*Теплофизика и аэромеханика, 2008, том 15, № 2*

## *КРАТКОЕ СООБЩЕНИЕ*

УДК 532.516, 532.582

# Вращательные колебания твердого цилиндра и вязкой жидкости

**А.А. Гулидова[1], В.Л. Сенницкий[2]**

[1]*Новосибирский государственный университет*

[2]*Институт гидродинамики им. М.А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск*

Найдено новое точное решение задачи для уравнений движения твердого тела и окружающей его вязкой жидкости.

### ВВЕДЕНИЕ

Задачи о движении гидромеханических систем, состоящих из жидкости и твердого тела (или тел), могут быть причислены к относительно более простым, либо к относительно более сложным в зависимости от того, является ли движение тела (или тел) заданным, либо неизвестным, подлежащим определению.

В работах [1–3] представлены решения задач о течении вязкой жидкости вокруг бесконечно длинного кругового цилиндра, шара, вращающихся заданным образом.

В работе [4] дана постановка и получено решение задачи о движении бесконечно длинного кругового цилиндра и окружающей его вязкой жидкости, происходящем из состояния покоя ввиду того, что к каждой единичной части цилиндра относительно его оси приложен заданный не изменяющийся со временем момент внешних сил.

### ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Настоящая работа посвящена изучению следующей задачи.

Имеется гидромеханическая система, состоящая из вязкой несжимаемой жидкости и абсолютно твердого тела — бесконечно длинного кругового цилиндра радиуса $A$, ось которого лежит на оси $Z$ инерциальной прямоугольной системы координат $X, Y, Z$. Жидкость занимает область пространства $O$ вне цилиндра:

$$A < R < \infty, \quad -\infty < Z < +\infty,$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$. Гидромеханическая система подвергается колебательным воздействиям; к каждой единичной части цилиндра (части цилиндра, заключенной между перпендикулярными к оси $Z$ плоскостями, отстоящими друг от друга на единичном расстоянии) относительно оси $Z$ приложен заданный периодически с периодом $T$ изменяющийся со временем $t$ момент внешних сил

$$\mathrm{M}_в = \mathrm{Real}\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{M}_n e^{2n\pi i\frac{t}{T}},$$

где $\mathrm{M}_n$ — постоянные. Вследствие этого цилиндр и жидкость движутся (совершают вынужденное движение). Цилиндр вращается вокруг оси $Z$. На бесконечности (от цилиндра) жидкость покоится; в области $O$ течение жидкости является симметричным относительно оси $Z$, плоским (плоскости течения перпендикулярны к оси $Z$), не зависящим от начальных условий.(*) Требуется установить, как движутся цилиндр и жидкость.

Пусть $\tau = t/T$, $x = X/A$, $y = Y/A$, $r = R/A$, $\theta$ — угол между векторами $\{1,\ 0,\ 0\}$ и $\{x,\ y,\ 0\}$, $\mathbf{e}_\theta$ — единичный вектор, направление которого совпадает с направлением возрастания $\theta$, $\mathbf{V}$ — скорость жидкости, $\mathbf{v} = T\mathbf{V}/A$, $v = \mathbf{v}\mathbf{e}_\theta$, $\rho$ — плотность жидкости, $P$ — давление в жидкости, $p = T^2P/(\rho A^2)$, $\nu$ — кинематический коэффициент вязкости жидкости, $\mathrm{Re} = A^2/(\nu T)$ — число Рейнольдса, $I$ — момент инерции единичной части цилиндра относительно оси $Z$, $\Omega$ — угловая скорость вращения цилиндра вокруг оси $Z$, $\omega = \Omega T$, $\hat{M}$ — наибольшее значение $|M_в|$, $\eta = I/(\hat{M}T^2)$, $\xi = \hat{M}T^2/(\rho A^4)$, $m_в = M_в/\hat{M}$, $M_ж$ — момент сил, действующий на единичную часть цилиндра относительно оси $Z$ со стороны жидкости,

$$m_ж = \frac{M_ж}{\hat{M}} = \frac{2\pi}{\xi \mathrm{Re}}\left(\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}\right)\bigg|_{r=1}.$$

Уравнение движения цилиндра (единичной части цилиндра), уравнения Навье–Стокса и неразрывности и условия, которые должны выполняться при $r = 1$ и $r \to \infty$, имеют вид

$$\eta\frac{d\omega}{d\tau} = m_в + m_ж, \tag{1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \tau} + (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v} = -\nabla p + \frac{1}{\mathrm{Re}}\Delta\mathbf{v}, \tag{2}$$

$$\nabla\cdot\mathbf{v} = 0, \tag{3}$$

$$\mathbf{v} = \omega\,\mathbf{e}_\theta \quad \text{при} \quad r = 1, \tag{4}$$

$$\mathbf{v} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty. \tag{5}$$

## РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Из (3), (4) следует, что

$$\mathbf{v} = v\,\mathbf{e}_\theta. \tag{6}$$

В соответствии с (2), (4)–(6),

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} - \frac{1}{\mathrm{Re}}\left(\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{\mathrm{r}}\frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r^2}\right) = 0, \tag{7}$$

(*) Подход к изучению задач о движении гидромеханических систем, в которых присутствует вязкая жидкость, основанный на рассмотрении не зависящих от начальных условий течений вязкой жидкости, реализован, в частности, в работах [5, 6], где теоретически найдены эффекты среднего движения включения в колеблющейся жидкости, существование которых установлено экспериментально в [7, 8].

