

УДК 532.5.032

ВЛИЯНИЕ ДИНАМИКИ КОНТАКТНОЙ ЛИНИИ НА КОЛЕБАНИЯ СЖАТОЙ КАПЛИ

А. А. Алабужев, Д. В. Любимов*

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

* Пермский государственный университет, 614990 Пермь

E-mail: alabuzhev@psu.ru, lyubimov@psu.ru

Исследуются собственные и вынужденные колебания деформированной капли невязкой жидкости, окруженной другой жидкостью и ограниченной в осевом направлении твердыми плоскостями. В состоянии равновесия капля представляет собой фигуру вращения и отношение ее радиуса к высоте значительно. Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью отличен от прямого угла. Движение контактной линии учитывается с помощью задания эффективного граничного условия. Показано, что существует три характерных диапазона частот собственных колебаний.

Ключевые слова: динамика контактной линии, собственные и вынужденные колебания.

Введение. При высокочастотном колебательном движении контактной линии влияние вязкости наиболее существенно в тонких пограничных слоях вблизи поверхностей раздела, а движение контактной линии в основном определяется быстроосциллирующим полем давления. Сложные процессы, происходящие вблизи линии контакта, исключаются из рассмотрения с помощью эффективных граничных условий для динамики видимого краевого угла.

Наиболее часто используется условие (в силу его простоты), примененное в работе [1] при изучении затухания стоячих волн между двумя вертикальными стенками. Указанное условие предполагает линейную связь между скоростью движения контактной линии и краевым углом (в случае прямого равновесного краевого угла):

$$\frac{\partial \zeta^*}{\partial t} = \Lambda \mathbf{k} \cdot \nabla \zeta^*. \quad (1)$$

Здесь ζ^* — отклонение поверхности от равновесного положения; Λ — феноменологическая постоянная (постоянная Хокинга); \mathbf{k} — вектор нормали к твердой поверхности. Отметим, что условия фиксированной контактной линии и постоянного краевого угла являются частными случаями граничных условий $\Lambda \rightarrow 0$ и $\Lambda \rightarrow \infty$ соответственно. В [1] показано, что в силу граничного условия (1) колебания жидкости затухают, за исключением случаев $\Lambda \rightarrow 0$ и $\Lambda \rightarrow \infty$. Там же приведены результаты качественного сравнения с экспериментальными данными.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08-01-91959-ННИО_а) и Совета по грантам Президента РФ по государственной поддержке молодых российских ученых (грант № МК-2368.2011.1).

© Алабужев А. А., Любимов Д. В., 2012

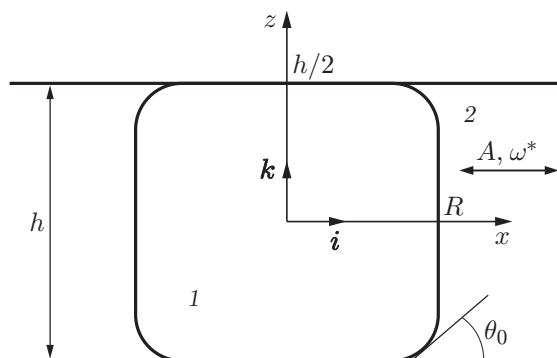


Рис. 1. Геометрия задачи:
 1 — капли; 2 — окружающая жидкость

В работе [2] изучаются собственные колебания полусферической капли на твердой подложке и вынужденные колебания этой капли под действием продольных вибраций. Для учета динамики контактной линии использовалось краевое условие (1). Показано, что собственные колебания затухают вследствие диссипации на контактной линии, при этом отсутствует вырождение уравнений по азимутальному числу. Трансляционная мода существует только при достаточно малом параметре смачивания, т. е. при сильном взаимодействии капли с подложкой. При некотором критическом значении капиллярного параметра частота трансляционной моды становится равной нулю. При больших значениях этого параметра возвращающая сила, действующая на каплю со стороны подложки, недостаточна для возникновения колебательного движения. В этом случае наблюдается затухающее поступательное движение капли по подложке. В случае фиксированного краевого угла капля свободно скользит по подложке и колебания, сопровождающиеся движением центра масс капли, невозможны.

В работе [3] исследуются собственные колебания цилиндрической жидкой капли, окруженной другой жидкостью и ограниченной в осевом направлении твердыми плоскостями. Для описания движения контактной линии используется эффективное граничное условие (1). Найдены зависимости частоты и коэффициента затухания колебаний от капиллярного параметра. Показано, что начиная с некоторого значения капиллярного параметра основная частота трансляционной моды становится равной нулю (см. [2]). В зависимости от такого геометрического параметра, как отношение радиуса к высоте капли, в некотором диапазоне значений капиллярного параметра основные частоты колебаний могут обращаться в нуль.

В данной работе рассматривается поведение капли, зажатой между двумя плоскими пластинами. Равновесный краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой пластиной не равен прямому углу.

Постановка задачи. Рассмотрим колебания капли жидкости плотностью ρ_i^* , окруженной другой жидкостью плотностью ρ_e^* . Здесь и в дальнейшем величины с индексом i соответствуют капле, величины с индексом e — окружающей жидкости. Система ограничена двумя параллельными твердыми плоскостями (рис. 1), расстояние между которыми равно h . Краевой угол между боковой поверхностью капли и твердой поверхностью в равновесии равен θ_0 . Внешний краевой угол отсчитывается от нижней твердой поверхности по направлению к боковой поверхности капли. На систему действует внешняя вибрационная сила с амплитудой колебаний A^* и частотой колебаний капли ω^* , направленная параллельно твердым плоскостям.

