

УДК 519.63

МОДИФИЦИРОВАННЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ МЕЛКОЙ ВОДЫ, ДОПУСКАЮЩИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПРЕРЫВНЫХ ВОЛН ПО СУХОМУ РУСЛУ

В. В. Остапенко

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: ostapenko_vv@ngs.ru

Предложен метод, позволяющий в рамках первого приближения теории мелкой воды моделировать процесс распространения прерывных волн по сухому руслу. В основе этого метода лежит модифицированный закон сохранения полного импульса, в котором учитываются сосредоточенные потери импульса, обусловленные образованием локальных турбулентно-вихревых структур в поверхностном слое жидкости на фронте прерывной волны. Количественная оценка таких потерь получена путем вывода уравнений мелкой воды из уравнений Навье — Стокса с учетом вязкости, влияние которой в областях турбулентного течения, описываемых прерывными волнами, резко возрастает. Исследована устойчивость прерывных волн, допускаемых модифицированной системой законов сохранения теории мелкой воды. В качестве примера проведен сравнительный анализ решений задачи о разрушении плотины, получаемых по классической и модифицированной моделям мелкой воды.

Ключевые слова: уравнения мелкой воды, прерывные волны, модифицированный закон сохранения полного импульса, задача о разрушении плотины.

Введение. Уравнения первого приближения теории мелкой воды [1–5] широко применяются при моделировании процесса распространения прерывных волн [6–8] (гидравлических боров [9–11]), возникающих при полном или частичном разрушении плотины гидросооружения либо при выходе крупных морских волн типа цунами [12] на мелководье. Как известно, классическая система базисных законов сохранения теории мелкой воды, состоящая из законов сохранения массы и полного импульса [3–5], правильно передавая параметры прерывных волн, распространяющихся по жидкости конечной глубины [1], не допускает распространения прерывных волн по сухому руслу. Точные решения, описывающие в рамках этой системы течение воды по сухому руслу, являются непрерывными волнами понижения (простейший пример такой волны, возникающей при разрушении плотины над горизонтальным дном, впервые построен в работе [13]). Учет донного трения, которое представляет собой распределенный источниковый член, не дающий вклада в условия Гюгонио на фронте прерывной волны, не может изменить эту ситуацию [14–17]. В то же время многочисленные лабораторные эксперименты показали, что данные непрерывные решения существенно завышают скорость распространения передней кромки волны и искажают профиль ее поверхности [18–23]. В опытах фронт волны, распространяющейся по сухому руслу, является существенно более крутым и на нем происходят обрушения, характерные для прерывных волн.

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента Российской Федерации для государственной поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-5873.2006.1), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07-01-00609) и в рамках Проекта фундаментальных исследований Президиума РАН № 16.2.

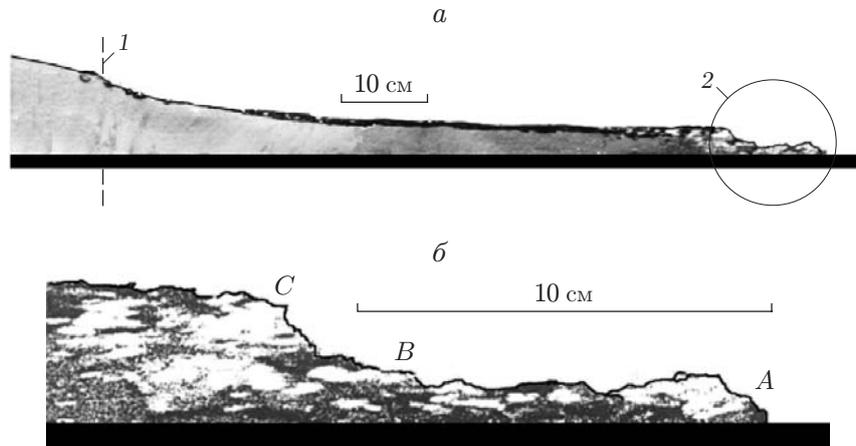


Рис. 1. Волна, образующаяся при лабораторном моделировании задачи о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе:
a — общий вид (*1* — положение плоского щита, задающего начальный перепад уровней, *2* — головная часть волны); *б* — головная часть волны (*AB* — тонкий слой, *BC* — гидравлический прыжок)

На рис. 1, *a* приведена фотография волны, полученной при лабораторном моделировании задачи о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе. Волновое течение возникло в результате внезапного удаления плоского щита, ограничивающего неподвижную жидкость в верхнем бьефе (подробное описание результатов эксперимента приведено в [21, 23]). Из результатов экспериментов следует, что в процессе движения профиль головной части волны (рис. 1, *б*) является пульсирующим и квазистационарным. Гидравлический прыжок *BC*, набегая на распространяющийся перед ним тонкий слой воды *AB*, постепенно поглощает некоторую его часть. При этом крутизна переднего фронта прыжка *BC* уменьшается, в результате чего прыжок почти полностью вырождается и профиль свободной поверхности в головной части волны становится достаточно пологим. Затем происходит обратный процесс: профиль свободной поверхности в головной части волны на некотором расстоянии от ее кромки постепенно становится более крутым, что приводит к формированию нового гидравлического прыжка вида *BC*. В то же время полоса воды *AB* перед его фронтом удлиняется и становится более тонкой. В результате профиль передней части волны принимает первоначальный вид (рис. 1, *б*). Далее этот процесс периодически повторяется.

В настоящей работе описанный выше процесс течения по сухому руслу головной части волны моделируется в рамках первого приближения теории мелкой воды как прерывная волна, распространяющаяся по сухому руслу. В основе такого моделирования лежит модифицированный закон сохранения полного импульса, в котором учитываются сосредоточенные потери импульса, обусловленные образованием локальных турбулентно-вихревых структур на фронтах прерывных волн. Количественная оценка таких потерь получена путем вывода уравнений мелкой воды из уравнений Навье — Стокса с учетом вязкости, влияние которой в областях турбулентного течения, описываемых прерывными волнами, резко возрастает. Появляющийся при этом эвристический параметр подбирается путем согласования с результатами лабораторных экспериментов [21–23]. Исследована устойчивость прерывных волн, допускаемых модифицированной системой законов сохранения теории мелкой воды. В качестве примера проведен сравнительный анализ решений задачи о разрушении плотины, полученных по классической и модифицированной моделям мелкой воды. Анализ показал, что по сравнению с классической моделью модифицированная

модель позволяет со значительно более высокой точностью воспроизводить осредненные параметры полученной в эксперименте волны, распространяющейся по сухому руслу. В то же время для детального описания пульсирующих квазистационарных процессов, наблюдаемых в головной части такой волны, необходимо использовать модели более высокого уровня.

1. Базисные законы сохранения теории мелкой воды. В случае прямоугольного горизонтального русла постоянной ширины без учета влияния донного трения система базисных законов сохранения теории мелкой воды [1–5] имеет вид

$$h_t + q_x = 0; \quad (1.1)$$

$$q_t + (qu + gh^2/2)_x = 0, \quad (1.2)$$

где $h(x, t)$, $q(x, t)$, $u = q/h$ — глубина, расход и скорость потока; g — ускорение свободного падения. Уравнения (1.1) и (1.2) представляют собой дифференциальные формы записи физических законов сохранения массы и полного импульса [5]. Из уравнений (1.1) и (1.2) получим условия Гюгонио на фронте прерывной волны

$$D[h] = [q]; \quad (1.3)$$

$$D[q] = [qu + gh^2/2], \quad (1.4)$$

где $D = x_t$ — скорость распространения волны; $[f] = f_1 - f_0$ — скачок функции f на фронте волны $x = x(t)$:

$$f_0 = f(x(t) + 0, t), \quad f_1 = f(x(t) - 0, t).$$

Для среднего значения функции f на фронте прерывной волны введем обозначение

$$\langle f \rangle = (f_0 + f_1)/2. \quad (1.5)$$

Тогда из условия Гюгонио (1.3) для закона сохранения массы (1.1) имеем

$$D - \langle u \rangle = [q]/[h] - \langle u \rangle = \langle h \rangle [u]/[h]. \quad (1.6)$$

Поскольку с учетом (1.5) и (1.6)

$$D[q] - [qu] = (D - \langle u \rangle)[q] - \langle q \rangle [u] = (\langle h \rangle [q] - \langle q \rangle [h])[u]/[h] = (h_0 q_1 - h_1 q_0)[u]/[h],$$

из условия Гюгонио (1.4) для закона сохранения полного импульса (1.2) с учетом соотношения $[h^2/2] = (h_1^2 - h_0^2)/2 = \langle h \rangle [h]$ получим

$$(h_0 q_1 - h_1 q_0)[u]/[h] = h_0 h_1 [u]^2/[h] = g \langle h \rangle [h]. \quad (1.7)$$

Из формулы (1.7) следует, что скачок скорости $[u]$ и скачок глубины $[h]$ на фронте прерывной волны связаны условием

$$[u] = B_1(h_0, h_1)[h], \quad (1.8)$$

где

$$B_1(h_0, h_1) = \sqrt{g \langle h \rangle / (h_0 h_1)} = \sqrt{g(h_0 + h_1) / (2h_0 h_1)}. \quad (1.9)$$

Так как

$$\lim_{h_0 \rightarrow 0} B_1(h_0, h_1) = +\infty,$$

то система уравнений (1.1), (1.2) не допускает распространения прерывных волн конечной амплитуды по сухому руслу, в котором глубина перед фронтом волны $h_0 = 0$. Как показано в п. 2, причина этого заключается в том, что в классическом законе сохранения

полного импульса (1.2) не учитывается влияние сосредоточенного источникового члена, отвечающего за потери полного импульса на фронте прерывной волны.

