УДК 539.3

АНТИПЛОСКАЯ ДЕФОРМАЦИЯ ПРИ БОЛЬШИХ ПОВОРОТАХ ЭЛЕМЕНТОВ ТЕЛА

В. Д. Бондарь

Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mail: bond@hydro.nsc.ru

Исследована антиплоская деформация цилиндрического упругого тела при больших поворотах элементов тела в отсутствие объемных сил при задании поверхностной нагрузки. Установлен вид упругого потенциала, допускающего подобную деформацию. Напряжения, деформации и перемещение выражены через давление и две независимые деформации, давление — через линейный инвариант деформации. Для деформаций и перемещения сформулированы нелинейные краевые задачи и указаны условия их эллиптичности. Преобразованием переменных для перемещения получена линейная задача. Приведен пример определения перемещения.

Ключевые слова: перемещение, деформации Альманси, повороты, напряжения Коши, упругий потенциал, нелинейность, краевая задача.

В ряде случаев при деформации тела повороты его элементов могут существенно превышать удлинения и сдвиги. Такая ситуация возникает, в частности, при деформировании гибких тел, а также массивных тел вблизи внешних и внутренних границ. Для подобных случаев в работе [1] получены нелинейные выражения деформаций через перемещения, занимающие промежуточное положение между формулами линейной упругости и общими нелинейными зависимостями. Используя эти выражения, рассмотрим антиплоскую деформацию изотропного цилиндрического тела в отсутствие объемных сил при задании поверхностной нагрузки в рамках нелинейной теории упругости в актуальных переменных x_1, x_2, x_3 ($x_1 = x$, $x_2 = y$ — поперечные координаты, $x_3 = z$ — продольная координата).

Данную модель определяют уравнения равновесия, закон Мурнагана, уравнение неразрывности, представление инвариантов деформации через ее компоненты и компонент через перемещение [2]. Запишем эти соотношения в актуальных переменных.

Выразив градиенты перемещения $\partial_k u_l$ через симметричную e_{kl} и антисимметричную ω_{kl} составляющие:

$$\begin{gathered} \partial_k u_l = e_{kl} + \omega_{kl} \qquad (\partial_k = \partial/\partial x_k), \\ 2e_{kl} = \partial_k u_l + \partial_l u_k, \qquad 2\omega_{kl} = \partial_k u_l - \partial_l u_k \end{gathered} \tag{1}$$

(e_{kl} — компоненты линейного тензора деформации (удлинения и сдвиги); ω_{kl} — компоненты тензора поворотов), запишем формулы Новожилова для деформаций Альманси E_{kl} в виде

$$2E_{kl} = 2e_{kl} - \omega_{km}\omega_{lm} \tag{2}$$

(в правой части равенства (2) содержатся члены одного порядка). В (1), (2) и далее индексы принимают значения 1, 2, 3, по повторяющимся индексам проводится суммирование.

При антиплоской деформации цилиндрического тела (перемещение направлено вдоль тела и не зависит от продольной координаты [3, 4])

$$u_1 = 0, \qquad u_2 = 0, \qquad u_3 = w(x, y).$$

Тогда в соответствии с (1) имеем

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} = e_{12} = 0, \qquad e_{31} = \partial_x w/2, \qquad e_{32} = \partial_y w/2,$$
$$\omega_{11} = \omega_{22} = \omega_{33} = \omega_{12} = 0, \qquad \omega_{31} = -\partial_x w/2, \qquad \omega_{32} = \partial_y w/2$$

и, следовательно, из формул (2) получаем

$$\begin{gathered} E_{11} = -(\partial_x w)^2/8, \qquad E_{22} = -(\partial_y w)^2/8, \qquad E_{33} = ((\partial_x w)^2 + (\partial_y w)^2)/8, \\ E_{12} = -\partial_x w\, \partial_y w/8, \qquad E_{31} = \partial_x w/2, \qquad E_{32} = \partial_y w/2, \qquad E_{kl} = E_{kl}(x, y). \end{gathered} \tag{3}$$

Исключив из (3) перемещение, получим конечные и дифференциальное условия совместности деформаций

$$\begin{gathered} E_{11} = -E_{31}^2/2, \qquad E_{22} = -E_{32}^2/2, \qquad E_{33} = -(E_{31}^2 + E_{32}^2)/2, \qquad E_{12} = -E_{31}E_{32}/2, \\ \frac{\partial E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial E_{31}}{\partial y} = 0. \end{gathered} \tag{4}$$

Из конечных условий деформации выражаются через две независимые компоненты E_{31}, E_{32}, а дифференциальное условие устанавливает дифференциальную связь между ними.

