случае пузырьков малых размеров и небольших объемных содержаний газовой фазы вкладом поля скоростей внутри пузырьков можно пренебречь. Для плоской поперечной волны, распространяющейся вдоль оси  $Oz$ , с плоскостью колебаний параллельной оси  $Oy$ , имеем:

$$v_y(z, t) = A\omega \sin(\omega t - kz), \quad v_z = 0, \quad k = \omega/u. \quad (18)$$

Решение задачи теплопроводности

$$a \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{\partial T}{\partial t} = v_y \frac{\partial T}{\partial y} = q(z, y, t), \quad T' = T - T|_{t=0} = 0, \quad (19)$$

где  $q(z, y, t)$  — эквивалентный источник тепла, имеет вид:

$$T' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} q(z', y', t') G(z - z', t - t') dz' dt', \quad (20)$$

а выражение для функции Грина представится как

$$G(z - z', t - t') = -\frac{1}{2\sqrt{\pi a(t - t')}} \exp\left[-\frac{(z - z')^2}{4a(t - t')}\right]. \quad (21)$$

Выражение (20) с учетом (21) приводится к интегральному уравнению

$$T' = \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^t \frac{\partial T}{\partial y} v_y \frac{\exp\left[-\frac{(z - z')^2}{4a(t - t')}\right]}{2\sqrt{\pi a(t - t')}} dz' dt'. \quad (22)$$

Далее для простоты можно считать, что  $y$ -координата градиента температуры содержит преобладающую постоянную составляющую  $\partial T / \partial y \approx \Gamma_y$ , тогда после вычислений интегралов получим

$$T' = \frac{A\omega\Gamma_y}{2i} \left[ \frac{\exp(-ikz) \cdot [\exp(i\omega t) - \exp(-k^2 at)]}{k^2 a + i\omega} - \frac{\exp(ikz) [\exp(-i\omega t) - \exp(-k^2 at)]}{k^2 a - i\omega} \right]. \quad (23)$$

Для достаточно больших времен  $t \gg 1/(k^2 a)$  из (23) имеем

$$T' = \frac{A \omega \Gamma_y \left[ k^2 a \sin(\omega t - kz) - \omega \cos(\omega t - kz) \right]}{k^4 a^2 + \omega^2}. \quad (24)$$

Поток вдоль оси  $Oy$  складывается из диффузионного и конвективного:  $j_y = -\lambda \partial T / \partial y + c \rho v_y T$ , где  $c$  — теплоемкость, а  $\rho$  — плотность среды. Усредним конвективную составляющую потока

$$j_{\text{конв. } y} = c \rho v_y T' = \frac{A^2 \omega^2 \Gamma_y}{k^4 a^2 + \omega^2} \left[ k^2 a \sin^2(\omega t - kz) - \omega \cos(\omega t - kz) \sin(\omega t - kz) \right] \quad (25)$$

по периоду колебаний, что приводит к следующему выражению:

$$\langle j_{\text{конв. } y} \rangle = c \rho A^2 \omega^2 k^2 a \Gamma_y / \left[ 2(k^4 a^2 + \omega^2) \right].$$

Выражение для коэффициента трансилляторного теплопереноса имеет вид

$$\lambda_{\text{тр.}}^r = \frac{\langle j_{\text{конв. } y} \rangle}{\Gamma_y} = \frac{c \rho A^2 \omega^2 k^2 a}{2(k^4 a^2 + \omega^2)} = \frac{c \rho A^2 u^2}{2a(1 + u^4/a^2 \omega^2)}. \quad (26)$$

Результирующий коэффициент переноса вдоль оси  $Oy$  представляется в виде суммы диффузного и трансилляторного коэффициентов  $\lambda_y^r = \lambda + \lambda_{\text{тр.}}^r$ . Трансилляторный перенос возникает за счет диффузионного обмена между слоями среды, участвующими в колебательном относительном перемещении. Он отличается от чисто конвективного, поскольку регулярного переноса среды в этом случае нет.

При малых аналогах числа Маха  $M = A \omega / u$ , что свойственно упругим волнам, разложим (26) в степенной ряд и, удерживая два члена, получим

$$\lambda_{\text{тр.}}^r = c \rho A^2 u^2 / \left[ 2a(1 + u^4/a^2 \omega^2) \right] \approx c \rho a M^2 (1 - a^2 M^2 / A^2 u^2) / 2.$$

Впрочем, при всплывании пузырьков в жидкости величины аналога числа Маха для присоединенных волн, как показывают оценки, могут принимать значения порядка единицы и выше.