2. Прерывные волны, распространяющиеся по сухому руслу, и их устойчивость. Предположим, что в условии Гюгонио (1.3) для закона сохранения массы (1.1)

$$h_0 = u_0 = 0, \quad h_1 > 0. \quad (2.1)$$

Это означает, что прерывная волна распространяется по сухому руслу. Подставляя значения (2.1) в условие (1.3), получим

$$Dh_1 = q_1 = h_1 u_1 \quad \Rightarrow \quad D = u_1, \quad (2.2)$$

т. е. скорость распространения такой прерывной волны совпадает со скоростью жидкости за ее фронтом.

Система уравнений теории мелкой воды (2.1), (2.2), как и любая другая гиперболическая система второго порядка [5], допускает бесконечно много линейно независимых законов сохранения

$$\frac{\partial U(h, u)}{\partial t} + \frac{\partial F(h, u)}{\partial x} = 0. \quad (2.3)$$

Если закон сохранения (2.3) несовместен с законом сохранения массы (1.1) на прерывных волнах (2.2), распространяющихся по сухому руслу (2.1), то дисбаланс δU величины $U(h, u)$ на фронте такой волны с учетом нормировки $U(0, 0) = F(0, 0) = 0$ вычисляется по формуле

$$\delta U = D[u] - [F] = u_1 U(h_1, u_1) - F(h_1, u_1). \quad (2.4)$$

При $\delta U > 0$ величина $U(h, u)$ на прерывной волне возрастает, при $\delta U < 0$ — убывает (теряется). Применяя формулу (2.4) к закону сохранения полного импульса (1.2), получим соотношение

$$\delta q = -gh_1^2/2, \quad (2.5)$$

из которого следует, что на прерывной волне (2.2), распространяющейся по сухому руслу (2.1), происходит потеря полного импульса ($\delta q < 0$).

Для теоретического обоснования таких потерь рассмотрим закон сохранения полной энергии

$$e_t + (eu + ghq/2)_x = 0, \quad (2.6)$$

где $e = (qu + gh^2)/2$ — полная энергия потока, которая в рамках теории мелкой воды представляет собой сумму его кинетической $e_k = qu/2 = hu^2/2$ и потенциальной $e_p = gh^2/2$ энергий [5]. На гладких решениях уравнение (2.6) является дифференциальным следствием базисной системы уравнений (1.1), (1.2). Для вывода этого уравнения необходимо из уравнения (1.2) вычесть уравнение (1.1), умноженное на u . В результате после деления на h получим уравнение

$$u_t + (u^2/2 + gh)_x = 0, \quad (2.7)$$

описывающее изменение локального импульса каждой частицы жидкости.

Прибавляя к уравнению (2.7), умноженному на $q/2$, уравнение (1.2), умноженное на $u/2$, получим уравнение

$$(e_k)_t + (ue_k)_x + gqh_x = 0, \quad (2.8)$$

описывающее изменение кинетической энергии e_k . Складывая уравнение (2.8) и уравнение (1.1), умноженное на gh , окончательно получим дифференциальную форму (2.6) закона сохранения полной энергии, условие Гюгонио для которого имеет вид

$$D[e] = [ue + ghq/2]. \quad (2.9)$$

Применяя к закону сохранения полной энергии (2.6) формулу (2.4), получим соотношение

$$\delta e = -gh_1^2 u_1 / 2, \quad (2.10)$$

из которого следует, что при

$$u_1 = D > 0 \quad (2.11)$$

на прерывной волне (2.2), распространяющейся по сухому руслу (2.1), происходит потеря полной энергии набегающего потока ($\delta e < 0$). При

$$u_1 = D < 0 \quad (2.12)$$

полная энергия на прерывной волне (2.1), (2.2) возрастает ($\delta e > 0$).

При рассмотрении уравнений мелкой воды с точки зрения общей теории гиперболических систем законов сохранения с выпуклым расширением [24, 25] закон сохранения полной энергии представляет собой замыкающий выпуклый закон сохранения, поэтому потеря полной энергии на разрывах ($\delta e < 0$) представляет собой энтропийный [25] (энергетический [5]) критерий устойчивости прерывных волн. С учетом этого прерывная волна (2.2), распространяющаяся по сухому руслу (2.1), устойчива при условии (2.11) и неустойчива при условии (2.12).

В рамках теории мелкой воды потерю полной энергии на прерывных волнах можно интерпретировать как процесс, при котором в реальном течении некоторая часть этой энергии переходит в энергию мелкомасштабных вихрей. В классическом случае эти вихри сносятся вверх по потоку от фронта волны, где постепенно затухают под действием вязкости. В течениях, описываемых прерывными волнами, распространяющимися по сухому руслу, это вихревое движение, в силу условия (2.2), локализуется на фронте волны и переходящая в него энергия δe с учетом равенства $\delta e = u_1 \delta q$, которое следует из (2.5) и (2.10), полностью расходуется на торможение набегающего потока, связанное с потерей его полного импульса.

Прерывные волны (2.1), (2.2), (2.11) формально удовлетворяют также эволюционному [4] (характеристическому [5, 23]) условию устойчивости

$$\lambda_s^1 > D > \lambda_s^0 \geq \lambda_r^0, \quad D > \lambda_r^1, \quad (2.13)$$

где $\lambda_r^0 = u_0 - c_0 = 0$, $\lambda_s^0 = u_0 + c_0 = 0$ — скорости r - и s -характеристик перед фронтом волны в зоне сухого русла $h_0 = u_0 = 0$; $\lambda_r^1 = u_1 - c_1$, $\lambda_s^1 = u_1 + c_1$ — скорости r - и s -характеристик за фронтом прерывной волны. Вдоль r -характеристик сохраняется r -инвариант $r = u - 2c$, а вдоль s -характеристик — s -инвариант $s = u + 2c$ ($c = \sqrt{gh}$ — скорость распространения малых возмущений в теории мелкой воды [5]). Неравенства (2.13) означают, что на фронт устойчивой прерывной волны (2.1), (2.2), (2.11) приходят три характеристики λ_r^0 , λ_s^0 и λ_s^1 , а уходит с него только одна λ_r^1 -характеристика. Аналогично можно показать, что прерывные волны (2.1), (2.2), (2.12), неустойчивые относительно энергетического критерия, не удовлетворяют также характеристическому условию устойчивости (2.13).

Ниже получен модифицированный закон сохранения полного импульса, в котором учитываются сосредоточенные потери импульса, обусловленные локальной турбулизацией потока в поверхностном слое жидкости на фронте прерывной волны.