Согласно равенствам $2E_{31} = \partial_x w$, $2E_{32} = \partial_y w$ в (3) независимые деформации определяют перемещение квадратурой

$$w = 2 \int\limits_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (E_{31}\, dx + E_{32}\, dy) + w_0, \qquad w_0 = \text{const}, \tag{5}$$

в которой интеграл согласно (4) не зависит от пути интегрирования, а постоянная является задаваемым перемещением в граничной точке.

На основании (4) базисные инварианты деформации E_k как функции компонент тензора деформаций или функции двух независимых деформаций определяются формулами

$$E_1 = E = E_{kk} = -(E_{31}^2 + E_{32}^2),$$
$$2E_2 = E_{kk}E_{ll} - E_{kl}E_{lk} = -2(E_{31}^2 + E_{32}^2)(1 - (E_{31}^2 + E_{32}^2)/4), \quad E_3 = \det E_{kl} = 0.$$

Отсюда следуют свойства инвариантов

$$4E_2 = E(4 + E), \quad E_3 = 0, \quad 1 - 2E_1 + 4E_2 - 8E_3 = (1 + E)^2, \quad E_k = E_k(x, y), \tag{6}$$

т. е. инварианты постоянны вдоль тела и выражаются через линейный инвариант.

В изотропном теле упругий потенциал U и плотность материала ρ являются функциями базисных инвариантов деформации:

$$U = U(E_1, E_2, E_3), \qquad \rho = \rho_0 (1 - 2E_1 + 4E_2 - 8E_3)^{1/2}$$

(ρ_0 — исходная плотность). При антиплоском деформировании эти величины в силу (6) зависят только от линейного инварианта:

$$U = U(E), \qquad \rho = \rho_0 (1 + E). \tag{7}$$

Отсюда следует, что в модели нелинейности Новожилова тело сжимаемо, в то время как при аналогичной деформации в случае общей геометрической нелинейности оно несжимаемо [5].

Из закона Мурнагана

$$P_{kl} = \frac{\rho}{\rho_0}\, (\delta_{kn} - 2E_{kn})\, \frac{\partial U}{\partial E_{ln}}$$

(δ_{kn} — символ Кронекера), связывающего напряжения Коши P_{kl} и деформации Альманси E_{kl}, с учетом (7) и соотношений

$$E = E_{ln}\delta_{nl}, \qquad \frac{\partial E}{\partial E_{ln}} = \delta_{nl}, \qquad \frac{\partial U}{\partial E_{ln}} = \frac{\partial U}{\partial E}\,\frac{\partial E}{\partial E_{ln}} = U'(E)\delta_{nl}$$

следует, что напряжения являются квазилинейными функциями деформаций, зависящими от поперечных координат:

$$P_{kl}(x,y) = -q(E)(\delta_{kl} - 2E_{kl}). \tag{8}$$

Здесь q — давление, определяемое выражением

$$q(x,y) = -(1+E)U'(E). \tag{9}$$

Используя (4), напряжения (8) можно выразить через давление и независимые деформации:

$$\begin{gathered} P_{11} = -q(1-2E_{11}) = -q(1+E_{31}^2), \qquad P_{12} = 2qE_{12} = -qE_{31}E_{32}, \\ P_{22} = -q(1-2E_{22}) = -q(1+E_{32}^2), \qquad P_{32} = 2qE_{32}, \\ P_{33} = -q(1-2E_{33}) = -q(1+E_{31}^2+E_{32}^2), \qquad P_{31} = 2qE_{31}. \end{gathered} \tag{10}$$

Тем самым определение напряжений (10), деформаций (4) и перемещения (5) сводится к нахождению давления и двух независимых деформаций. Эти величины должны удовлетворять трем уравнениям равновесия и уравнению совместности деформаций. Ниже показано, что эта система совместна: два первых уравнения определяют давление, а два последних — независимые деформации.