Запишем уравнение Эйлера и уравнение неразрывности в системе отсчета, связанной с сосудом (вязкое затухание колебаний не учитывается):

$$\frac{\partial \mathbf{v}^*}{\partial t^*} + \mathbf{v}^* \cdot \nabla \mathbf{v}^* = -\frac{1}{\rho^*} \nabla p^* + A^* \omega^{*2} \mathbf{e}_x \cos \omega^* t^*, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}^* = 0.$$

Здесь \mathbf{e}_x — единичный орт оси x , вдоль которой направлена внешняя вибрационная сила.

Поскольку задача симметрична, удобно ввести цилиндрическую систему координат (r, α, z) . Азимутальный угол α отсчитывается от оси x . Пусть поверхность капли описывается с помощью уравнения

$$r^* = R^*(z) + \zeta^*(\alpha, z, t),$$

где $R^*(z)$ — равновесный радиус капли; ζ^* — отклонение поверхности капли от равновесного положения. На этой поверхности должны выполняться следующие граничные условия:

$$[v_n^*] = 0, \quad \frac{\partial \zeta^*}{\partial t^*} = \mathbf{v}^* \cdot \nabla F^*, \quad [p^*] = -\sigma \operatorname{div} \mathbf{n}.$$

Здесь квадратные скобки обозначают скачок величины на границе между внешней жидкостью и каплей; $F^* = r^* - R^* - \zeta^*$; $\mathbf{n} = \nabla F^* / |\nabla F^*|$ — единичный вектор нормали к поверхности раздела.

На твердых поверхностях $z^* = \pm h/2$ необходимо поставить условия непротекания

$$\mathbf{v}^* \cdot \mathbf{k} = 0.$$

В граничном условии (1), описывающем динамику контактной линии, необходимо учесть равновесную форму капли с краевым углом, отличным от прямого угла, с помощью соотношения

$$\zeta_{t^*}^* = \mp \Lambda (\zeta_{z^*}^* - \zeta_{0z^*}^*).$$

Здесь ζ_0^* — отклонение формы капли от цилиндрической в состоянии равновесия. Краевой угол θ и отклонение поверхности ζ^* связаны соотношением

$$\operatorname{ctg} \theta = \zeta_{z^*}^*.$$

Переменная в нижнем индексе означает производную по этой переменной.

Полагая движение жидкости безвихревым, введем потенциал скорости $\mathbf{v}^* = \nabla \varphi^*$. Выбрав в качестве характерных величин длину $R_0 = R^*(0)$, высоту h , время $\sqrt{\rho_e^* R_0 h^2 / \sigma}$, потенциал скорости $A^* \sqrt{\sigma R_0 / (\rho_e^* h^2)}$, давление $A^* \sigma / h^2$, отклонение поверхности A^* , перейдем к безразмерным переменным и получим следующую задачу:

$$\Delta \varphi = 0, \quad p = -\rho_k (\varphi_t + (1/2) \varepsilon (\nabla \varphi)^2 + \omega^2 r \cos \omega t \cos \alpha), \quad k = i, e, \quad (2)$$

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \alpha} \mathbf{e}_\alpha + b \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z, \quad \Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2};$$

$$r = R + \varepsilon \zeta: \quad [\nabla \varphi \cdot \mathbf{n}] = 0, \quad \zeta_t = \nabla \varphi \cdot \nabla F, \quad \varepsilon [p] = -b^{-2} \operatorname{div} \mathbf{n}; \quad (3)$$

$$z = \mp 1/2: \quad \varphi_z = 0; \quad (4)$$

$$r = R + \varepsilon \zeta, \quad z = \mp 1/2: \quad \zeta_t = \pm \lambda (\zeta_z - \zeta_{0z}), \quad \zeta_{0z} = \operatorname{ctg} \theta_0 \quad (5)$$

(θ_0 — равновесный краевой угол). Краевая задача (2)–(5) содержит следующие безразмерные параметры: малую амплитуду вибраций $\varepsilon = A^*/R_0$, отношение плотностей $\rho = \rho_i^*/\rho_e^*$ ($\rho_i = \rho$, $\rho_e = 1$), частоту вибраций $\omega = \omega^* \sqrt{\rho_e^* R_0 h^2 / \sigma}$, капиллярный параметр $\lambda = \Lambda \sqrt{\rho_e^* R_0 / \sigma}$, отношение характерного радиуса капли к ее высоте (геометрический параметр) $b = R_0/h$.

Равновесная форма. Равновесная форма капли определяется с помощью условия баланса нормальных напряжений в отсутствие движения ($\varphi = 0$)

$$\operatorname{div} \mathbf{n} - c = 0, \quad (6)$$

где c — некоторая константа, с граничными условиями

$$z = \pm 1/2: \quad R_z = \mp b^{-1} \operatorname{ctg} \theta_0, \quad z = 0: \quad R = 1.$$

Поскольку $\mathbf{n} = \nabla(r - R(z))/|\nabla(r - R(z))|$, запишем (6) в виде

$$RR_{zz} + (1 + b^2 R_z^2)(R\sqrt{1 + b^2 R_z^2} - 1) = c. \quad (7)$$

Решением уравнения (7) является выражение

$$z \pm \int_0^{R(z)} \frac{b(c\zeta^2 - 2d)}{\sqrt{4\zeta^2 - (c\zeta^2 - 2d)^2}} d\zeta = 0,$$

где константы d, c определяются с помощью условий

$$d = \frac{R_{eq} + \sin \theta_0}{1 - 2R_{eq}^2} R_{eq}, \quad c = 2 \frac{1 - R_{eq}^2 + R_{eq} \sin \theta_0}{1 - 2R_{eq}^2} R_{eq}$$

(R_{eq} — равновесный радиус капли при $z = 1/2$).