$$v = \omega \qquad \text{при} \quad r = 1, \tag{8}$$

$$v \to 0 \qquad \text{при} \quad r \to \infty, \tag{9}$$

$$\frac{\partial p}{\partial r} - \frac{v^2}{r} = 0. \tag{10}$$

Уравнение (7) имеет решение

$$v = \mathrm{Real}\sum_{n=1}^{\infty}[a_n I_1(q_n r) + b_n \mathrm{K}_1(q_n r)]e^{2n\pi i\tau}, \tag{11}$$

где $a_n$, $b_n$ — постоянные, $q_n = (1+i)\sqrt{n\pi\mathrm{Re}}$, $I_1(q_n r)$, $K_1(q_n r)$ — модифицированные функции Бесселя.

Согласно (1), (6), (8)–(11),

$$\omega = -\frac{\xi\mathrm{Re}}{2\pi}\mathrm{Real}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n K_1(q_n)}{Q_n}\ \mathrm{e}^{2n\pi i\tau}, \tag{12}$$

$$\mathbf{v} = -\frac{\xi\mathrm{Re}}{2\pi}\mathrm{Real}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n K_1(q_n r)}{Q_n}\ e^{2n\pi i\tau}\,\mathbf{e}_\theta, \tag{13}$$

$$p = -\int_r^{\infty}\frac{\mathbf{v}^2}{r}\mathrm{dr} + p_\infty. \tag{14}$$

Здесь $p_\infty$ — функция $\tau$,

$$Q_n = q_n K_1'(q_n) - (1 + \frac{\eta\xi q_n^2}{2\pi})K_1(q_n)$$

($Q_n \neq 0$ при $0 < \mathrm{Re} < \infty$, см. [9]).

Соотношениями (12)–(14) определяется точное решение задачи (1)–(5).

## АСИМПТОТИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

Из (12), в частности, следует, что

а) при $\mathrm{Re} \to 0$ и постоянных $\eta$, $\xi$

$$\omega \sim \frac{\xi\mathrm{Re}m_{\text{в}}}{4\pi},$$

б) при $\mathrm{Re} \to \infty$ и постоянных $\eta$, $\xi$

$$\omega \sim \frac{\xi}{4}\sqrt{\frac{\mathrm{Re}}{\pi^3}}\ \mathrm{Imag}\sum_{n=1}^{\infty}(1+i)\frac{m_n}{\sqrt{n}}e^{2n\pi i\tau}, \quad \text{если} \quad \eta = 0,$$

$$\omega \sim \frac{1}{2\pi\eta}\mathrm{Imag}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m_n}{n}\ e^{2n\pi i\tau}, \quad \text{если} \quad \eta \neq 0.$$

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рассмотренной задаче жидкость совершает вращательные колебания, является неоднородно колеблющейся [10]. Известно (см., например, [10] и упоминаемые там работы), что движение включений (твердых тел, газовых пузырей) в колеблющейся жидкости способно носить весьма необычный характер, быть парадоксальным. Изучение движения включений в жидкости, совершающей вращательные колебания (такие, как те, что даются найденным решением или аналогичные им), ранее не производилось; его осуществление может привести к обнаружению новых гидромеханических эффектов, в том числе представляющих интерес в связи с проблемой управления гидромеханическими системами.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ


1. **Слезкин Н.А.** Динамика вязкой несжимаемой жидкости. — М.: ГИТТЛ, 1955. — 519 с.
2. **Mallick D. D.** Nonuniform rotation of an infinite circular cylinder in an infinite viscous liquid // ZAMM. — 1957. — Bd 37, No. 9/10.
3. **Кочин Н.Е., Кибель И.А., Розе Н.В.** Теоретическая гидромеханика. Ч. 2. — М.: ГИФ-МЛ, 1963. — 727 с.
4. **Сенницкий В.Л.** Нестационарное вращение цилиндра в вязкой жидкости // ПМТФ. — 1980. — № 3. — С. 66–69.
5. **Сенницкий В.Л.** О движении газового пузыря в вязкой вибрирующей жидкости // ПМТФ. — 1988. — № 6. — С. 107–113.
6. **Сенницкий В.Л.** О движении пульсирующего твердого тела в вязкой колеблющейся жидкости // ПМТФ. — 2001. — Т. 42, № 1. — С. 82–86.
7. **Сенницкий В.Л.** Преимущественно однонаправленное движение газового пузыря в вибрирующей жидкости // Докл. АН СССР. — 1991. — Т. 319, № 1. — С. 117–119.
8. **Сенницкий В.Л.** Преимущественно однонаправленное движение сжимаемого твердого тела в вибрирующей жидкости // ПМТФ. — 1993. — № 1. — С. 100–101.
9. **Erdélyi A., Kermack W.O.** Note on the equation $f(z)K'_n - g(z)K_n(z) = 0$ // Proc. Cambr. Phil. Soc. — 1945. — Vol. 41, pt. 1.
10. **Сенницкий В.Л.** О движении включения в однородно и неоднородно колеблющейся жидкости // ПМТФ. — 2007. — Т. 48, № 1. — С. 79–85.


*Статья поступила в редакцию 9 ноября 2007 г.*