Уравнения равновесия в отсутствие сил ($\partial_k P_{kl} = 0$) и уравнение совместности деформаций (4) с учетом формул (10) можно записать в следующем виде:

$$(1+E_{31}^2)\,\frac{\partial q}{\partial x} + E_{31}E_{32}\,\frac{\partial q}{\partial y} + q\Big[E_{31}\Big(\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + \frac{\partial E_{32}}{\partial y}\Big) + E_{31}\,\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + E_{32}\,\frac{\partial E_{31}}{\partial y}\Big] = 0,$$

$$(1+E_{32}^2)\,\frac{\partial q}{\partial y} + E_{32}E_{31}\,\frac{\partial q}{\partial x} + q\Big[E_{32}\Big(\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + \frac{\partial E_{32}}{\partial y}\Big) + E_{32}\,\frac{\partial E_{32}}{\partial y} + E_{31}\,\frac{\partial E_{32}}{\partial x}\Big] = 0,$$

$$2\Big[E_{31}\,\frac{\partial q}{\partial x} + E_{32}\,\frac{\partial q}{\partial y} + q\Big(\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + \frac{\partial E_{32}}{\partial y}\Big)\Big] = 0, \qquad \frac{\partial E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial E_{31}}{\partial y} = 0.$$

Преобразуя первое и второе равенства с учетом четвертого и упрощая соотношения, получим

$$\frac{\partial q}{\partial x} + E_{31}\Big[E_{31}\,\frac{\partial q}{\partial x} + E_{32}\,\frac{\partial q}{\partial y} + q\Big(\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + \frac{\partial E_{32}}{\partial y}\Big)\Big] + \frac{q}{2}\,\frac{\partial}{\partial x}\,(E_{31}^2 + E_{32}^2) = 0; \tag{11}$$

$$\frac{\partial q}{\partial y} + E_{32}\Big[E_{31}\,\frac{\partial q}{\partial x} + E_{32}\,\frac{\partial q}{\partial y} + q\Big(\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + \frac{\partial E_{32}}{\partial y}\Big)\Big] + \frac{q}{2}\,\frac{\partial}{\partial y}\,(E_{31}^2 + E_{32}^2) = 0; \tag{12}$$

$$E_{31}\,\frac{\partial q}{\partial x} + E_{32}\,\frac{\partial q}{\partial y} + q\Big(\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + \frac{\partial E_{32}}{\partial y}\Big) = 0; \tag{13}$$

$$\frac{\partial E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial E_{31}}{\partial y} = 0. \tag{14}$$

В силу (13) и выражения $E = -(E_{31}^2 + E_{32}^2)$ уравнения (11), (12) упрощаются и принимают вид уравнений для определения величины $\ln q - E/2$:

$$\frac{\partial}{\partial x}\Big(\ln q - \frac{1}{2}\,E\Big) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial y}\Big(\ln q - \frac{1}{2}\,E\Big) = 0.$$

В результате интегрирования эти уравнения определяют данную величину (и, следовательно, давление) с точностью до постоянной:

$$\ln q - E/2 = \ln h, \qquad q = h \exp(E/2), \qquad h = \mathrm{const}. \tag{15}$$

Из (9) и (15) следует уравнение для упругого потенциала, определяющее потенциал квадратурой:

$$(1+E)U'(E) = -h\exp(E/2), \quad U = -h\int (1+E)^{-1}\exp(E/2)\,dE + g, \quad g = \mathrm{const}. \tag{16}$$

При малых деформациях ($|E| \ll 1$) линейное приближение для производной потенциала и квадратичное приближение для самого потенциала определяются формулами

$$U' = -h(1 - E/2), \qquad U = h(E^2/4 - E) + g. \tag{17}$$

Таким образом, в рассматриваемой модели антиплоская деформация реализуется только при упругом потенциале (16) (или (17) в случае малых деформаций).