3. Вывод уравнений теории мелкой воды с учетом переходной области на фронте прерывной волны. Поскольку в рамках уравнений первого приближения теории мелкой воды разрывные решения представляют собой прерывные волны, которыми моделируются переходные области

$$G = \{(x, t): a(t) \leq x \leq b(t)\} \quad (3.1)$$

турбулентно-вихревого течения (рис. 2), с учетом основной гипотезы длинноволнового приближения [1] характерная длина $l = O(b(t) - a(t))$ таких переходных областей должна

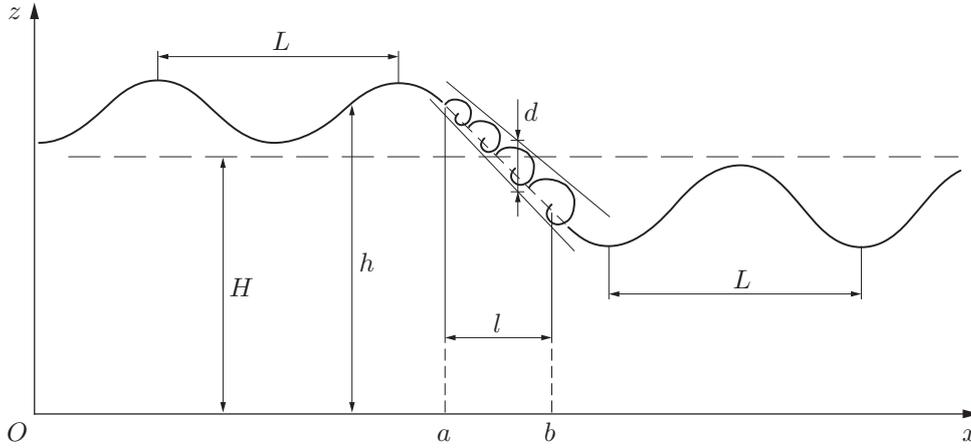


Рис. 2. Схема длинноволнового течения с переходной областью турбулентно-вихревого потока, моделируемой прерывной волной

одновременно удовлетворять двум неравенствам $H \ll l \ll L$ (H — характерная глубина потока; L — характерная длина волн в области $\bar{G} = \mathbb{R}^2 \setminus G$ потенциального течения без прерывных волн). Таким образом, описание прерывных волн как разрывных решений в рамках длинноволнового приближения теории мелкой воды предполагает последовательное выполнение следующих двух предельных переходов:

$$\delta = H/l \rightarrow 0, \quad \varepsilon = l/L \rightarrow 0.$$

Сначала рассмотрим уравнения мелкой воды, получаемые из пространственно двумерных уравнений движения жидкости при

$$H \rightarrow 0, \quad l = \text{const}, \quad L = \text{const} \Rightarrow \delta \rightarrow 0.$$

Для этого предположим, что в области \bar{G} течение является потенциальным и описывается уравнением непрерывности

$$u_x + w_z = 0, \tag{3.2}$$

уравнением отсутствия вихря

$$u_z - w_x = 0 \tag{3.3}$$

и уравнением Эйлера

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v} \nabla) \mathbf{v} + \nabla(p + gz) = 0, \tag{3.4}$$

которое можно записать в покомпонентной форме:

$$u_t + uu_x + wu_z + p_x = 0; \tag{3.5}$$

$$w_t + uw_x + ww_z + p_z + g = 0. \tag{3.6}$$

Здесь $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial z)$ — двумерный оператор градиента; $\mathbf{v}(x, z, t) = (u, w)$ — двумерный вектор скорости; $p(x, z, t)$ — давление, деленное на постоянную плотность жидкости.

Поскольку течение жидкости происходит над горизонтальным дном, совпадающим с осью x , для системы (3.2)–(3.6) поставим следующие естественные граничные условия [1]: на дне при $z = 0$ зададим условие непротекания

$$w(x, 0, t) = 0, \tag{3.7}$$

а на свободной поверхности при $z = h$ ($h = h(x, t)$ — глубина потока) — условие постоянства давления

$$p(x, h, t) = p_0 = 0 \quad (3.8)$$

и кинематическое условие

$$w(x, h, t) = h_t + u(x, h, t)h_x. \quad (3.9)$$

Записывая уравнения (3.2)–(3.6) и граничные условия (3.7)–(3.9) в безразмерных переменных

$$z^* = \frac{z}{H}, \quad h^* = \frac{h}{H}, \quad g^* = \frac{g}{a}, \quad u^* = \frac{u}{v}, \quad p^* = \frac{p}{v^2}; \quad (3.10)$$

$$x^* = \frac{x - \tilde{x}}{L}, \quad t^* = \frac{v(t - \tilde{t})}{L}, \quad w^* = \frac{Lw}{vH}, \quad \tilde{x} = \text{const}, \quad \tilde{t} = \text{const}, \quad (3.11)$$

где $v = \sqrt{aH}$ — характерная скорость; a — характерное ускорение, и вводя малый параметр $\Delta = H/L$, получим

$$\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0, \quad \frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \Delta^2 \frac{\partial w^*}{\partial x^*} = 0; \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x^*} = 0; \quad (3.13)$$

$$\Delta^2 \left(\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial z^*} + g^* = 0; \quad (3.14)$$

$$w^*(x^*, 0, t^*) = 0; \quad (3.15)$$

$$p^*(x^*, h^*, t^*) = 0; \quad (3.16)$$

$$w^*(x^*, h^*, t^*) = \frac{\partial h^*}{\partial t^*} + u^*(x^*, h^*, t^*) \frac{\partial h^*}{\partial x^*}. \quad (3.17)$$

Если $\delta \rightarrow 0$, то $\Delta = \delta\varepsilon \rightarrow 0$, и из второго уравнения (3.12) получаем

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} = 0 \quad \Rightarrow \quad u^* = u^*(x^*, t^*), \quad (3.18)$$

а из уравнения (3.14) с учетом граничного условия (3.16) следует, что давление в жидкости меняется по гидростатическому закону

$$p^* = g^*(h^* - z^*). \quad (3.19)$$

Интегрируя первое уравнение (3.12) по z^* от 0 до h^* с учетом интегрального тождества

$$\int_0^{h^*} \frac{\partial f}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int_0^{h^*} f dz \right) - f|_{z=h^*} \frac{\partial h}{\partial x}, \quad (3.20)$$

граничных условий (3.15), (3.17) и формулы (3.18), получим закон сохранения массы

$$\frac{\partial h^*}{\partial t^*} + \frac{\partial q^*}{\partial x^*} = 0, \quad q^* = h^* u^*. \quad (3.21)$$

Из уравнения (3.13) с учетом формул (3.18), (3.19) следует закон сохранения локального импульса

$$\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(\frac{(u^*)^2}{2} + g^* h^* \right) = 0. \quad (3.22)$$

Складывая уравнение (3.21), умноженное на u^* , и уравнение (3.22), умноженное на h^* , получим закон сохранения полного импульса

$$\frac{\partial q^*}{\partial t^*} + \frac{\partial}{\partial x^*} \left(q^* u^* + \frac{g^*(h^*)^2}{2} \right) = 0. \quad (3.23)$$

В результате при $\delta \rightarrow 0$ в области потенциального течения \bar{G} получена классическая система уравнений (3.21), (3.23) безвихревой мелкой воды, совпадающая с исходной системой (1.1), (1.2).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Приведенный выше вывод уравнений теории мелкой воды (3.21), (3.23) отличен от более стандартного способа их получения, впервые предложенного в работе [26], в соответствии с которым безразмерная вертикальная скорость определяется по формуле

$$w^{**} = Hw/(vL) = \Delta^2 w^*,$$

что позволяет в безразмерных переменных (3.10), (3.11) сохранить вид уравнения отсутствия вихря

$$\frac{\partial u^*}{\partial z^*} - \frac{\partial w^{**}}{\partial x^*} = 0,$$

но приводит к изменению вида уравнения непрерывности

$$\Delta^2 \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} = 0.$$

В результате уравнения мелкой воды (1.1), (1.2) получаются не при $\Delta = 0$, а лишь в первом приближении по параметру Δ^2 , чем объясняется происхождение термина “первое приближение теории мелкой воды” [1, 26].

Преимущество безразмерных переменных (3.10), (3.11) заключается в том, что их использование позволяет вывести уравнения мелкой воды (3.21), (3.23) уже в нулевом (или начальном) приближении по параметру Δ^2 . Кроме того, как отмечено в работе [27], такой “способ задания безразмерных величин является более естественным, так как сохраняет вид кинематического соотношения для движущейся частицы $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ и в безразмерных переменных, а также в явной форме вводит лежащую в основе гидродинамических представлений гипотезу малости вертикального ускорения частиц жидкости по сравнению с ускорением свободного падения в случае мелкой воды”.