Рассмотрим далее случай плоской *немонохроматической волны*, бегущей вдоль оси  $Oz$ . Представив соответствующую координату скорости смещения среды в виде интеграла Фурье, получим

$$v_y(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_y(\omega) \exp \left\{ i \omega \left( t - \frac{z}{u} \right) \right\} d\omega, \quad (27)$$

где  $U_y(\omega)$  — спектральная компонента скорости. Подставив (27) в (22), найдем выражение для поля скаляра  $T'$  в виде

$$T' = \frac{\Gamma_y}{\sqrt{8\pi^2 a}} \int_{-\infty}^{\infty} dz' \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} U_y(\omega) \frac{\exp[i\omega(t' - z'/u)] \cdot \exp[-(z - z')^2 / 4a(t - t')]}{\sqrt{(t - t')}} d\omega. \quad (28)$$

Для достаточно больших времен, т. е. при  $t \gg 1/(k^2 a)$  (28) преобразуется в асимптотическое выражение

$$T' = \frac{\Gamma_y}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} U_y(\omega) \frac{\exp[i\omega(t-z/u)]}{(a\omega^2/u^2 + i\omega)} d\omega. \quad (29)$$

Процедура осреднения конвективного потока в этом случае осуществляется с использованием следующего интеграла:

$$\int_t^{t+\tau} \exp[i(\omega + \omega')t'] dt' = \left\{ \exp[i(\omega + \omega')(t + \tau)] - \exp[i(\omega + \omega')t] \right\} / (i(\omega + \omega')), \quad (30)$$

где  $\tau$  — период осреднения. В результате получим

$$\begin{aligned} \langle j_{\text{конв.}y} \rangle &= \frac{c\rho\Gamma_y}{2\pi i\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_y(\omega') U_y(\omega) \times \\ &\times \frac{\exp[i(\omega + \omega')(t-z/u)] [\exp(i\tau(\omega + \omega')) - 1]}{(a\omega^2/u^2 + i\omega)(\omega + \omega')} d\omega' d\omega. \end{aligned} \quad (31)$$

Выражение (31) позволяет построить искомое спектральное представление коэффициента трансциляторного переноса в волновой зоне:

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{тр.}}^r &= \frac{c\rho}{2\pi i\tau} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U_y(\omega') U_y(\omega) \times \\ &\times \frac{\exp[i(\omega + \omega')(t-z/u)] [\exp(i\tau(\omega + \omega')) - 1]}{(a\omega^2/u^2 + i\omega)(\omega + \omega')} d\omega' d\omega. \end{aligned} \quad (32)$$

Практическое значение этой формулы заключается в возможности вычисления коэффициента переноса, если известны спектральные компоненты поля скорости в волновой зоне. Передаточная функция, согласно (32), может быть определена в виде

$$\kappa(\omega, \omega') = \frac{\exp[i(\omega + \omega')(t-z/u)] [\exp(i\tau(\omega + \omega')) - 1]}{(a\omega^2/u^2 + i\omega)(\omega + \omega')}. \quad (33)$$

Для произвольных периодических колебаний представим поле скорости в виде экспоненциального ряда:

$$U_y(t-z/u) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp[im\omega_0(t-z/u)], \quad (34)$$

где  $C_m = (a_m - ib_m)/2$ ,  $C_{-m} = (a_m + ib_m)/2$ , и, соответственно,  $a_m$  и  $b_m$  — коэффициенты разложения Фурье. Будем полагать, что  $C_0 = 0$ , тогда

$$\begin{aligned} U(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp[im\omega_0 t'] \right) \exp[-i\omega t'] dt' = \\ &= \sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \{ C_m \delta(\omega - m\omega_0) + C_{-m} \delta(\omega + m\omega_0) \} = \sqrt{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} U_m(\omega). \end{aligned} \quad (35)$$