Рассмотрим случай малых расстояний между твердыми плоскостями. Полагая, что $b \gg 1$, т. е. $\beta = b^{-1} \ll 1$, разложим функцию $R(z)$ в ряд по малому параметру β :

$$R(z) = 1 + \beta R^{(1)}(z) + \beta^2 R^{(2)}(z) + \dots$$

(предполагается, что форма поверхности капли незначительно отличается от цилиндрической).

В первом порядке приближения получаем уравнение для нахождения поправки к равновесной форме отклонения

$$R_{zz}^{(1)} + c(1 + R_z^{(1)2})^{3/2} = 0$$

с граничными условиями

$$\begin{aligned} z = \pm 1/2: \quad R_z^{(1)} &= \mp \operatorname{ctg} \theta_0, \\ z = 0: \quad R^{(1)} &= 0, \end{aligned}$$

решением которого является выражение

$$R^{(1)} = -\frac{1}{2 \cos \theta_0} (1 - \sqrt{1 - 4z^2 \cos^2 \theta_0}).$$

Собственные колебания. Изучим собственные колебания рассматриваемой капли в случае малой толщины слоя $\beta \ll 1$. Область течения в капле можно разделить на область, имеющую форму цилиндра с единичным радиусом, и узкую переходную область между цилиндром и окружающей жидкостью. В переходной области потенциал скорости и давление жидкостей могут существенно изменяться в радиальном направлении, вследствие чего появляется необходимость введения “быстрой” радиальной координаты $r_1 = (r - R(z))/\beta$.

Оценим характерные значения частот собственных колебаний сильносжатой капли. В работе [3] рассматривались колебания цилиндрической капли в случае прямого равновесного краевого угла. Как отмечено выше, при $\lambda \rightarrow \infty$ частоты Ω_{mk} собственных колебаний совпадают с частотами свободно скользящей капли ω_{mk} . В качестве примера выберем

частоты четных мод (под четностью мод собственных колебаний понимается четность функций относительно знака вертикальной координаты z):

$$\omega_{mk}^2 = \frac{m^2 - 1 + 4\pi^2 b^2 k^2}{F_{mk}} R_{mkr}^i(1).$$

Здесь $m = 0, 1, 2, \dots$ — азимутальное число; $k = 0, 1, 2, \dots$ — волновое число; $F_{mk} = \rho R_{mk}^i(1) - R_{mkr}^i(1) R_{mk}^e(1) / R_{mkr}^e(1)$; $R_{mkr}^{i,e}(r) = dR_{mk}^{i,e}(r) / dr$ (нижний индекс r обозначает производную по радиусу r); $R_{m0}^i(r) = r^m$; $R_{m0}^e(r) = r^{-m}$; $R_{mk}^i(r) = I_m(2\pi bkr)$ при $k \geq 1$; $R_{mk}^e(r) = K_m(2\pi bkr)$ при $k \geq 1$; I_m, K_m — модифицированные функции Бесселя. Используя асимптотическое разложение функции Бесселя большого аргумента, получим выражение для частот Ω при $\lambda \rightarrow \infty$ в пределе сильносжатой капли

$$\Omega_{mk}^2 = \frac{m^2 - 1 + 4\pi^2 k^2 b^2}{1 + \rho} (m + 2\pi kb). \quad (8)$$

Из (8) следует, что наибольшие значения принимают частоты, пропорциональные b^3 , т. е. наиболее высокие частоты собственных колебаний:

$$\Omega_k^2 = \frac{8\pi^3 k^3 b^3}{1 + \rho}. \quad (9)$$

Отметим, что полученные частоты (9) не зависят от азимутального числа m . Переходя к размерным переменным, получаем

$$\Omega_k^{*2} = \frac{8\pi^3 k^3 \sigma}{(\rho_e^* + \rho_i^*) h^3}. \quad (10)$$

В случае прямого равновесного краевого угла частоты (9), (10) совпадают с частотами капиллярных волн на поверхности жидкости [4]. Для таких волн граница раздела боковая поверхность капли — окружающая жидкость является плоской поверхностью раздела слоя жидкости бесконечной глубины и длиной h . При этом не важна кривизна поверхности, так как радиус капли $R \gg 1$. При равновесном краевом угле, отличном от прямого, значение частоты колебаний капли будет другим, но порядок величины этих колебаний останется прежним (9).

Наименьший масштаб имеют частоты, соответствующие $k = 0$:

$$\Omega_m^2 = \frac{m(m^2 - 1)}{1 + \rho}.$$

Переходя к размерным переменным, получаем выражение для частоты свободно скользящей цилиндрической капли (см., например, [5])

$$\Omega_m^{*2} = \frac{m(m^2 - 1)\sigma}{(\rho_e^* + \rho_i^*) R_0^3}.$$

Собственные функции, соответствующие таким частотам, не зависят от координаты z . Основная частота трансляционной моды ($m = 1, k = 0$) обращается в нуль при конечных значениях капиллярного параметра, поэтому оценить ее масштаб сложнее, чем в предыдущих случаях. Для этой моды необходимо учитывать как инерцию капли, так и явления, происходящие вблизи поверхности раздела. Очевидно, что характерное значение такой частоты должно находиться между высокими и низкими частотами. При сравнении задачи (2)–(5) для $b \gg 1$ с уравнениями для нахождения частот собственных колебаний цилиндрической капли [3] можно предположить, что масштаб основной частоты трансляционной моды равен $\sqrt{\sigma / (\rho_e^* R_0 h^2)}$.