4. Уравнения теории мелкой воды в переходной области G . Поскольку в силу сделанных предположений в переходной области (3.1) течение является вихревым и турбулентным, для его описания можно использовать пространственно двумерные уравнения непрерывности (3.2) и Навье — Стокса

$$\mathbf{v}_t + (\mathbf{v}\nabla)\mathbf{v} + \nabla(p + gz) = 2 \operatorname{div}(\nu D), \quad (4.1)$$

где

$$D = \begin{pmatrix} u_x & (u_z + w_x)/2 \\ (u_z + w_x)/2 & w_z \end{pmatrix} — \quad (4.2)$$

двумерный тензор скоростей деформаций; $\nu(\mathbf{v}) = \nu_1 + \nu_2(\mathbf{v})$ — коэффициент вязкости, равный сумме коэффициентов кинематической вязкости $\nu_1 = \operatorname{const}$ и турбулентной вязкости $\nu_2(\mathbf{v})$. Поскольку $\nu_2 \gg \nu_1$, пренебрегая величиной ν_1 , будем считать, что $\nu(\mathbf{v}) = \nu_2(\mathbf{v})$. Уравнение (4.1) с учетом (4.2) можно записать в покомпонентной форме:

$$u_t + uu_x + wu_z + px = 2(\nu u_x)_x + (\nu(u_z + w_x))_z; \quad (4.3)$$

$$w_t + uw_x + ww_z + pz + g = (\nu(u_z + w_x))_x + 2(\nu w_z)_z. \quad (4.4)$$

Для системы (3.2), (4.3), (4.4) поставим граничные условия. На дне при $z = 0$ для вертикальной компоненты скорости w зададим условие непротекания (3.7), а для горизонтальной компоненты u — условие прилипания или проскальзывания [28]. На свободной поверхности выделим полосу S характерной толщины d (см. рис. 2), внутри которой происходят обрушения, приводящие к формированию мелкомасштабных турбулентно-вихревых структур. Предполагая, что $d \ll H$, и переходя к пределу при $d \rightarrow 0$, заменим эту полосу гладкой линией свободной поверхности

$$z - h(x, t) = 0, \quad (4.5)$$

параметры течения на которой представляют собой осредненные по толщине полосы S параметры потока внутри нее. Такой предельный переход позволяет описать рассматриваемое течение в рамках уравнений (3.2), (4.1), заданных внутри регулярной области

$$\tilde{G} = \{(x, z, t): a(t) \leq x \leq b(t), 0 \leq z \leq h(x, t)\} \quad (4.6)$$

с материальной свободной границей (4.5), на которой выполнены кинематическое (3.9) и динамическое

$$p\mathbf{n} = 2(\nu D + \sigma NE)\mathbf{n} + \nabla_h \sigma \quad (4.7)$$

условия [28]. Здесь E — единичный тензор; \mathbf{n} — единичный вектор внешней нормали к линии свободной поверхности (4.5):

$$\mathbf{n} = (-h_x, 1)/r \quad (r = \sqrt{1 + (h_x)^2}); \quad (4.8)$$

$N = (1/2)(h_x/r)_x$ — средняя кривизна этой линии;

$$\nabla_h = \nabla - \mathbf{n}(\mathbf{n}\nabla) = \mathbf{s}(\mathbf{s}\nabla) \quad (4.9)$$

оператор градиента вдоль линии (4.5); $\mathbf{s} = (1, h_x)/r$ — единичный вектор, касательный к линии (4.5). Функция $\sigma = \sigma(\mathbf{v})$ задает величину свободной энергии, сосредоточенной на линии (4.5). Эта энергия индуцируется турбулентно-вихревым движением внутри полосы S , которая при $d \rightarrow 0$ стягивается к линии свободной поверхности (4.5). Умножая скалярно условие (4.7) на единичные векторы \mathbf{n} и \mathbf{s} и учитывая, что в силу формул (4.8) и (4.9) $\mathbf{n}\mathbf{s} = \mathbf{n}\nabla_h \sigma = 0$, запишем это векторное условие в виде двух скалярных соотношений

$$p = 2(\nu \mathbf{n} D \mathbf{n} + \sigma N), \quad 2\nu \mathbf{s} D \mathbf{n} + \mathbf{s} \nabla \sigma = 0, \quad (4.10)$$

где

$$r^2 \mathbf{n} D \mathbf{n} = w_z - (u_z + w_x)h_x - u_x h_x^2, \quad r^2 \mathbf{s} D \mathbf{n} = (u_z + w_x)(1 - h_x^2)/2 - (u_x - w_z)h_x,$$

$$r \mathbf{s} \nabla \sigma = \frac{d\sigma(\mathbf{v})}{dx} = \sigma_u(u_x + u_z h_x) + \sigma_w(w_x + w_z h_x).$$

В уравнениях (3.2), (4.3), (4.4) и граничных условиях (3.7), (3.9), (4.10) перейдем к безразмерным переменным (3.10) и

$$x_* = \frac{x - \tilde{x}}{l}, \quad t_* = \frac{v(t - \tilde{t})}{l}, \quad w_* = \frac{lw}{vH}, \quad \nu_* = \frac{l\nu}{vH^2}, \quad \sigma_* = \frac{\sigma}{Hv^2}. \quad (4.11)$$

В результате уравнения записываются следующим образом:

$$\frac{\partial u_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} = 0; \quad (4.12)$$

$$\frac{\partial u_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial u_*}{\partial z_*} + \frac{\partial p_*}{\partial x_*} = 2\delta^2 \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\nu_* \frac{\partial u_*}{\partial x_*} \right) + \frac{\partial}{\partial z_*} \left(\nu_* \left(\frac{\partial u_*}{\partial z_*} + \delta^2 \frac{\partial w_*}{\partial x_*} \right) \right); \quad (4.13)$$

$$\begin{aligned} \delta^2 \left(\frac{\partial w_*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial w_*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \right) + \frac{\partial p^*}{\partial z_*} + g^* = \\ = \delta^2 \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\nu_* \left(\frac{\partial u^*}{\partial z_*} + \delta^2 \frac{\partial w_*}{\partial x_*} \right) \right) + 2\delta^2 \frac{\partial}{\partial z_*} \left(\nu_* \frac{\partial u^*}{\partial x_*} \right), \end{aligned} \quad (4.14)$$

а граничные условия принимают вид

$$w_*(x_*, 0, t_*) = 0; \quad (4.15)$$

$$w_*(x_*, h^*, t_*) = \frac{\partial h^*}{\partial t_*} + u^*(x_*, h^*, t_*) \frac{\partial h^*}{\partial x_*}; \quad (4.16)$$

$$p^* = 2\delta^2 (\nu_* (\mathbf{n}D\mathbf{n})_* + \sigma_* N_*), \quad 2r\nu_* (\mathbf{s}D\mathbf{n})_* + \frac{d\sigma_*(u^*, w_*)}{dx_*} = 0, \quad (4.17)$$

где

$$\begin{aligned} r^2 (\mathbf{n}D\mathbf{n})_* &= \frac{\partial w_*}{\partial z_*} - \left(\frac{\partial u^*}{\partial z_*} + \delta^2 \frac{\partial w_*}{\partial x_*} \right) \frac{\partial h^*}{\partial x_*} - \delta^2 \frac{\partial u^*}{\partial x_*} \left(\frac{\partial h^*}{\partial x_*} \right)^2, \\ r^2 (\mathbf{s}D\mathbf{n})_* &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^*}{\partial z_*} + \delta^2 \frac{\partial w_*}{\partial x_*} \right) \left(1 - \delta^2 \left(\frac{\partial w_*}{\partial x_*} \right)^2 \right) - \delta^2 \frac{\partial h^*}{\partial x_*} \left(\frac{\partial u^*}{\partial x_*} - \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \right), \\ N_* &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial h^*}{\partial x_*} \right), \quad r = \sqrt{1 + \delta^2 \left(\frac{\partial h^*}{\partial x_*} \right)^2}. \end{aligned}$$

При переходе к пределу при $\delta \rightarrow 0$ из уравнения (4.14) с учетом первого граничного условия (4.17), которое принимает вид

$$p^*(x_*, h^*, t_*) = 0,$$

следует, что давление в области (4.6) меняется по гидростатическому закону (3.19), а из уравнения (4.13) с учетом (3.19) находим

$$\frac{\partial u^*}{\partial t_*} + u_* \frac{\partial u^*}{\partial x_*} + w_* \frac{\partial u^*}{\partial z_*} + g^* \frac{\partial h^*}{\partial x_*} = \frac{\partial}{\partial z_*} \left(\nu_* \frac{\partial u^*}{\partial z_*} \right). \quad (4.18)$$

Второе граничное условие (4.17) при $\delta \rightarrow 0$ имеет вид

$$\nu_* \frac{\partial u^*}{\partial z_*} \Big|_{z^*=h^*} + \frac{d\sigma_*(u^*, w_*)}{dx_*} = 0. \quad (4.19)$$

Интегрируя уравнение (4.12) по z^* от 0 до h^* с учетом формулы (3.20) и граничных условий (4.15), (4.16), получим закон сохранения массы

$$\frac{\partial h^*}{\partial t_*} + \frac{\partial q^*}{\partial x_*} = 0, \quad q^* = \int_0^{h^*} u^*(x_*, z^*) dz^* \quad (4.20)$$

в переходной области (4.6).