Подстановка (35) в (32) приводит к необходимости вычисления следующих двух интегралов с использованием передаточной функции:

$$I_1^m = \int_{-\infty}^{\infty} U_m(\omega') \kappa(\omega, \omega') d\omega' = \frac{\sqrt{2\pi}}{((a\omega^2/u^2) + i\omega)} \times \\ \times \left\{ C_m \exp[i(\omega + m\omega_0)\omega_0(t - z/u)] \frac{\exp[i(\omega + m\omega_0)\tau - 1]}{(\omega + m\omega_0)} + \right. \\ \left. + C_{-m} \exp[i(\omega - m\omega_0)(t - z/u)] \frac{\exp[i(\omega - m\omega_0)\tau - 1]}{(\omega - m\omega_0)} \right\} \quad (36)$$

и

$$I_2^m = \int_{-\infty}^{\infty} U_m(\omega) I_1^m(\omega) d\omega = \\ = 2\pi \left\{ \frac{(C_m^2 \exp[2im\omega_0(t - z/u)])(\exp[2im\omega_0\tau] - 1)/2m\omega_0 + C_m C_{-m} \tau i}{(a m^2 \omega_0^2 / u^2 + im\omega_0)} + \right. \\ \left. + \frac{-(C_{-m}^2 \exp[-2im\omega_0(t - z/u)])(\exp(-2im\omega_0\tau) - 1)/2m\omega_0 + C_m C_{-m} \tau i}{(a m^2 \omega_0^2 / u^2 - im\omega_0)} \right\}. \quad (37)$$

Выбирая в качестве  $\tau$  основной период функции  $\tau = 2\pi/\omega_0$ , получим

$$\lambda_{\text{тр.}}^r = \frac{c\rho a}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m^2 + b_m^2}{u^2 ((a^2 m^2 \omega_0^2 / u^4) + 1)}. \quad (38)$$

Для заданных коэффициентов Фурье смещений  $A_m$  и  $B_m$  в волновом поле имеем

$$\lambda_{\text{тр.}}^r = \frac{c\rho u^2}{2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(A_m^2 + B_m^2)}{a(1 + u^4/a^2 m^2 \omega_0^2)}. \quad (39)$$

Полученное выражение свидетельствует об аддитивности коэффициента трансцилляторного переноса  $\lambda_{\text{тр.}}^r$  относительно гармоник Фурье. Для монохроматических колебаний  $A_1 = A$  и  $A_m = 0$  (при  $m \neq 1$ ),  $B_m = 0$  из (39) получим выражение, совпадающее с (26). Формула (39) позволяет констатировать, что коэффициент трансцилляторного переноса пропорционален квадрату амплитуды колебаний. При увеличении частоты  $\omega_0$  коэффициент  $\lambda_{\text{тр.}}^r$  монотонно возрастает, стремясь к предельному значению  $\lambda_{\text{тр.},\text{max}}^r = c\rho A^2 u^2 / (2a)$  [9]. Нетрудно убедиться, что осреднение конвективной  $z$ -составляющей потока для поперечной волны, распространяющейся вдоль оси  $Oz$ , дает  $\langle j_{\text{конв. } z} \rangle = 0$ .

Вышеизложенное позволяет констатировать, что коэффициент трансцилляторного переноса, обусловленный распространением эквивалентной поперечной волны в треках, обладает анизотропией. Он отсутствует в направлении всплытия пузырьков

и достигает максимального значения в направлении колебаний. Таким образом, при всплывании пузырьков жидкости возникает дополнительный перенос тепла (транскиляторный). Коэффициент переноса (диффузии, теплопроводности и т. п.), индуцированный присоединенной поперечной волной, получает максимальное приращение в плоскости колебаний. Изотропная среда в волновом поле приобретает анизотропию по отношению к коэффициентам переноса. Транскиляторный перенос обуславливает дополнительную необратимость процессов.

### 5. Транскиляторный перенос тепла в направлении всплывания пузырьков

В уравнении для определения температуры

$$\frac{\partial T}{\partial t} - a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial T}{\partial \rho} \right) = -v_z \frac{\partial T}{\partial z} \quad (40)$$

на достаточно больших расстояниях от цепочки всплывающих пузырьков  $\rho \rightarrow \infty$ , как в теории излучения, вторым слагаемым в левой части можно пренебречь, тогда оно приводится к виду

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_z \frac{\partial T}{\partial z} = a \frac{\partial^2 T}{\partial \rho^2}. \quad (41)$$

Согласно изложенному в п. 3, поле скоростей в горизонтальном направлении представляет периодическую структуру типа стоячей волны. Поэтому в нулевом приближении составляющую скорости запишем в виде  $v_z = 2v_0 \cos(k\rho) \cos(\omega t)$ , где  $k = 2\pi/L_x$ . Задаем поле  $T$ , которое в среднем по времени имеет градиент  $\Gamma$  вдоль оси  $Oz$ .