Постоянная h, присутствующая в выражении для упругого потенциала, может быть определена через продольную составляющую P_3 результирующей торцевой нагрузки. Действительно, согласно (10), (16) на торце цилиндра S с нормалью $(0,0,1)$ имеем

$$P_3 = \int\limits_S p_3\,dS = \int\limits_S P_{33}\,dS = -hJ, \qquad J = \int\limits_S \exp(E/2)(1-E)\,dS, \qquad h = -\frac{P_3}{J}.$$

При $|E| \ll 1$ в линейном приближении получаем

$$\exp(E/2)(1-E) = 1 - \frac{E}{2}, \quad J = \frac{S(2-E_*)}{2}, \quad E_* = \frac{1}{S}\int\limits_S E\,dS, \quad h = -\frac{2P_3}{S(2-E_*)},$$

где E_* — среднее значение инварианта в сечении тела.

В системе (13), (14) уравнение (13) запишем в виде

$$\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + \frac{\partial E_{32}}{\partial y} + E_{31}\,\frac{\partial \ln q}{\partial x} + E_{32}\,\frac{\partial \ln q}{\partial y} = 0$$

и с учетом (15) (используя для инварианта выражение $E = -E_{31}^2 - E_{32}^2$) исключим из него давление. Полученное равенство совместно с уравнением (14) образует систему уравнений для независимых деформаций, свободную от упругого потенциала:

$$(1-E_{31}^2)\,\frac{\partial E_{31}}{\partial x} + (1-E_{32}^2)\,\frac{\partial E_{32}}{\partial y} - E_{31}E_{32}\Big(\frac{\partial E_{32}}{\partial x} + \frac{\partial E_{31}}{\partial y}\Big) = 0, \quad \frac{\partial E_{32}}{\partial x} - \frac{\partial E_{31}}{\partial y} = 0. \tag{18}$$

Этим уравнениям соответствует характеристический определитель D [6], являющийся квадратичной формой величин v_1, v_2:

$$D = (1-E_{31}^2)v_1^2 - 2E_{31}E_{32}v_1v_2 + (1-E_{32}^2)v_2^2.$$

При выполнении условий Сильвестра [7]

$$1 - E_{31}^2 > 0, \qquad (1-E_{31}^2)(1-E_{32}^2) - E_{31}^2E_{32}^2 > 0,$$

сводящихся к условию

$$E_{31}^2 + E_{32}^2 < 1, \tag{19}$$

квадратичная форма положительно определена (положителен определитель D). Следовательно, характеристическое уравнение $D = 0$ не имеет вещественных корней. В этом случае система уравнений (18) является системой эллиптического типа и для нее корректна краевая задача с заданными граничными деформациями.

При задании на боковой поверхности цилиндра усилий p_k, постоянных вдоль тела, соотношения $p_k = P_{kl}n_l$ ($(n_l) = (n_1, n_2, 0)$ — внешняя нормаль) с учетом (10) являются для независимых деформаций нелинейной системой уравнений, выполняющихся на контуре L сечения S:

$$p_1 = P_{1l}n_l = -qn_1 + qE_{31}(E_{31}n_1 + E_{32}n_2), \quad p_2 = P_{2l}n_l = -qn_2 + qE_{32}(E_{31}n_1 + E_{32}n_2),$$
$$p_3 = P_{3l}n_l = 2q(E_{31}n_1 + E_{32}n_2) \qquad \text{на} \quad L.$$

Для упрощения этих уравнений представим усилия в естественных осях контура: нормали (n_k), касательной (t_k) и бинормали (b_k). Используя представления ортов естественных осей и вводя величины E_n, E_t, связанные с независимыми деформациями и линейным инвариантом деформаций соотношениями

$$\begin{gathered}(n_k) = (n_1, n_2, 0), \qquad (t_k) = (t_1, t_2, 0) = (-n_2, n_1, 0), \qquad (b_k) = (0, 0, 1),\\ E_n = E_{3k}n_k = E_{31}n_1 + E_{32}n_2, \qquad E_t = E_{3k}t_k = -E_{31}n_2 + E_{32}n_1,\\ E = -E_{31}^2 - E_{32}^2 = -E_n^2 - E_t^2,\\ E_{31} = E_n n_1 - E_t n_2, \qquad E_{32} = E_n n_2 + E_t n_1 \qquad \text{на} \quad L,\end{gathered} \tag{20}$$