Из приведенных оценок частот следует, что для рассматриваемой задачи существует три характерных диапазона частот собственных колебаний. Наиболее высокие частоты имеют колебания с длиной волны, пропорциональной высоте h . В случае таких колебаний контактная линия неподвижна. Наименьшие значения частот соответствуют колебаниям с длиной волны, пропорциональной радиусу R . В этом случае контактная линия свободно движется вдоль твердых поверхностей. Средними значениями частот обладают колебания, длина волны которых пропорциональна постоянной Хокинга Λ . Такое движение соответствует трансляционной моде колебаний, описывающей перемещение центра масс капли.

Для нахождения собственных частот используются метод малого параметра и метод сращиваемых разложений. Разложим поля потенциала скорости, отклонения поверхности и давления в ряд по степеням малого параметра β :

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \beta\varphi^{(1)} + \dots, \quad \zeta = \zeta^{(0)} + \beta\zeta^{(1)} + \dots, \quad p = p^{(0)} + \beta p^{(1)} + \dots \quad (11)$$

Четные моды. Выше отмечалось, что существует три характерных диапазона значений частот собственных колебаний. Масштаб частоты, используемый при обезразмеривании системы (2)–(5), соответствует масштабу основной частоты трансляционной моды. Рассмотрим средний диапазон, соответствующий данной моде. Подставляя разложения (11) в задачу (2)–(5), без учета внешних вибраций для комплексных амплитуд потенциала, давления и отклонения поверхности в разных областях течения получаем

$$\varphi_{rr}^{(0)} + r^{-1}\varphi_r^{(0)} + r^{-2}\varphi_{\alpha\alpha}^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = -i\Omega\rho\varphi^{(0)}; \quad (12)$$

$$r = 1: \quad [\varphi_r^{(0)}] = 0, \quad i\Omega\zeta^{(0)} = \varphi_r^{(0)}, \quad [p^{(0)}] = 0, \quad (13)$$

где Ω — подлежащая определению частота собственных колебаний. Решение этой задачи можно представить в виде

$$\varphi_{ie}^{(0)} = c_i r e^{i\Omega t} \cos \alpha, \quad \varphi_{ee}^{(0)} = c_e r^{-1} e^{i\Omega t} \cos \alpha, \quad \zeta_e^{(0)} = g e^{i\Omega t} \cos \alpha. \quad (14)$$

В переходной области справедливы уравнения

$$\varphi_{r_1 r_1}^{(0)} + \varphi_{zz}^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = -i\Omega\rho\varphi; \quad (15)$$

$$r_1 = R^{(1)}: \quad [\varphi_{r_1}^{(0)}] - R_z^{(1)}[\varphi_z^{(0)}] = 0, \quad i\Omega\zeta^{(0)} = \varphi_{r_1}^{(0)} - R_z^{(1)}\varphi_z^{(0)}, \quad (16)$$

$$[p^{(0)}] = \zeta_{zz}^{(0)} / (1 + R_z^{(1)2})^{3/2};$$

$$z = \mp 1/2: \quad \varphi_z^{(0)} = 0; \quad (17)$$

$$z = \mp 1/2, \quad r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: \quad i\Omega\zeta^{(0)} = \pm\lambda\zeta_z^{(0)} \quad (18)$$

и решение задачи (15)–(18) имеет вид

$$\varphi_{ii}^{(0)} = \left(c_{0i} + c_{1i}r_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} \exp(2\pi k r_1) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\Omega t} \cos \alpha; \quad (19)$$

$$\varphi_{ei}^{(0)} = \left(c_{0e} + c_{1e}r_1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \exp(-2\pi k r_1) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\Omega t} \cos \alpha; \quad (20)$$

$$\zeta_i^{(0)} = \left(c + dz^2 + \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k} \cos(2\pi k z) \right) e^{i\Omega t} \cos \alpha. \quad (21)$$

Используем метод сращиваемых разложений для объединения решений (14) и (19)–(21). Согласно этому методу разложим решение (14) вблизи поверхности $r = 1 + \beta R^{(1)} + \dots$ и сравним его с решением (19):

$$\varphi_{ie}^{(0)} = c_i r e^{i\Omega t} = c_i (1 + \beta R^{(1)}) e^{i\Omega t}. \quad (22)$$

Из выражений (19), (22) следует, что $c_{0i} = c_i$, $c_{1i} = \beta c_i$. Аналогично $c_{0e} = c_e$, $c_{1e} = -\beta c_e$, $c = g$. Таким образом, можно объединить задачи (12), (13), (15), (18) и решения (14), (19)–(21):

$$\varphi_{rr}^{(0)} + r^{-1} \varphi_r^{(0)} + r^{-2} \varphi_{\alpha\alpha}^{(0)} = 0, \quad \varphi_{r_1 r_1}^{(0)} + \varphi_{zz}^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = -i\Omega \rho \varphi; \quad (23)$$

$$r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: \quad [\varphi_r^{(0)}] + [\varphi_{r_1}^{(0)}] - R_z^{(1)} [\varphi_z^{(0)}] = 0, \quad i\Omega \zeta^{(0)} = \varphi_r^{(0)} + \varphi_{r_1}^{(0)} - R_z^{(1)} \varphi_z^{(0)}; \quad (24)$$

$$[p^{(0)}] = \zeta_{zz}^{(0)} / (1 + R_z^{(1)2})^{3/2}; \quad (25)$$

$$z = \mp 1/2: \quad \varphi_z^{(0)} = 0; \quad (26)$$

$$z = \mp 1/2, \quad r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: \quad i\Omega \zeta^{(0)} = \pm \lambda \zeta_z^{(0)}. \quad (27)$$