$$\langle T \rangle = T_0 + \Gamma z. \quad (42)$$

Точное решение (41) отыскивается в виде

$$T(\rho, z, t) = T_0 + \Gamma z + B \cos(k\rho) \cos(\omega t + \varphi). \quad (43)$$

Параметры  $B$  и  $\varphi$  находим подстановкой  $T(\rho, z, t)$  в уравнение. Одновременно убеждаемся в том, что (43) есть точное решение уравнения (41):

$$B = -\frac{2\Gamma v_0}{\sqrt{a^2 k^4 + \omega^2}}, \quad \text{tg } \varphi = -\frac{\omega}{a k^2}. \quad (44)$$

Таким образом, получим решение в следующем виде:

$$T(\rho, z, t) = T_0 + \Gamma z - \frac{2\Gamma v_0}{\sqrt{a^2 k^4 + \omega^2}} \cos(k\rho) \cos(\omega t + \varphi). \quad (45)$$

В невозмущенном решении плотность потока тепла равна

$$j_z = -\lambda (\partial T / \partial z). \quad (46)$$

В точном решении, очевидно, средний по времени поток по-прежнему направлен по оси  $Oz$ . Усредняя полный поток и умножая на осредненную величину градиента температуры, получим выражение для определения эффективного коэффициента теплопроводности. Согласно диссипативной теореме Зельдовича

$$\langle \bar{j}_z \rangle \langle \nabla T \rangle = -\lambda \langle (\nabla T)^2 \rangle = -\lambda_{\text{эфф.}} \langle \nabla T \rangle^2, \quad (47)$$

с использованием соотношений

$$\begin{aligned} \langle \nabla T \rangle &= \Gamma, \quad \langle \nabla T \rangle^2 = \Gamma^2, \\ (\nabla T)^2 &= \Gamma^2 + B^2 k^2 \sin^2(k\rho) \cos^2(\omega t + \varphi), \\ \langle (\nabla T)^2 \rangle &= \Gamma^2 + B^2 k^2 / 4, \end{aligned} \quad (48)$$

найдем величину эффективного коэффициента переноса, содержащего молекулярную и трансцилляторную составляющие:

$$\lambda_{\text{эфф.}}^s = \lambda + \lambda_{\text{тр.}}^s = \lambda \left( 1 + \frac{k^2 v_0^2}{a^2 k^4 + \omega^2} \right). \quad (49)$$

Усреднение значения  $\bar{j}_z$  произведено как по времени, так и по объему, в данном случае по  $z$ . Как видно из формулы (49), эффективный коэффициент трансцилляторного переноса зависит от волнового числа  $k = \omega/u$ , скорости всплытия пузырьков  $v_0$ , молекулярного коэффициента переноса  $a$  и частоты  $\omega$ . Сравнение с формулой (26) показывает, что зависимость  $\lambda_{\text{тр.}}^s$  от  $k$ ,  $v_0$ ,  $a$  и  $\omega$  оказывается аналогичной. Однако величина коэффициента в стоячей волне в два раза меньше, чем в бегущей, поскольку  $v_0 = A\omega/2$ . Как нетрудно убедиться, остальные зависимости для немонахроматических возмущений в стоячей волне получаются теми же, что и для бегущей волны.

Итак, конвективный перенос тепла в поле скоростей всплывающих пузырьков может быть представлен в виде потока, эквивалентного молекулярному. Это является следствием замкнутости потока, поскольку средний конвективный массоперенос за характерный период колебаний равен нулю. Из вышеизложенного следует также, что *конвективный теплоперенос в любых ячейках типа естественной конвекции эквивалентен молекулярному тепловому движению при условии замкнутости потока.*