естественные компоненты усилий p_n, p_t, p_b запишем в виде

$$p_n = p_k n_k = -q(1 + E_n^2); \tag{21}$$

$$p_t = p_k t_k = -qE_nE_t, \qquad p_b = p_k b_k = 2qE_n \qquad \text{на} \quad L, \tag{22}$$

где согласно (15), (20) давление на границе равно

$$q = h\exp\left(-(E_n^2 + E_t^2)/2\right) \qquad \text{на} \quad L. \tag{23}$$

При этом величины E_t, E_n определяются равенствами (22):

$$E_t = -2p_t/p_b, \qquad E_n \exp\left(-E_n^2/2\right) = p_b \exp\left(2p_t^2/p_b^2\right)/(2h) \qquad \text{на} \quad L, \tag{24}$$

а равенство (21) (после подстановки в него q и E_n из (23), (24)) представляет собой ограничение на нагрузку. При малых деформациях трансцендентное уравнение в (24) упрощается и величины E_t, E_n в линейном приближении определяются в виде

$$E_t = -2p_t/p_b, \qquad E_n = p_b/(2h) \qquad \text{на} \quad L. \tag{25}$$

Таким образом, граничные значения независимых деформаций выражаются формулами (20), в которых величины E_t, E_n определяются усилиями в виде (24) (при малых деформациях — формулами (25)). Уравнения (18) и условия (20) являются краевой задачей для независимых деформаций.

На основе задачи для деформаций можно получить задачу для перемещения. Если использовать равенства в (3), выражающие независимые деформации через перемещение:

$$2E_{31} = w_x, \qquad 2E_{32} = w_y, \tag{26}$$

то в системе (18) второе уравнение будет тождественно удовлетворено, а первое сведется к нелинейному уравнению второго порядка для перемещения

$$(4 - w_x^2)w_{xx} - 2w_xw_yw_{xy} + (4 - w_y^2)w_{yy} = 0. \tag{27}$$

Для этого уравнения условие эллиптичности (19) имеет вид $w_x^2 + w_y^2 < 4$, а граничное перемещение определяется формулой (5) в виде

$$w = \int\limits_{u_0}^{u} \big(E_{31}(u)x'(u) + E_{32}(u)y'(u)\big)\,du + w_0 \qquad \text{на} \quad L$$

(u — параметр).

Нелинейное уравнение для перемещения (27) путем преобразования переменных может быть сведено к линейному уравнению. Положив $s = 2E_{31}$, $t = 2E_{32}$, запишем (26) в виде преобразования Лежандра:

$$s = w_x, \qquad t = w_y, \qquad W = xs + yt - w. \tag{28}$$

Здесь w, W — порождающие функции прямого и обратного преобразований. Это преобразование позволяет перейти от координат физической плоскости (x, y) к координатам плоскости удвоенных независимых деформаций (s, t). При этом в уравнении (27) у функции w первые производные преобразуются в переменные s, t согласно (28), а вторые производные можно выразить через вторые производные функции W. Для этого дифференцированием третьего равенства в (28) по s и t находим формулы обратного преобразования

$$\begin{gathered} W_s = x + sx_s + ty_s - w_s = x + w_x x_s + w_y y_s - w_s = x, \\ W_t = y + sx_t + ty_t - w_t = y + w_x x_t + w_y y_t - w_t = y, \end{gathered} \tag{29}$$

дифференцируя которые по x и y получим две системы линейных уравнений для s_x, t_x и s_y, t_y:

$$\begin{gathered} W_{ss}s_x + W_{st}t_x = 1, \qquad W_{st}s_x + W_{tt}t_x = 0, \\ W_{ss}s_y + W_{st}t_y = 0, \qquad W_{st}s_y + W_{tt}t_y = 1. \end{gathered}$$