Суммарное решение будем искать в виде

$$\varphi_i^{(0)} = i\Omega \left(c_i r + \beta \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} \exp(2\pi k r_1) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\Omega t}; \quad (28)$$

$$\varphi_e^{(0)} = i\Omega \left(c_e r^{-1} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \exp(-2\pi k r_1) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\Omega t}. \quad (29)$$

Согласно условию (25) функцию отклонения поверхности $\zeta^{(0)}$ будем искать в виде

$$\zeta^{(0)} = \left(cz^2 + g + \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k} \cos(2\pi k z) \right) e^{i\Omega t}. \quad (30)$$

Для нахождения коэффициентов c_i , c_e , c_{1k} , c_{2k} , g , c_4 , c_{3k} и собственных чисел задачи Ω использовался обобщенный метод Галеркина. Согласно этому методу решения (28)–(30) подставлялись в граничные условия (24), (25), (27), полученные уравнения проецировались на базисные функции. Отметим, что на границе раздела $r_1 = R^{(1)}(z)$, поэтому все выражения будут зависеть только от координаты z . Подставляя (28), (29) в эти граничные условия, получаем следующую систему уравнений:

$$c_e = -c_i - \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k \left(c_{2k} \exp(-2\pi k R^{(1)}) + c_{1k} \exp(2\pi k R^{(1)}) \right) \cos(2\pi k z) + \\ + R_z^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k \left(c_{2k} \exp(-2\pi k R^{(1)}) - c_{1k} \exp(2\pi k R^{(1)}) \right) \sin(2\pi k z); \quad (31)$$

$$\zeta = \left(c_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} 2\pi k \exp(2\pi k R^{(1)}) \cos(2\pi k z) + \right. \\ \left. + R_z^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} 2\pi k \exp(2\pi k R^{(1)}) \sin(2\pi k z) \right) e^{i\Omega t}; \quad (32)$$

$$\zeta_{zz} = (1 + R_z^{(1)2})^{3/2} \Omega^2 (c_e - \rho c_i) e^{i\Omega t}; \quad (33)$$

$$z = 1/2, \quad r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: \quad i\Omega \zeta = -\lambda \zeta_z. \quad (34)$$

Проинтегрируем уравнение (33) два раза по z . Умножив полученное уравнение и каждое из уравнений (31), (32) на базисные функции и проинтегрировав каждое по высоте жидкой зоны, получим $3n + 1$ независимых алгебраических уравнений для нахождения амплитуд $c_i, c_e, c_{1k}, c_{2k}, g, c_4, c_{3k}$. При реализации метода Галеркина элементы матриц определялись с помощью метода численного интегрирования по схеме, основанной на правиле Гаусса — Кронрода. В результате получалась обобщенная задача на собственные значения. Условие $\det(\Omega) = 0$ позволяет определить собственные числа Ω в зависимости от параметров задачи. Полученное уравнение имеет комплексные решения, что соответствует затуханию колебаний. В случае прямого равновесного краевого угла решение системы (31)–(34) совпадает с решением, приведенным в [3].

На рис. 2, *a, б* представлены зависимости вещественной Ω_{Re} и мнимой Ω_{Im} (декремент затухания) частот комплексной собственной частоты Ω от капиллярного параметра λ при различных значениях равновесного краевого угла. Затухание колебаний обусловлено диссипацией на линии контакта и не обусловлено вязкостью жидкости. Как и в работах [2, 3], для основной частоты трансляционной моды существует характерное значение капиллярного параметра λ_c , такое что $\Omega_{\text{Re}} = 0$ при $\lambda = \lambda_c$ для трансляционной моды (см. рис. 2, *a*). При этом значении появляются две ветви декрементов затухания (см. рис. 2, *б*).

При оценке характерных значений частот собственных колебаний показано, что высоким частотам (9), (10) соответствуют капиллярные волны на поверхности раздела, амплитуды которых не зависят от медленной радиальной координаты. Введем новые масштабы времени $\sqrt{\rho_e^* h^3 / \sigma}$, потенциала скорости $A^* \sqrt{\sigma / (\rho_e^* h^3)}$ и давления $A^* \sigma R_0 / h^3$. В результате изменятся безразмерные параметры задачи: частота вибраций $\omega = \omega^* \sqrt{\rho_e^* h^3 / \sigma}$, капиллярный параметр $\lambda = \Lambda \sqrt{\rho_e^* h^2 / \sigma}$. В случае высоких частот решение для потенциалов будем искать в виде

$$\varphi_i^{(0)} = i\Omega \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} \exp(2\pi k r_1) \cos(2\pi k z) e^{i\Omega t}; \quad (35)$$

$$\varphi_e^{(0)} = i\Omega \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \exp(-2\pi k r_1) \cos(2\pi k z) e^{i\Omega t}. \quad (36)$$

Подставляя решения (35), (36) в (24), (25), (27), получаем следующую систему уравнений для нахождения амплитуд:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k c_{2k} \exp(-2\pi k R^{(1)}) (R_z^{(1)} \sin(2\pi k z) - \cos(2\pi k z)) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k c_{1k} \exp(2\pi k R^{(1)}) (\cos(2\pi k z) + R_z^{(1)} \sin(2\pi k z)), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \zeta_{zz} = \Omega^2 (1 + R_z^{(1)2})^{3/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \exp(-2\pi k R^{(1)}) \cos(2\pi k z) - \right. \\ \left. - \rho \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} \exp(-2\pi k R^{(1)}) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\Omega t}, \end{aligned}$$