## 6. Экспериментальная установка и методика проведения эксперимента

Основной блок установки (рис. 5) представляет собой резервуар 3 в виде параллелепипеда из оргстекла с размерами 0,1×0,1×1 м. Газовые пузырьки создаются впрыском газа микрокомпрессорами 5 в нижнюю часть сосуда через керамические распределители 7. Акустические колебания обеспечиваются излучателем звуковых колебаний 6, расположенным в верхней части сосуда. Экспериментальный блок также включает генератор сигналов ГЗ-36 11 и усилитель звуковой частоты 10. Для уменьшения влияния естественной тепловой конвекции на перенос тепла в нижней части сосуда, нагреватель 12 установлен в верхней части емкости. На различных расстояниях от него в установку вмонтированы термопары 4, показания с которых снимаются аналогово-цифровым преобразователем ADAM 4018 + -В (фирма-изготовитель Advantech) 2. От него данные передаются в компьютер 1 для последующей обработки и анализа. Данные верхней термопары передаются специальной программе, которая через реле-регулятор 8 управляет автотрансформатором 9, питающим нагреватель. Тем самым осуществляется поддержание постоянной температуры в верхней части столба жидкости. Для обеспечения постоянства температуры используется реле, которое включает и выключает

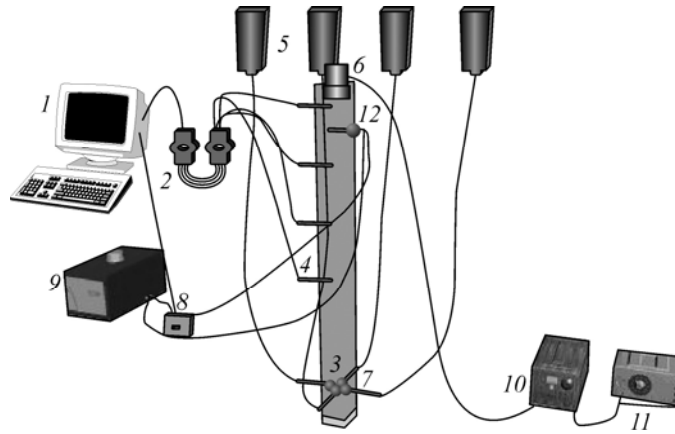


Рис. 5. Схема экспериментальной установки.

питание нагревателя при достижении заданных пределов температур. Это осуществляется при помощи специальной программы, которая через LPT порт подключает и отключает питание нагревателя. Для записи результатов измерений написана программа *Main.exe*. Она сохраняет получаемые данные в файл и посылает сигналы реле-регулятору температуры<sup>1</sup>.

Методика проведения эксперимента и определения коэффициентов трансцилляторной теплопроводности и температуропроводности основана на точном решении задачи о температурном поле в прямоугольном параллелепипеде  $0 < x < d/2$ ,  $0 < y < b/2$ ,  $0 < z < l$ , внутри которого задана начальная температура  $T_0$ , совпадающая с температурой окружающей среды [16]. На боковых стенках учитывается теплообмен по закону Ньютона, на нижней и верхней поверхностях поддерживается температура окружающей среды  $T_0$  и нагревателя  $T_n$  соответственно. Для времени  $t > 0$  температура в резервуаре с исследуемой средой определяется зависимостью

$$T(x, y, z, t) = 16 \left[ \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(\chi_n d/2) \sin(\mu_m b/2) \cos(\chi_n x) \cos(\mu_m y)}{(\chi_n d + \sin(\chi_n d))(\mu_m b + \sin(\mu_m b))} \times \right. \\ \left. \times \frac{\text{sh}(\sqrt{\chi_n^2 + \mu_m^2} (l - z))}{\text{sh}(\sqrt{\chi_n^2 + \mu_m^2} \cdot l)} - \right. \\ \left. - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi k \sin((\pi k/l) z) \exp(-a(\chi_n^2 + \mu_m^2 + (\pi k/l)^2) t)}{(\chi_n^2 + \mu_m^2) l^2 + \pi^2 k^2} \right] (T_n - T_0) + T_0.$$

Уравнения для определения собственных значений  $\chi_n$  и  $\mu_m$  имеют вид:

$$\chi_n \sin(\chi_n d/2) + h \cos(\chi_n d/2) = 0, \quad \mu_m \sin(\mu_m b/2) + h \cos(\mu_m b/2) = 0.$$

Здесь  $\lambda$  — эффективный коэффициент теплопроводности среды в емкости,  $a = \lambda / c\rho$  — эффективный коэффициент температуропроводности,  $\alpha$  — коэффициент теплоотдачи через среду вода–оргстекло–воздух,  $h = \alpha/\lambda$  — параметр теплообмена.

<sup>1</sup> В создании экспериментальной установки принял участие доц. М.Р. Минлибаев.