Отсюда в предположении, что якобиан G отличен от нуля:

$$G = W_{ss}W_{tt} - W_{st}^2 \neq 0,$$

следуют искомые формулы для вторых производных перемещения

$$w_{xx} = s_x = W_{tt}/G, \qquad w_{xy} = s_y = t_x = -W_{st}/G, \qquad w_{yy} = t_y = W_{ss}/G. \tag{30}$$

Подставляя (28), (30) в уравнение (27), получим линейное дифференциальное уравнение для функции $W(s, t)$

$$(4 - t^2)W_{ss} + 2stW_{st} + (4 - s^2)W_{tt} = 0 \tag{31}$$

с условием эллиптичности в виде $s^2 + t^2 < 4$.

В полярных координатах R, V плоскости деформаций

$$R = \sqrt{s^2 + t^2}, \qquad \operatorname{tg} V = t/s \qquad (s = R\cos V, \quad t = R\sin V)$$

уравнение (31) упрощается. Путем простых вычислений можно показать, что слагаемые в левой части (31) равны

$$\begin{gathered} 4(W_{ss} + W_{tt}) = 4\Big(W_{RR} + \frac{1}{R}\,W_R + \frac{1}{R^2}\,W_{VV}\Big), \\ -(t^2W_{ss} - 2stW_{st} + s^2W_{tt}) = -RW_R - W_{VV}, \end{gathered}$$

следовательно, (31) преобразуется в уравнение

$$4R^2W_{RR} + R(4 - R^2)W_R + (4 - R^2)W_{VV} = 0, \tag{32}$$

условием эллиптичности которого является условие $R < 2$.

В физической плоскости контур L полагается заданным уравнениями $x = x(u)$, $y = y(u)$. На контуре заданы деформации $E_{31} = E_{31}(u)$, $E_{32} = E_{32}(u)$ и, следовательно, величины $s = s(u)$, $t = t(u)$ (определяющие контур в плоскости деформаций), а также смещение (см. (5))

$$w(u) = \int\limits_{u_0}^{u} \big(s(u)x'(u) + t(u)y'(u)\big)\,du + w_0.$$

Тогда в силу (28) на L известна также функция $W(u)$, являющаяся краевым условием для уравнения (32):

$$W = W(u) = x(u)s(u) + y(u)t(u) - w(u) \qquad \text{на} \quad L. \tag{33}$$

Уравнение (32) и условие (33) являются краевой задачей для W в переменных R, V.

Пусть найдено решение $W(R,V)$ данной задачи. Тогда формулы обратного преобразования (28), (29), представленные в переменных R, V:

$$x = W_R \cos V - \frac{1}{R} W_V \sin V, \quad y = W_R \sin V + \frac{1}{R} W_V \cos V, \quad w = RW_R - W, \tag{34}$$

в параметрической форме определяют перемещение в физической плоскости.

Перемещение можно получить и в явной форме как функцию вида $w(x,y)$. Якобиан преобразования от переменных x, y к переменным R, V в силу соотношений (34) допускает представление

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(R,V)} = x_R y_V - x_V y_R = \frac{1}{R} W_{RR}(RW_R + W_{VV}) - \frac{1}{R}\Big(W_{RV} - \frac{1}{R} W_V\Big)^2.$$

Из дифференциального уравнения (32) следует, что

$$RW_R + W_{VV} = -4R^2(4 - R^2)^{-1} W_{RR},$$

поэтому якобиан можно записать в виде

$$\frac{\partial\,(x,y)}{\partial\,(R,V)} = -\frac{1}{R}\Big[\frac{4R^2}{4-R^2} W_{RR}^2 + \Big(W_{RV} - \frac{1}{R} W_V\Big)^2\Big] \qquad (R \neq 0),$$

откуда с учетом условия эллиптичности $4 - R^2 > 0$ следует, что $\partial\,(x,y)/\partial\,(R,V) < 0$. Отличие от нуля якобиана обеспечивает обратимость преобразования, определяемого первым и вторым равенствами в (34), т. е. существование функций $R = R(x,y)$, $V = V(x,y)$. Эти функции позволяют представить перемещение в явном виде $w(R,V) = w(x,y)$. Таким образом, для определения перемещения в физической плоскости достаточно найти решение задачи (32), (33).