При заданных функциях $\nu(\mathbf{v})$ и $\sigma(\mathbf{v})$ (первая из них задается в области (4.6), вторая — на свободной поверхности (4.5)) уравнения (4.12), (4.18), (4.20) с соответствующими граничными условиями образуют замкнутую систему уравнений вихревой мелкой воды, предназначенную для описания турбулентно-вихревого течения (турбулентного бора [3]) в переходной области (4.6). Другие методы, позволяющие описать структуру турбулентного бора (в частности, с использованием многослойных моделей безвихревой мелкой воды), рассматривались в работах [3, 29–32]. При $\nu = \sigma = 0$ система (4.12), (4.18), (4.20) переходит в систему уравнений идеальной вихревой мелкой воды, которая изучалась в работах [3, 33–37].

5. Закон сохранения полного импульса в переходной области G . Складывая уравнение (4.18) и уравнение (4.20), умноженное на u^* , получим уравнение в дивергентной форме

$$\frac{\partial u^*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} ((u^*)^2 + g^* h^*) + \frac{\partial}{\partial z^*} (u^* w_*) = \frac{\partial}{\partial z^*} \left(\nu_* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right),$$

интегрируя которое по z^* от 0 до h^* с учетом (3.20), формулы

$$\int_0^{h^*} \frac{\partial f}{\partial t} dz = \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_0^{h^*} f dz \right) - f|_{z=h^*} \frac{\partial h}{\partial t}$$

и граничных условий (4.15), (4.16), находим закон сохранения полного импульса

$$\frac{\partial q^*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\int_0^{h^*} (u^*)^2 dz^* + \frac{g^* (h^*)^2}{2} \right) = \nu_* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0}^{z^*=h^*} \quad (5.1)$$

в переходной области (3.1).

Величина

$$R_b = -\nu_* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=0}, \quad (5.2)$$

входящая в правую часть уравнения (5.1), представляет собой силу донного трения, для вычисления которой необходимо использовать граничные условия при $z^* = 0$, приводящие к формированию придонного пограничного слоя. Поскольку в уравнениях безвихревой мелкой воды (3.21), (3.23), справедливых во внешней области \bar{G} , донное трение не учитывается, в законах сохранения вихревой мелкой воды (4.20) и (5.1), заданных в переходной области G , также будем пренебрегать силой донного трения (5.2) и толщиной придонного пограничного слоя. Это позволяет записать закон сохранения полного импульса (5.1) в переходной области G в виде

$$\frac{\partial q^*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\int_0^{h^*} (u^*)^2 dz^* + \frac{g^* (h^*)^2}{2} \right) = R, \quad (5.3)$$

где с учетом граничного условия (4.19) величина

$$R = \nu_* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \Big|_{z^*=h^*} = -\frac{d\sigma_*(u^*, w_*)}{dx_*}$$

характеризует потери полного импульса, обусловленные действием свободной энергии σ_* , сосредоточенной на свободной поверхности.

Для приближенного определения величины R примем основное предположение о том, что на свободной поверхности (4.5) при $\delta \rightarrow 0$ коэффициент турбулентной вязкости $\tilde{\nu} = \nu_*|_{z^*=h^*}$ и вертикальная компонента скорости $\tilde{w} = w_*|_{z^*=h^*}$ связаны соотношением

$$\tilde{\nu} = \gamma^* \tilde{w} + o(\gamma^*), \quad 0 < \gamma^* = \text{const} \ll 1. \quad (5.4)$$

Неравенство $\gamma^* > 0$ следует из неравенств $\tilde{\nu} > 0$ и $\tilde{w} > 0$, последнее из которых вытекает из условия устойчивости прерывных волн [5].

Замечание 2. Формулу (5.4) можно вывести следующим образом. Предполагая, что коэффициент вязкости $\tilde{\nu}$ с точностью до $o(\delta)$ является функцией только вертикальной

компоненты скорости \tilde{w} , разложим эту функцию в ряд Тейлора при $\tilde{w} = 0$ с точностью до $O(\tilde{w}^2)$. В результате получим

$$\tilde{v}(\tilde{w}) = \tilde{v}(0) + \tilde{v}'(0)\tilde{w} + \tilde{v}''(\eta)\tilde{w}^2/2, \quad (5.5)$$

где $\eta \in (0, \tilde{w})$. Соотношение (5.4) следует из формулы (5.5) при условиях

$$\tilde{v}(0) = 0, \quad \tilde{w} |\tilde{v}''(\eta)| \ll \tilde{v}'(0) \ll 1.$$

При этом параметр γ^* определяется по формуле

$$\gamma^* = \tilde{v}'(0).$$

Из уравнения (4.18) с учетом условия (5.4) следует, что с точностью до $o(\gamma^*)$

$$R = \nu_* \left. \frac{\partial u^*}{\partial z^*} \right|_{z^*=h^*} = -\gamma^* \left\{ \frac{\partial u^*}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\frac{(u^*)^2}{2} + g^* h^* \right) \right\}.$$

Это позволяет записать закон сохранения полного импульса (5.3) в дивергентной форме

$$\frac{\partial (q^* + \gamma^* u^*)}{\partial t_*} + \frac{\partial}{\partial x_*} \left(\int_0^{h^*} (u^*)^2 dz^* + \frac{g^* (h^*)^2}{2} + \gamma^* \left(\frac{(u^*)^2}{2} + g^* h^* \right) \right) = 0. \quad (5.6)$$

В п. 6 уравнение (5.6) используется при выводе модифицированного условия Гюгонио на фронте прерывной волны для закона сохранения полного импульса.

6. Модифицированные условия Гюгонио на фронте прерывной волны. Путем предельного перехода

$$l \rightarrow 0, \quad L = \text{const} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon = l/L \rightarrow 0 \quad (6.1)$$

для уравнений мелкой воды получим модифицированные условия Гюгонио на фронте прерывной волны. При рассмотрении этого предельного перехода относительно внешних безразмерных переменных (3.11) внутренняя область (3.1) трансформируется в линию разрыва

$$x^* = x^*(t^*) = \lim_{l \rightarrow 0} a^*(t^*) = \lim_{l \rightarrow 0} b^*(t^*) \quad (6.2)$$

($a^* = a/L$, $b^* = b/L$), для которой будем предполагать, что

$$D^* = \frac{dx^*}{dt^*} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{da^*}{dt^*} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{db^*}{dt^*}. \quad (6.3)$$

Вне линии разрыва (6.2) течение описывается гладким решением $\mathbf{u}^*(x^*, t^*) = (h^*, u^*)$ уравнений (3.21) и (3.22), которое по обе стороны от этой линии принимает предельные значения

$$\mathbf{u}_0^*(t^*) = \mathbf{u}^*(x^*(t^*) + 0, t^*), \quad \mathbf{u}_1^*(t^*) = \mathbf{u}^*(x^*(t^*) - 0, t^*). \quad (6.4)$$

Для получения модифицированных условий Гюгонио, связывающих величины (6.4), зафиксируем момент времени $t^* = \tau$ и рассмотрим предельный переход (6.1) относительно внутренних безразмерных переменных (4.11), где

$$\tilde{x} = Lx^*(\tau), \quad \tilde{t} = \tau L/v. \quad (6.5)$$

Точка с координатами $x^* = x^*(\tau)$, $t^* = \tau$, лежащая на линии разрыва (6.2), в безразмерных переменных (4.11), (6.5) совпадает с началом координат $x_* = t_* = 0$.