Указанное выражение использовано при создании программы *Терло.exe*, с помощью которой определяются значения коэффициентов трансцилляторной теплопроводности и температуропроводности. Эта же программа осуществляет построение экспериментальных зависимостей и сопоставление их с теоретическими графиками. В установке реализован сравнительный метод измерения по отношению к эталонной жидкости без конвекции, в качестве которой использована вода.

### 7. Результаты экспериментов

На рис. 6 приведены экспериментальные зависимости температуры от времени для случаев, когда первая термопара находится на поверхности жидкости (I), вторая — на глубине 0,23 м от поверхности воды (II), третья — 0,38 м (III) и четвертая — 0,58 м (IV). Из рис. 6, *a* видно, что температура воды, даже при временах более 10 ч, полностью не устанавливается. Прогрев нижележащих слоев воды в рабочем объеме установки происходит преимущественно за счет молекулярной температуропроводности. Значения коэффициента температуропроводности этой серии экспериментов были получены порядка  $10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$  (коэффициент температуропроводности воды  $a_0 = 1,47 \cdot 10^{-7} \text{ м}^2/\text{с}$  [9]).

Рис. 6, *b-d* иллюстрирует экспериментальные графические зависимости температуры от времени для разных случаев расположения термопар в зависимости от расстояния до поверхности воды и нагревателя. Из рис. 6, *b* видно, что вода на глубине 0,23 м прогревается до температуры 50 °С при наличии всплывающих пузырьков за 16 мин, а при двух и трех включенных компрессорах на глубине 0,38 м (рис. 6, *c*) — за 17 мин, на глубине 0,58 м (рис. 6, *d*) — за 18 мин.

Экспериментально установлено, что радиус пузырьков изменяется в пределах  $0,7 \div 1,4 \text{ мм}$ , средний размер всплывающего пузырька приблизительно равен

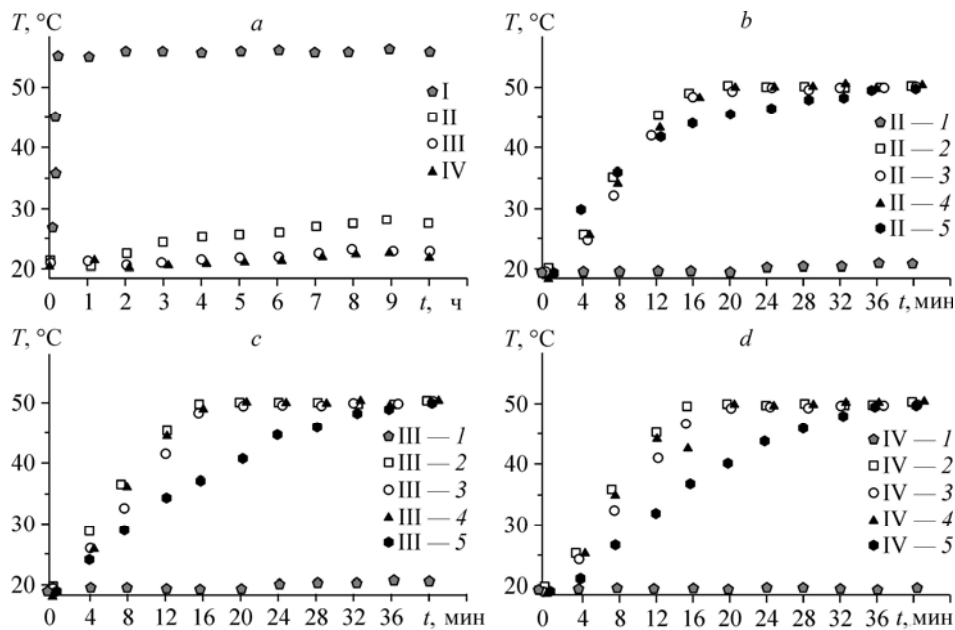


Рис. 6. Экспериментальные графики зависимости температуры от времени на глубине 0 (I), 0,23 (II), 0,38 (III) и 0,58 (IV) м от поверхности воды при следующих условиях.

1 — без компрессоров, с работающими компрессорами: 2 — с одним, 3 — с двумя, 4 — с тремя, 5 — с четырьмя.