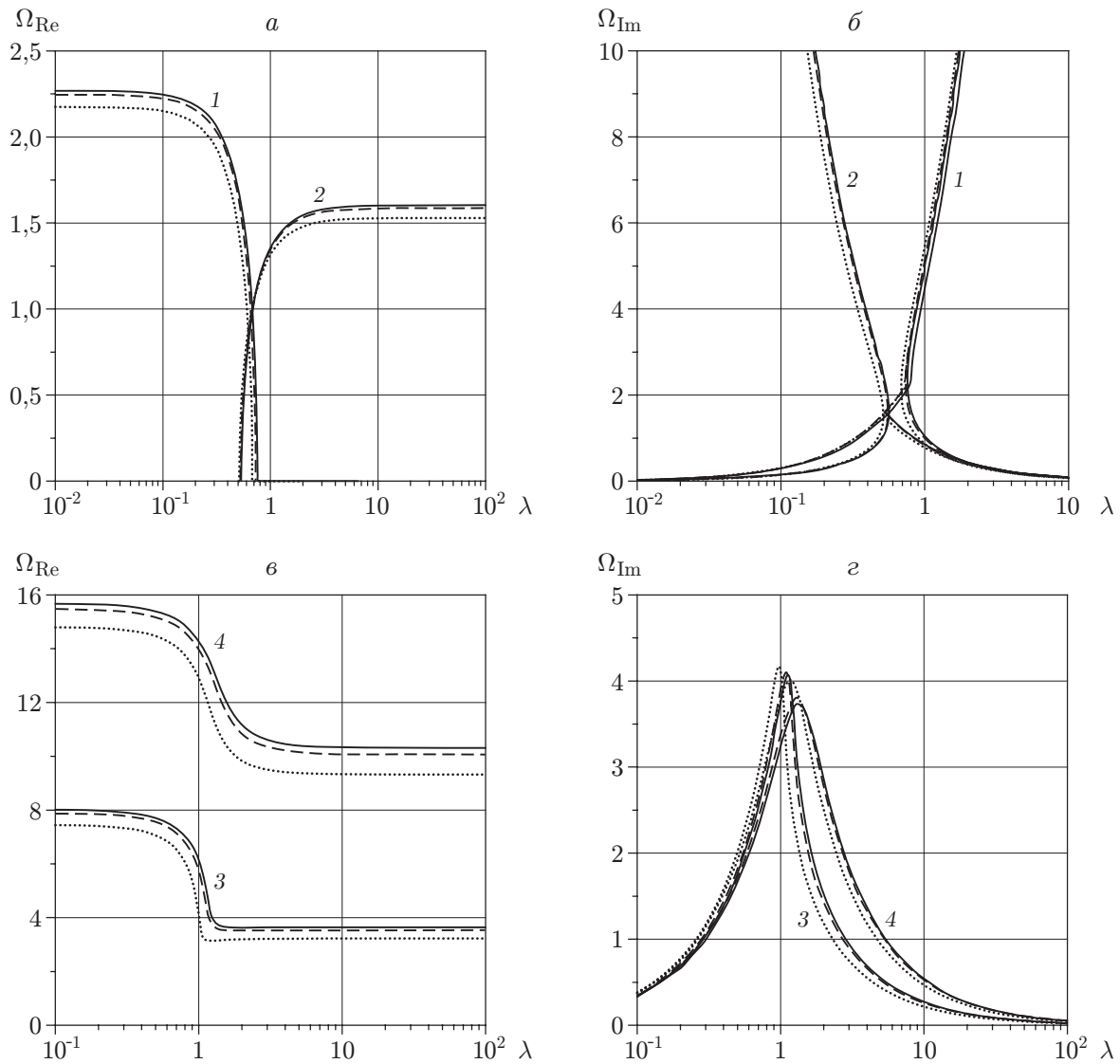


Рис. 2. Зависимости частоты (*a*, *в*) и коэффициента затухания (*б*, *г*) собственных колебаний от капиллярного параметра при различных значениях равновесного краевого угла ($\rho = 1,33$): пунктирная линия — $\theta_0 = 60^\circ$, штриховая — $\theta_0 = 75^\circ$, сплошная — $\theta_0 = 90^\circ$; 1 — основная частота трансляционной моды, 2 — основная частота при $m = 2$, 3 — высокие частоты нечетной моды, 4 — высокие частоты четной моды

$$\zeta = \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k c_{1k} \exp(2\pi k R^{(1)}) (\cos(2\pi k z) + R_z^{(1)} \sin(2\pi k z)) e^{i\Omega t},$$

$$z = 1/2, \quad r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: \quad i\Omega\zeta = -\lambda\zeta_z.$$

Как и в рассмотренном выше случае, решение этой системы будем искать с помощью метода Галеркина. Комплексные частоты Ω при различных значениях равновесного краевого угла показаны на рис. 2, *в*, *г*. В случае прямого равновесного краевого угла решение уравнения для нахождения частот собственных колебаний аналогично решению уравнения в [3].