Поскольку из формул (3.11) и (4.11) следует

$$dx^* = \varepsilon dx_*, \quad dt^* = \varepsilon dt_* \quad \Rightarrow \quad D^* = \frac{dx^*}{dt^*} = \frac{dx_*}{dt_*} = D_*,$$

с учетом независимости производной dD^*/dt^* от l получим

$$\lim_{l \rightarrow 0} \frac{dD_*}{dt_*} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{dD^*}{dt_*} = \frac{dD^*}{dt^*} \lim_{l \rightarrow 0} \varepsilon = 0.$$

С учетом формул (6.2) и (6.3) это означает, что во внутренних переменных (4.11), (6.5) переходная область (3.1) при $l \rightarrow 0$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) трансформируется в полосу постоянной ширины

$$G_* = \{(x_*, t_*): \xi_0 - D^*t_* \leq x_* \leq \xi_1 - D^*t_*\}, \quad (6.6)$$

где

$$\xi_0 = \lim_{l \rightarrow 0} a_*(0), \quad \xi_1 = \lim_{l \rightarrow 0} b_*(0), \quad D^* = D^*(\tau) = D_*(0),$$

$$a_* = (a - \tilde{x})/l, \quad b_* = (b - \tilde{x})/l.$$

По обе стороны от полосы G_* в силу условий (6.4) и равенств

$$\frac{\partial u^*}{\partial x_*} = \varepsilon \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \frac{\partial u^*}{\partial t_*} = \varepsilon \frac{\partial u^*}{\partial t^*}$$

решение является постоянным и определяется по формуле

$$\mathbf{u}^*(x_*, t_*) = \begin{cases} \mathbf{u}_0^*, & x_* \geq \xi_1 - D^*t_*, \\ \mathbf{u}_1^*, & x_* \leq \xi_0 - D^*t_*, \end{cases} \quad (6.7)$$

где $\mathbf{u}_i^* = (h_i^*, u_i^*) = \mathbf{u}_i^*(\tau) = (h_i^*(\tau), u_i^*(\tau))$, $i = 0, 1$.

Таким образом, в результате предельного перехода (6.1) относительно внутренних безразмерных переменных (4.11), (6.5) течение описывается уравнениями (4.12), (4.20), (5.6) внутри полосы (6.6), на границе которой выполнены условия (6.7). Такая задача допускает автомодельное решение, зависящее от переменных $\xi = x_* - D^*t_*$ и z^* . Запишем уравнения (4.20) и (5.6) в переменных ξ и z^* и проинтегрируем их по ξ от ξ_0 до ξ_1 с учетом вытекающих из формулы (6.7) граничных условий

$$h^*(\xi) = \begin{cases} h_0^*, & \xi \geq \xi_1, \\ h_1^*, & \xi \leq \xi_0, \end{cases} \quad u^*(\xi, z^*) = \begin{cases} u_0^*, & \xi \geq \xi_1, \\ u_1^*, & \xi \leq \xi_0. \end{cases}$$

В результате из уравнения (4.20) получим стандартное условие Гюгоню

$$D^*[h^*] = [q^*] \quad (6.8)$$

для закона сохранения массы (3.21), а из уравнения (5.6) — соотношение

$$D^*[q^* + \gamma^* u^*] = [q^* u^* + g^*(h^*)^2/2 + \gamma^*((u^*)^2/2 + g^* h^*)]. \quad (6.9)$$

Возвращаясь к размерным переменным по формулам (3.10), из соотношения (6.8) получим стандартное условие Гюгоню (1.3) для закона сохранения массы (1.1), а из соотношения (6.9) — модифицированное условие Гюгоню

$$D[q + \gamma u] = [qu + gh^2/2 + \gamma(u^2/2 + gh)] \quad (6.10)$$

($D = vD^*$; $\gamma = H\gamma^*$) для закона сохранения полного импульса.

7. Модифицированные уравнения безвихревой мелкой воды. Поскольку потери полного импульса, обусловленные образованием мелкомасштабных турбулентно-вихревых структур в поверхностном слое жидкости, происходят только на фронтах прерывных волн, учитывающие эти потери модифицированные уравнения безвихревой мелкой воды на непрерывных решениях должны быть эквивалентны классическим уравнениям (1.1) и (1.2), а на линиях разрывов из них должны следовать условия Гюгоню (1.3)

и (6.10). Этим требованиям удовлетворяет система уравнений, состоящая из базисных законов сохранения массы (1.1) и модифицированного полного импульса

$$(q + \gamma u)_t + (qu + gh^2/2 + \gamma(u^2/2 + gh))_x = 0. \quad (7.1)$$

Уравнение (7.1) представляет собой линейную комбинацию уравнений (1.2) и (2.7). Вводя обозначения $Q = q + \gamma u = \bar{h}u$, $\bar{h} = h + \gamma$, $\tilde{h} = h + \gamma/2$, $\hat{h} = h + 2\gamma$, уравнение (7.1) можно представить в более компактной форме

$$Q_t + (\tilde{h}u^2 + gh\hat{h}/2)_x = 0, \quad (7.2)$$

а соответствующее условие Гюгонио — в виде

$$D[Q] = [\tilde{h}u^2 + gh\hat{h}/2]. \quad (7.3)$$

Так как определитель матрицы Якоби преобразования $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}(\mathbf{q})$, где $\mathbf{q} = (h, q)$, $\mathbf{Q} = (h, Q)$, переводящего систему (1.1), (1.2) в систему (1.1), (7.2), имеет вид

$$\left| \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \mathbf{q}} \right| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -\gamma u/h & 1 + \gamma/h \end{vmatrix} = 1 + \frac{\gamma}{h},$$

на гладких решениях эти системы эквивалентны при всех $h \neq 0$, т. е. во всей области гиперболичности ($h > 0$) модели мелкой воды. Для анализа совместности систем (1.1), (1.2) и (1.1), (7.2) на разрывных решениях преобразуем соотношение (7.3). Используя обозначение (1.5), условие (1.3) и формулы (1.6), (1.7), соотношение (7.3) можно представить в виде

$$(h_0 h_1 + \gamma \langle h \rangle) [u]^2 / [h] = g(\langle h \rangle + \gamma) [h],$$

откуда следует зависимость

$$[u] = B_2(h_0, h_1, \gamma^*) [h], \quad (7.4)$$

где

$$B_2(h_0, h_1, \gamma^*) = \sqrt{g(\langle h \rangle + \gamma) / (h_0 h_1 + \gamma \langle h \rangle)}, \quad \gamma = H\gamma^*. \quad (7.5)$$

Поскольку с учетом формулы (1.9)

$$B_1^2 - B_2^2 = \frac{g \langle h \rangle}{h_0 h_1} - \frac{g(\langle h \rangle + \gamma)}{h_0 h_1 + \gamma \langle h \rangle} = \frac{\gamma g [h]^2}{h_0 h_1 (h_0 h_1 + \gamma \langle h \rangle)}, \quad (7.6)$$

зависимости (1.8) и (7.4) различны при всех $[h] = h_1 - h_0 \neq 0$. Это означает, что системы законов сохранения (1.1), (1.2) и (1.1), (7.2) несовместны на прерывных волнах любой конечной амплитуды $[h] \neq 0$. В то же время из формулы (7.6) следует, что для функции (7.5) имеет место разложение по малому параметру γ^*

$$B_2(h_0, h_1, \gamma^*) = B_1(h_0, h_1) (1 + [h^*]^2 \gamma^* / (h_0^* h_1^* \langle h^* \rangle) + O((\gamma^*)^2)),$$

в силу которого при конечных безразмерных глубинах h_0^* и h_1^* условие (7.4) отличается от классического условия (1.8) лишь на величину порядка $O(\gamma^* [h^*]^2)$. Более того, в отличие от классического условия (1.8) модифицированное условие (7.4) при $h_0 \rightarrow 0$ переходит в конечное соотношение

$$u_1 = \sqrt{gh_1(h_1 + 2\gamma)/\gamma} = \sqrt{\theta gh_1}, \quad (7.7)$$

где

$$\theta = u_1^2 / (gh_1)^2 = 2 + h_1/\gamma = 2 + h_1^*/\gamma^* \quad (7.8)$$

число Фруда за фронтом прерывной волны, распространяющейся по сухому руслу.

Таким образом, модифицированная система законов сохранения теории мелкой воды (1.1), (7.2), в отличие от классической системы (1.1), (1.2), допускает распространение прерывных волн по сухому руслу $h_0 = 0$, и при конечных безразмерных глубинах $h_0^* > 0$, $h_1^* > 0$ соответствующие ей условия Гюгонио (1.3), (7.3) с точностью до $O(\gamma^*[h^*]^2)$ совпадают с классическими условиями (1.3), (1.4).

8. Устойчивые прерывные волны, допускаемые модифицированными уравнениями мелкой воды. Выделим устойчивые прерывные волны, допускаемые базисными законами сохранения массы (1.1) и модифицированного полного импульса (7.2). В случае если прерывная волна распространяется по сухому руслу (2.1), (2.2), эта задача, по сути, решена в п. 3, где показано, что такая волна является устойчивой при условии (2.11), когда она натекает на сухое русло, и неустойчивой при условии (2.12), когда она стекает с сухого русла. В данном пункте рассмотрим общий случай распространения прерывной волны по руслу конечной глубины.