$R = 1,0$  мм. Расстояние между всплывающими пузырьками в цепочке принято равным  $L = 29 R$ . Измеренная скорость всплывания пузырьков равна  $u = 0,5$  м/с. Эти данные позволяют определить основную частоту колебания  $\omega = 2\pi u/L \approx 150$  рад/с. Если определить эффективный коэффициент в канале возмущений скорости — треке, соответствующем одной цепочке, то для волнового числа получим  $k = 2\pi/D \approx 3 \cdot 10^3 \text{ м}^{-1}$ , поскольку размер канала приблизительно соответствует диаметру пузырька<sup>2</sup>.

Приведенные данные позволяют оценить возможное увеличение коэффициентов теплопроводности и температуропроводности, обусловленное возмущением скорости, вызванным полями обтекания всплывающих пузырьков. Используя формулу (18), получим  $\lambda_{\text{эфф}}/\lambda = a_{\text{эфф}}/a \sim 100$ . Это означает, что максимально возможное возрастание эффективной теплопроводности, обусловленное трансциляторным переносом за счет структур полей обтекания сферических пузырьков, составляет два порядка. Реальные значения, естественно, будут меньше, поскольку осреднение должно осуществляться не по каналу пузырьков, а по всему объему жидкости.

Между тем, реальное наблюдаемое увеличение теплопроводности в экспериментах может быть оценено согласно приведенным выше экспериментальным данным. Поскольку температуропроводность определяет время установления температуры, а оно составляет 9 ч в среде без пузырьков и 20 мин в жидкости с пузырьками, то, согласно критерию Фурье, коэффициент температуропроводности возрастает в 27 раз. Фактически это означает, что приведенная выше теория, удовлетворительно описывающая экспериментальные данные, ухватывает существо процессов переноса в жидкости с пузырьками. Итак, при всплывании газовых пузырьков возникает трансциляторный перенос, который является преобладающим.

В результате проведенных экспериментов дополнительно установлены количественные закономерности возрастания коэффициентов переноса при всплывании пузырьков и обнаружено, что при акустическом воздействии на жидкость с пузырьками коэффициент температуропроводности возрастает по сравнению со значениями, полученными в экспериментах без звуковых волн. Максимальный коэффициент температуропроводности наблюдался при частоте внешнего акустического воздействия, равной собственной частоте колебаний пульсирующего пузырька, определяемой по формуле Минаерта [8].

### Заключение

На основе развитых теоретических представлений о трансциляторном переносе в жидкости с пузырьками показано, что конвективный перенос тепла в периодических структурах возмущений, вызванных всплыванием пузырьков, эквивалентен молекулярному переносу при условии, что средний за период конвективный перенос массы жидкости отсутствует. Найдены выражения для коэффициента трансциляторного переноса всплывающих пузырьков в радиальных и вертикальных направлениях в предположении, что поля возмущений скорости подобны структурам типа бегущей и стоячей волн.

На основе сопоставления с экспериментом установлено влияние трансциляторного переноса возмущений, обусловленных всплыванием пузырьков. Найдены соотношения размеров тепловых конвективных ячеек, индуцированных движением газовой фазы.

Итак, воздействием на жидкость пузырьков и акустики можно регулировать нагрев жидкости во многих физических процессах, что, несомненно, имеет большую ценность. На основе проведенных исследований явлений переноса в жидкости

<sup>2</sup> А.С. Хисматуллину принадлежат экспериментальные кривые (рис. 6).

со всплывающими газовыми пузырьками могут быть разработаны промышленные установки с регулируемыми коэффициентами диффузии и теплопроводности, а также определены оптимальные режимы работы этих установок с изменяемыми скоростями протекания химических реакций.

### Список обозначений

$A_i$ — $i$ -я составляющая амплитуды колебаний,	$t$ — время, с,
$a$ — коэффициент температуропроводности, $\text{м}^2/\text{с}$ ,	$u$ — скорость всплывания газовых пузырьков, $\text{м}/\text{с}$ ,
$c_w$ — удельная теплоемкость воды, $\text{Дж}/(\text{К}\cdot\text{кг})$ ,	$\vec{v} = (v_x, v_z)$ — поле скоростей в жидкости, $\text{м}/\text{с}$ ,
$G(\rho, \rho', z-z', t-t')$ — функция Грина,	$\alpha$ — коэффициент теплообмена, $\text{с}^{-1}$ ,
$\vec{j}_{\text{конв}}$ — конвективный поток тепла, $\text{Вт}/\text{м}^2$ ,	$\Gamma$ — градиент температуры, $\text{К}/\text{м}$ ,
$L_x, L_y, L$ — расстояние между пузырьками и между цепочками по осям $x, y, z$ соответственно, м,	$\lambda, \lambda_{\text{тр}}$ — коэффициент теплопроводности и трансляторного переноса соответственно, $\text{Вт}/(\text{м}\cdot\text{К})$ ,
$R$ — радиус пузырька, м,	$\rho_w$ — плотность жидкости, $\text{кг}/\text{м}^3$ ,
$T_0, T_n$ — соответственно температура окружающей среды и температура на поверхности резервуара, К,	$\rho_z$ — цилиндрические координаты, м,
	$\tau$ — период колебаний, с,
	$\omega$ — циклическая частота колебаний, $\text{рад}/\text{с}$ .