Низкие частоты колебаний соответствуют движению свободно скользящей капли, которое зависит только от медленной радиальной координаты и не зависит от быстрой радиальной и вертикальной координат. Введем новые масштабы времени $\sqrt{\rho_e^* R_0^3 / \sigma}$, потенциала скорости $A^* \sqrt{\sigma / (\rho_e^* R_0^3)}$ и давления $A^* \sigma R_0 / h^3$. При этом изменятся безразмерные параметры задачи: частота вибраций $\omega = \omega^* \sqrt{\rho_e^* R_0^3 / \sigma}$, капиллярный параметр $\lambda = \Lambda \sqrt{\rho_e^* R_0^3 / (\sigma h^2)}$. Решение задачи будем искать в виде

$$\varphi_i^{(0)} = i\Omega \sum_{m=2}^{\infty} c_{mi} r^m e^{i\Omega t} \cos m\alpha, \quad \varphi_e^{(0)} = i\Omega \sum_{m=2}^{\infty} c_{me} r^{-m} e^{i\Omega t} \cos m\alpha. \quad (37)$$

Подставляя решения (37) в граничные условия (24), (25), (27), получаем систему уравнений для нахождения амплитуд

$$\begin{aligned} c_e &= -c_i, & \zeta &= m c_i e^{i\Omega t} \cos m\alpha; \\ (1 + \rho)(1 + R_z^{(1)2})^{3/2} \Omega^2 c_{mi} e^{i\Omega t} \cos m\alpha &= -\zeta - \zeta_{\alpha\alpha} - b^2 \zeta_{zz}, \\ z &= 1/2, \quad r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: & i\Omega \zeta &= -\lambda \zeta_z. \end{aligned} \quad (38)$$

С учетом условия (38) функцию отклонения поверхности $\zeta^{(0)}$ будем искать в виде

$$\zeta^{(0)} = \left(g + c + c \frac{m^2 - 1}{2b^2} z^2 \right) e^{i\Omega t} \cos m\alpha.$$

Собственными числами системы являются частоты собственных колебаний

$$\Omega = i \frac{m}{\lambda L(1 + \rho)} \pm \frac{\omega_m}{L} \sqrt{L - \frac{\omega_m^2}{\lambda^2(m^2 - 1)}}, \quad (39)$$

где

$$L = \int_{-1/2}^{1/2} (1 + R_z^{(1)2})^{3/2} dz, \quad \omega_m^2 = \frac{m(m^2 - 1)}{1 + \rho}.$$

Зависимость $\Omega(\lambda)$ (39) при $m = 2$ показана на рис. 2, а, б. В случае прямого равновесного краевого угла значения (39) совпадают с результатами [3].

Нечетные моды. Для нечетных мод существуют только высокие частоты. Средние частоты соответствуют основной частоте трансляционной моды, собственная функция которой является четной, а собственные функции, соответствующие низким частотам, не зависят от координаты z , т. е. также являются четными. Подобно решению (28)–(30) для четных мод в данном случае решение задачи для высоких частот запишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi_i^{(0)} &= \left(c_i r + \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} \exp(2\pi k r_1) \sin((2k + 1)\pi z) \right) e^{i\Omega t}, \\ \varphi_e^{(0)} &= \left(c_e r^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} c_{1k} \exp(-2\pi k r_1) \sin((2k + 1)\pi z) \right) e^{i\Omega t}, \\ \zeta^{(0)} &= \left(cz + \sum_{k=0}^{\infty} c_{3k} \sin((2k + 1)\pi z) \right) e^{i\Omega t}. \end{aligned}$$

Проведя аналогичные рассмотренным выше вычисления, найдем частоты Ω . На рис. 2, в, г показаны зависимости частот и коэффициентов затухания колебаний от капиллярного параметра при различных значениях равновесного краевого угла в случае высокочастотных колебаний.

Вынужденные колебания. Трансляционная мода. Рассмотрим вынужденные колебания капли — возбуждение трансляционной моды собственных колебаний. Решение будем искать в виде разложения в ряд по степеням малого параметра β :

$$\varphi = \varphi^{(0)} + \beta\varphi^{(1)} + \dots, \quad \zeta = \zeta^{(0)} + \beta\zeta^{(1)} + \dots, \quad p = p^{(0)} + \beta p^{(1)} + \dots$$

Вынужденные колебания капли с динамической контактной линией описываются с помощью системы уравнений и граничных условий, в главном порядке разложения совпадающей с краевой задачей (23)–(27), за исключением неоднородного слагаемого в уравнении Бернулли (23):

$$\varphi_{rr}^{(0)} + r^{-1}\varphi_r^{(0)} + r^{-2}\varphi_{\alpha\alpha}^{(0)} = 0, \quad \varphi_{r_1r_1}^{(0)} + \varphi_{zz}^{(0)} = 0, \quad p^{(0)} = -i\omega\rho\varphi^{(0)} - \rho\omega^2 e^{i\omega t} \cos \alpha; \quad (40)$$

$$r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: \quad [\varphi_r^{(0)}] + [\varphi_{r_1}^{(0)}] - R_z^{(1)}[\varphi_z^{(0)}] = 0; \quad (41)$$

$$i\omega\zeta^{(0)} = \varphi_r^{(0)} + \varphi_{r_1}^{(0)} - R_z^{(1)}\varphi_z^{(0)}, \quad [p^{(0)}] = \zeta_{zz}^{(0)} / (1 + R_z^{(1)2})^{3/2}; \quad (42)$$

$$z = \mp 1/2: \quad \varphi_z^{(0)} = 0; \quad (43)$$

$$z = \mp 1/2, \quad r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: \quad i\omega\zeta^{(0)} = \pm\lambda\zeta_z^{(0)}. \quad (44)$$

Внешняя сила, заданная в уравнении Бернулли (40), возбуждает трансляционную моду.