В системе координат, в которой скорость прерывной волны $D = 0$, из условия Гюгонио (1.3) получим

$$q_1 = q_0 = q, \quad (8.1)$$

а из зависимости (7.4) с учетом (8.1) найдем

$$q^2 = \frac{B_2^2[h]^2}{[h^{-1}]^2} = \frac{g(\langle h \rangle + \gamma)h_0^2 h_1^2}{h_0 h_1 + \gamma \langle h \rangle}. \quad (8.2)$$

Полагая

$$h_1 > h_0 > 0, \quad (8.3)$$

покажем, что перед стоячим скачком течение (8.1), (8.2) является сверхкритическим, т. е. удовлетворяет неравенству

$$v_0^2 = \frac{q^2}{h_0^2} = \frac{g(\langle h \rangle + \gamma)h_1^2}{h_0 h_1 + \gamma \langle h \rangle} > c_0^2 = gh_0, \quad (8.4)$$

а за скачком — докритическим, т. е. удовлетворяет неравенству

$$v_1^2 = \frac{q^2}{h_1^2} = \frac{g(\langle h \rangle + \gamma)h_0^2}{h_0 h_1 + \gamma \langle h \rangle} < c_1^2 = gh_1. \quad (8.5)$$

Поскольку неравенство (8.4) можно записать в виде

$$h_1(h_1 \langle h \rangle - h_0^2) + \gamma(h_1^2 - \langle h \rangle h_0) > 0,$$

а неравенство (8.5) — в виде

$$h_0(h_1^2 - \langle h \rangle h_0) + \gamma(h_1 \langle h \rangle - h_0^2) > 0,$$

их справедливость с учетом условия (8.3) следует из очевидных неравенств $h_1 > \langle h \rangle = (h_0 + h_1)/2 > h_0$.

Из неравенств (8.4) и (8.5) следует, что стоячий скачок (8.1)–(8.3) удовлетворяет характеристическому критерию устойчивости (2.13) при $q < 0$ и не удовлетворяет ему при $q > 0$. Это означает, что устойчивые прерывные волны, допускаемые модифицированными уравнениями мелкой воды (1.1) и (7.2), в системе координат, в которой скорость фронта волны $D = 0$, выделяются условием

$$q[h] = q(h_1 - h_0) < 0, \quad (8.6)$$

означающим, что глубина потока возрастает при прохождении жидкости через разрыв. В результате перехода в систему координат, в которой жидкость в области с меньшей

глубиной покоится, из неравенства (8.6) следует, что устойчивые прерывные волны, распространяющиеся по неподвижному фону $u_0 = 0$, выделяются условием

$$D[h] = D(h_1 - h_0) > 0, \quad (8.7)$$

обобщающим условия (2.1) и (2.11).

Применим энергетический критерий устойчивости прерывных волн [5], согласно которому при переходе через разрыв полная энергия потока убывает. Из соотношения (2.9) следует, что в системе координат, в которой $D = 0$, условие потери полной энергии на фронте прерывной волны записывается в виде неравенства

$$[2ue + ghq] = [q(v^2 + 2gh)] > 0.$$

Преобразуя это неравенство с учетом формул (8.1) и (8.2), получим условие

$$q(q^2[h^{-2}] + 2g[h]) = 2q[h] \left(g - \frac{\langle h \rangle q^2}{h_0^2 h_1^2} \right) = -\frac{gq[h]^3}{2(h_0 h_1 + \gamma \langle h \rangle)} > 0,$$

эквивалентное условию (8.6).

Таким образом, как и в случае классической системы (1.1), (1.2), в случае модифицированной системы (1.1), (7.2) характеристический и энергетический критерии устойчивости прерывных волн эквивалентны, а выделяемые ими устойчивые разрывы задаются теми же неравенствами (8.6) и (8.7), что и в классическом случае [5].

9. Задача о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе. В качестве примера рассмотрим волновые течения воды, возникающие при разрушении плотины в прямоугольном канале с горизонтальным дном и сухим руслом в нижнем бьефе. На рис. 3 точками показаны профили свободной поверхности воды, полученные в моменты времени $t = 0,41$ с (рис. 3,а) и $t = 1,47$ с (рис. 3,б) при лабораторном моделировании течения в прямоугольном лотке. Это волновое течение возникло в результате внезапного удаления в момент времени $t = 0$ плоского щита, расположенного в точке $x = 0$ и ограничивающего неподвижную жидкость глубины $H_0 = 15$ см в верхнем бьефе при $x < 0$ (подробное описание результатов эксперимента приведено в работе [21]).

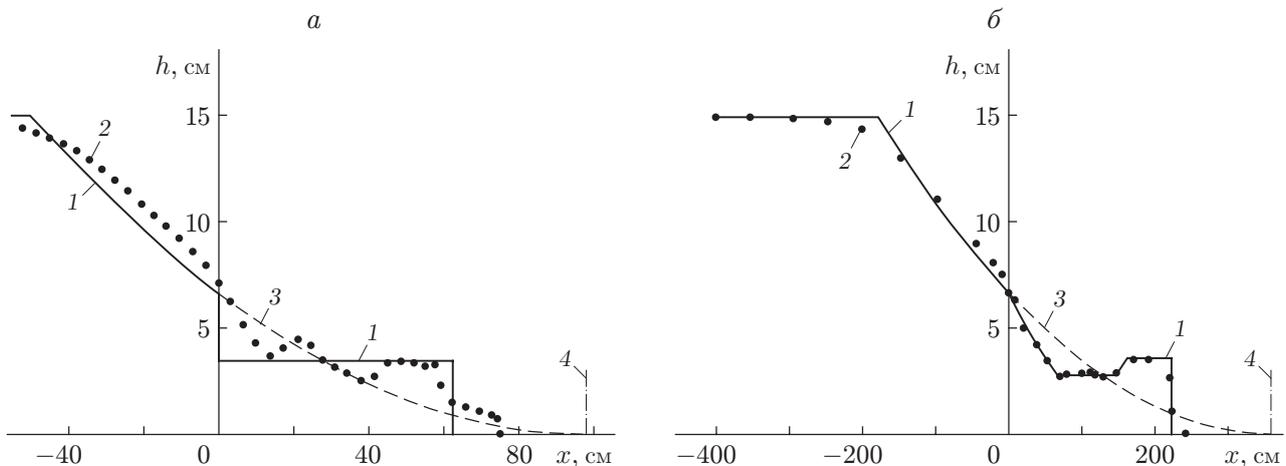


Рис. 3. Профиль волны в задаче о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе:

а — $t = 0,41$ с; б — $t = 1,47$ с; 1 — результаты расчетов, 2 — экспериментальные данные, 3 — профиль классической волны понижения в нижнем бьефе, 4 — правая граница классической волны понижения

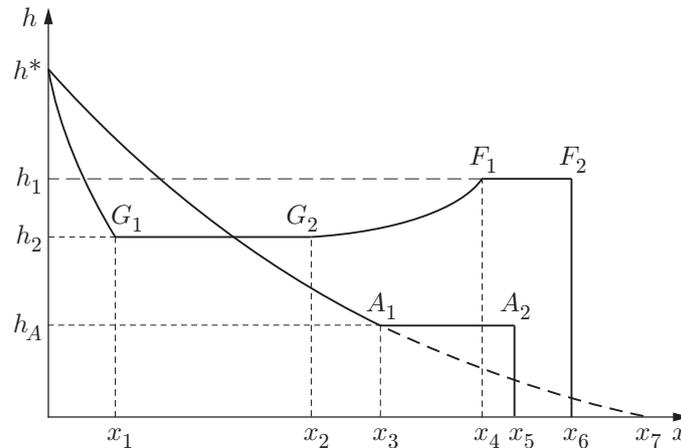


Рис. 4. Профили волн, возникающих при моделировании задачи о разрушении плотины с сухим руслом в нижнем бьефе

В рамках теории мелкой воды данная задача формулируется как задача Коши о распаде разрыва со следующими кусочно-постоянными начальными данными:

$$h(x, 0) = \begin{cases} H_0, & x \leq 0, \\ 0, & x > 0, \end{cases} \quad u(x, 0) = 0. \quad (9.1)$$

Точное решение этой задачи, получаемое на основе классической системы базисных законов сохранения массы (2.1) и полного импульса (2.2), представляет собой центрированную r -волну понижения, параметры течения в которой определяются по формулам [1, 5]

$$h(x, t) = (2c_0 - \xi)^2 / (9g), \quad u(x, t) = (2/3)(c_0 + \xi), \quad -c_0 \leq \xi = x/t \leq 2c_0 \quad (9.2)$$

($c_0 = \sqrt{gH_0}$ — начальная скорость распространения малых возмущений в верхнем бьефе). На рис. 3 решению (9.2) при $x < 0$ соответствует сплошная линия, переходящая при $x > 0$ в штриховую линию. Из рис. 3 следует, что волна понижения (9.2) достаточно точно воспроизводит результаты эксперимента в верхнем бьефе (особенно в момент времени $t = 1,47$ с) и значительно хуже — в нижнем. Поэтому точное решение (9.2) модифицируем только в нижнем бьефе, т. е. при $x > 0$.