Рассмотрим нелинейное уравнение (27) для перемещения в физической плоскости. Это уравнение допускает, в частности, автомодельные решения вида [8]

$$w = xZ(f), \qquad f = y/x, \tag{35}$$

где функция $Z(f)$ определяется из уравнения

$$Z''\big[(1+f^2)Z' - fZ - 2\sqrt{1+f^2}\,\big]\big[(1+f^2)Z' - fZ + 2\sqrt{1+f^2}\,\big] = 0.$$

Это уравнение удовлетворяется при выполнении одного из уравнений

$$Z'' = 0, \quad (1+f^2)Z' - fZ - 2\sqrt{1+f^2} = 0, \quad (1+f^2)Z' - fZ + 2\sqrt{1+f^2} = 0,$$

имеющих соответственно решения

$$Z = A + Bf, \qquad Z = 2\sqrt{1+f^2}\,(A + \operatorname{arctg} f), \qquad Z = 2\sqrt{1+f^2}\,(A - \operatorname{arctg} f),$$

где $A = \mathrm{const}$; $B = \mathrm{const}$.

Согласно (35) данным решениям соответствуют перемещения

$$w = Ax + By = r(A\cos v + B\sin v), \tag{36}$$

$$w = 2\sqrt{x^2+y^2}\,(A + \operatorname{arctg}(y/x)) = 2r(A+v), \quad w = 2\sqrt{x^2+y^2}\,(A - \operatorname{arctg}(y/x)) = 2r(A-v)$$

(r, v — полярные координаты физической плоскости), которые можно использовать для решения ряда задач.

В частности, для кругового цилиндра, сечение S которого ограничено окружностью L радиуса R, последнее решение в (36) определяет поле перемещений с граничным перемещением w_L:

$$w = 2r(w_*/(2R) - v), \qquad w_L = w_* - 2Rv, \qquad A = w_*/(2R). \tag{37}$$

Здесь постоянная A определена перемещением w_* в точке окружности с координатами $r = R$, $v = 0$.

В решении (37), зависящем от полярных координат r, v, перемещение возрастает с увеличением полярного радиуса и убывает с увеличением полярного угла. При этом $w(0) = 0$, $w(R, v) = w_L$. При обходе вокруг начала координат полярный угол изменяется от 0 до 2π, поэтому перемещение является неоднозначной функцией координат. Эту неоднозначность можно интерпретировать следующим образом: цилиндр сначала был разрезан полуплоскостью, проходящей через его ось, затем одна его часть была сдвинута относительно другой в направлении оси цилиндра, после чего вновь склеена. Подобные перемещения точек тела характерны для винтовой дислокации, ось которой совпадает с осью z. Тем самым решение (37) описывает винтовую дислокацию в цилиндре. В отличие от (37) перемещение в винтовой дислокации кругового цилиндра, рассматриваемое в линейной теории упругости [4], не зависит от полярного радиуса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Новожилов В. В.** Теория упругости. Л.: Судпромгиз, 1958.
2. **Снеддон И. Н.** Классическая теория упругости / И. Н. Снеддон, Д. С. Берри. М.: Физматгиз, 1961.
3. **Лурье А. И.** Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980.
4. **Работнов Ю. Н.** Механика деформируемого тела. М.: Наука, 1988.
5. **Бондарь В. Д.** Моделирование нелинейного антиплоского деформирования цилиндрического тела // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 4. С. 98–108.
6. **Петровский Н. Г.** Лекции об уравнениях с частными производными. М.: Физматгиз, 1961.
7. **Корн Г.** Справочник по математике / Г. Корн, Т. Корн. М.: Наука, 1968.
8. **Полянин А. Д.** Нелинейные уравнения математической физики: Справ. / А. Д. Полянин, В. Ф. Зайцев. М.: Физматгиз, 2002.

Поступила в редакцию 4/VII 2006 г.