### Список литературы

1. Вахитов Г.Г., Кузнецов О.Л., Симкин Э.М. Термодинамика призабойной зоны нефтяного пласта. М.: Недра, 1978. 216 с.
2. Ганчев Б.Г., Пересадько В.Г. Процессы гидродинамики и теплообмена в опускных пузырьковых потоках // ИФЖ. 1985. Т. 49, № 2. С. 181–189.
3. Горелик Р.С., Кашинский О.Н., Накоряков В.Е. Теплообмен от стенки к восходящему пузырьковому течению при малых скоростях жидкой фазы // ТВТ. 1989. Т. 27, № 2. С. 300–305.
4. Пахомов М.А., Терехов В.И. Численное моделирование течения и теплопереноса в опускном турбулентном газожидкостном потоке в трубе // ТВТ. 2011. Т. 49, № 5. С. 737–744.
5. Соколов В.Н., Дюманский И.В., Давыдов И.В., Тишин В.Б. Гидравлическое сопротивление и теплообмен при восходящем и нисходящем течениях газожидкостной смеси в вертикальных трубах // Теор. основы хим. технологии. 1971. Т. 5, № 3. С. 394–399.
6. Lahey R.T., Drew R.T. The analysis of two-phase flow and heat transfer using multidimensional, four-field, two-field model // Nuclear Eng. Design. 2001. Vol. 204. P. 29–44.
7. Нигматуллин Р.И., Филиппов А.И., Ахатов И.Ш., Ниязгулов С.А. Уравнения с периодическими коэффициентами и теория хаоса // Статика и динамика упорядоченных сред: межвузовск. науч. сб. Уфа, Башк. ун-т. 1994. С. 81–93.
8. Несис Е.И., Шаталов А.Ф., Кармацкий Н.П. Зависимость коэффициента теплопередачи от амплитуды и частоты вибрации тонкого нагревателя // ИФЖ. 1994. Т. 67, № 1. С. 20–22.
9. Kikuchi J., Ohno J., Takahashi M. Combined forced and free convective heat transfer from a cylinder in crossflow of liquid // Nihonikai gakkai ronbunshu. 1995. Vol. 61, No. 585. P. 1790–1795.
10. Филиппов А.И., Котельников В.А., Минлибаев М.Р. Явление вибропереноса в двухкомпонентных взаимодействующих системах // ИФЖ. 1997. Т. 70, № 3. С. 487–492.
11. Philippov A.I., Kotelnikov V.A., Minlibayev M.R. Some special features of the phenomenon of vibration heat transfer in porous media // High Temperature. 1996. Vol. 34, No. 5. P. 708–713.
12. Филиппов А.И., Филиппов К.А. О диффузии под воздействием звука // Акустический журнал. 1999. Т. 45, № 3. С. 414–417.
13. Marie J.L. Modeling of the skin friction and heat transfer in turbulent two component bubbly flow in pipes // Int. J. Multiphase Flow. 1987. Vol. 13. P. 309–325.
14. Градштейн И.С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. 4-е изд. М.: Изд-во физ.-мат. лит-ра, 1963. 1108 с.
15. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теоретическая физика: уч. пособие в 10 т. 3-е изд. Т. VI: Гидродинамика. М.: Наука, 1986. 736 с.
16. Филиппов А.И., Минлибаев М.Р., Хисматуллин А.С. Установка для исследования коэффициента температуропроводности в жидкости // Новые промышленные технологии. 2010. № 2. С. 62–63.

Статья поступила в редакцию 4 мая 2011 г.,  
после доработки — 18 октября 2011 г.