Решение данной задачи в случае средних частот будем искать в виде, аналогичном (28)–(30):

$$\varphi_i^{(0)} = i\omega \left(c_0 r + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} \exp(2\pi k r_1) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\omega t} \cos \alpha; \quad (45)$$

$$\varphi_e^{(0)} = i\omega \left(c r^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{2k} \exp(-2\pi k r_1) \cos(2\pi k z) \right) e^{i\omega t} \cos \alpha; \quad (46)$$

$$\zeta^{(0)} = \left(c_4 z^2 + g + \sum_{k=1}^{\infty} c_{3k} \cos(2\pi k z) \right) e^{i\omega t} \cos \alpha.$$

Подставляя решения (45), (46) в исходную систему (40)–(44), получаем систему уравнений для нахождения неизвестных амплитуд

$$c_e = -c_i - \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k (c_{2k} \exp(-2\pi k R^{(1)}) + c_{1k} \exp(2\pi k R^{(1)})) \cos(2\pi k z) + \\ + R_z^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} 2\pi k (c_{2k} \exp(-2\pi k R^{(1)}) - c_{1k} \exp(2\pi k R^{(1)})) \sin(2\pi k z),$$

$$\zeta = \left(c_i + \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} 2\pi k \exp(2\pi k R^{(1)}) \cos(2\pi k z) + \right. \\ \left. + R_z^{(1)} \sum_{k=1}^{\infty} c_{1k} 2\pi k \exp(2\pi k R^{(1)}) \sin(2\pi k z) \right) e^{i\omega t} \cos \alpha,$$

$$\zeta_{zz} = (1 + R_z^{(1)2})^{3/2} \omega^2 (c_e - \rho c_i - \rho + 1) e^{i\omega t} \cos \alpha,$$

$$z = 1/2, \quad r = 1, \quad r_1 = R^{(1)}: \quad i\omega\zeta = -\lambda\zeta_z.$$

Для нахождения амплитуд c , c_0 , c_{1k} , c_{2k} , g , c_4 , c_{3k} , как и в случае собственных колебаний, использовалась обобщенная процедура Галеркина.

На рис. 3 приведена зависимость амплитуды колебаний поверхности от частоты вынуждающей силы при различных значениях капиллярного параметра. В предельном случае $\lambda = 0$ амплитуда колебаний капли на собственной частоте бесконечна. При конечных

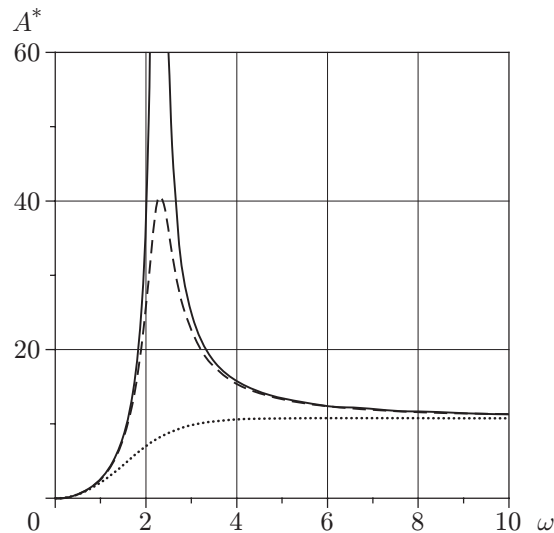


Рис. 3. Зависимость амплитуды колебаний поверхности капли от частоты внешней силы при $\theta_0 = 90^\circ$, $\rho = 1,33$:

сплошная линия — $\lambda = 0$, штриховая — $\lambda = 0,1$, пунктирная — $\lambda = 0,5$

значениях капиллярного параметра амплитуда колебаний ограничена вследствие диссипации, имеющей место при движении контактной линии (см. [1]).

Заключение. Рассмотрены собственные и вынужденные колебания сильносжатой капли. Установлено, что существует три характерных масштаба частот собственных колебаний. Высокие частоты не зависят от азимутального числа и в случае прямого равновесного краевого угла соответствуют частотам капиллярных волн на поверхности жидкости. Низкие частоты не зависят от волнового числа и при больших значениях капиллярного параметра совпадают с основными частотами собственных колебаний цилиндрической капли. Промежуточный характерный масштаб значений частот соответствует основной частоте трансляционной моды собственных колебаний.

Обнаружено, что при конечных значениях капиллярного параметра движение линии контакта сред обуславливает затухание свободных колебаний. Влияние диссипации приводит к ограничению максимальной амплитуды колебаний в резонансе, а также к сдвигу резонансной частоты. Наибольшая амплитуда вынужденных колебаний достигается в случае прямого равновесного краевого угла.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Hocking L. M.** The damping of capillary-gravity waves at a rigid boundary // *J. Fluid Mech.* 1987. V. 179. P. 253–266.
2. **Любимов Д. В., Любимова Т. П., Шкляев С. В.** Неосесимметричные колебания полусферической капли // *Изв. РАН. Механика жидкости и газа.* 2004. № 6. С. 8–20.
3. **Алабужев А. А., Любимов Д. В.** Влияние динамики контактной линии на собственные колебания цилиндрической капли // *ПМТФ.* 2007. Т. 48, № 5. С. 78–86.
4. **Ландау Л. Д.** Курс теоретической физики. Т. 6. Гидродинамика / Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. М.: Наука, 1986.
5. **Ламб Г.** Гидродинамика. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1947.

Поступила в редакцию 21/II 2011 г.