Крутую головную часть экспериментальной волны, на фронте которой периодически происходят обрушения и скорость распространения которой существенно ниже скорости движения правой границы волны понижения (9.2), будем моделировать прерывной волной (2.2), (7.7), распространяющейся по сухому руслу (2.1). С учетом этого точное решение задачи (9.1) можно построить как прерывную волну вида (2.2), (7.7), сопряженную через область постоянного течения (h_A, u_A) с левой частью волны понижения (9.2). На рис. 4 такое решение показано сплошной линией $h^*A_1A_2x_5$. Параметры постоянного течения (h_A, u_A) находятся методом адиабат [5] как координаты точки, в которой пересекаются монотонно убывающая волновая r -адиабата

$$u = 2\sqrt{g}(\sqrt{H_0} - \sqrt{h}), \quad h < H_0 \quad (9.3)$$

и монотонно возрастающая неклассическая ударная s -адиабата

$$u = \sqrt{\theta gh}, \quad (9.4)$$

уравнение которой следует из формулы (7.7). Решая систему уравнений (9.3), (9.4), получим

$$h_A = \alpha^2 H_0, \quad u_A = D_A = \alpha \sqrt{\theta g H_0}, \quad \alpha = 2/(2 + \sqrt{\theta}).$$

Штриховой линией на рис. 4 показано продолжение волны понижения (9.2) правее точки A_1 .

Из сравнения рис. 3 и 4 следует, что точное решение задачи (9.1), показанное на рис. 4 линией $h^*A_1A_2x_5$, правильно передавая крутой профиль головной части экспериментальной волны, не отражает того факта, что в левой части нижнего бьефа экспериментальные точки лежат значительно ниже уровня волны понижения (9.2). Причина этого заключается в том, что в данном решении не учтено сильное вертикальное течение, возникающее в результате обрушения вертикальной стенки воды сразу после удаления щита.

В рамках осредненных по вертикали уравнений мелкой воды единственным возможным способом локального учета сильных вертикальных течений, сравнимых с горизонтальными, является введение разрывов параметров течения, т. е. разрыва глубин и горизонтальных скоростей [23]. Из результатов экспериментов следует, что в точке начального разрыва уровней $x = 0$ после удаления щита параметры течения достаточно быстро достигают критических значений $h^* = h(0, t) = 4H_0/9$, $u^* = u(0, t) = 2c_0/3$ и далее остаются практически неизменными в течение всего времени проведения эксперимента. Это позволяет для учета начального вертикального течения применить упрощенный подход, предложенный в [23], при котором начальный разрыв глубин $[0, H_0]$ мгновенно преобразуется в стоячий скачок $[h_1, h^*]$ (h_1 — глубина в зоне постоянного течения (h_1, u_1) между скачком $[h_1, h^*]$, расположенным в точке $x = 0$, и прерывной волной, распространяющейся с постоянной скоростью по сухому руслу).

Поскольку из условия Гюгонио (1.3) для закона сохранения массы (1.1) на неподвижном скачке $[h_1, h^*]$ следует постоянство расхода:

$$[q] = 0 \quad \Rightarrow \quad q^* = h^*u^* = q_1 = h_1u_1, \quad (9.5)$$

параметры сверхкритического течения (h_1, u_1) определяются как координаты точки, в которой ударная адиабата (9.4) пересекается с гиперболой

$$u = q^*/h, \quad q^* = h^*u^* = 8H_0c_0/27. \quad (9.6)$$

Из системы уравнений (9.5), (9.6) получим

$$h_1 = \sqrt[3]{(q^*)^2/(\theta g)}, \quad u_1 = \sqrt[3]{\theta g q^*}. \quad (9.7)$$

На рис. 3,а профиль построенного автомодельного решения показан сплошной линией 1, а на рис. 4 — линией $h^*h_1F_1F_2x_6$. В таком решении при $x > 0$, по существу, происходит искусственное разделение вертикальных и горизонтальных потоков реального течения в нижнем бьефе. Вертикальные потоки сосредоточиваются на скачке глубин $[h_1, h^*]$ в точке $x = 0 + 0$, а горизонтальные распределяются в зоне постоянного течения h_1F_2 за фронтом прерывной волны (см. рис. 4). Такое описание начального этапа течения в нижнем бьефе качественно хорошо согласуется с результатами экспериментов, приведенными в работе [22].

Разрыв $[h_1, h^*]$ неустойчив, и время его существования t_1 определяется как характерное время, в течение которого вертикальные скорости в створе плотины сравнимы с горизонтальными. Значение t_1 вычисляется по формуле $t_1 = \tau\sqrt{H_0/g}$, где τ — безразмерный временной параметр, определяемый путем согласования с результатами лабораторных экспериментов. В момент времени t_1 разрыв $[h_1, h^*]$ разрушается, что в рамках теории мелкой воды формулируется как задача о распаде разрыва

$$h(x, t_1) = \begin{cases} h^*, & x \leq 0, \\ h_1, & x > 0, \end{cases} \quad u(x, t_1) = \begin{cases} u^*, & x \leq 0, \\ u_1, & x > 0, \end{cases} \quad (9.8)$$

решение которой, показанное на рис. 4 линией $h^*G_1G_2F_1$, представляет собой две центрированные волны понижения, соединенные областью постоянного течения (h_2, u_2) . Величины h_2 и u_2 находятся как координаты точки, в которой пересекаются монотонно убывающая r -адиабата (9.3) и монотонно возрастающая s -адиабата:

$$u = u_1 - 2\sqrt{g}(\sqrt{h_1} - \sqrt{h}), \quad h < h_1. \quad (9.9)$$

Из системы уравнений (9.3), (9.9) получим

$$h_2 = ((c_0 + c_1)/2 - u_1/4)/g, \quad u_2 = c_0 - c_1 + u_1/2, \quad (9.10)$$

где $c_0 = \sqrt{gH_0}$; $c_1 = \sqrt{gh_1}$. В r -волне понижения, показанной на рис. 4 линией h^*G_1 , параметры течения вычисляются по формулам

$$h(x, t) = (2c_0 - \eta)^2/(9g), \quad u(x, t) = 2(c_0 + \eta)/3, \quad 0 \leq \eta \leq u_2 - c_2, \quad (9.11)$$

а в s -волне понижения, показанной на рис. 4 линией G_2F_1 , — по формулам

$$h(x, t) = (\eta + 2c_1 - u_1)^2/(9g), \quad u(x, t) = (2\eta + v_1 - 2c_1)/3, \quad (9.12)$$

где $u_2 + c_2 \leq \eta \leq u_1 + c_1$; $c_2 = \sqrt{gh_2}$; $\eta = x/(t - t_1)$, $t > t_1$.

В рамках общей задачи о разрушении плотины (9.1) построенное решение задачи о распаде разрыва (9.8) формирует решение, состоящее из двух волн понижения (9.11), (9.12) и прерывной волны (2.2), (7.7), соединенных областями постоянного течения (9.7) и (9.10). На рис. 3,б это решение показано сплошной линией 1, а на рис. 4 — линией $h^*G_1G_2F_1F_2x_6$. Так как правая граница F_1 s -волны понижения (9.12) распространяется со скоростью $u_1 + c_1$ большей, чем скорость $D = u_1$ движения фронта F_2x_6 прерывной волны (2.2), данное решение будет существовать до тех пор, пока точка F_1 (см. рис. 4) не “догонит” точку F_2 , т. е. только на временном интервале (t_1, t_2) , где $t_2 = u_1t_1/c_1$. При $t > t_2$ начнется взаимодействие прерывной волны (2.2) с волной понижения (9.12), которое не описывается в рамках автомодельных решений.

Точное решение задачи о разрушении плотины (9.1), показанное на рис. 4 линией $h^*G_1G_2F_1F_2x_6$, зависит от двух безразмерных параметров: числа Фруда θ за фронтом прерывной волны F_2x_6 и параметра τ , определяющего время существования разрыва глубин h_1h^* . Из результатов работ [21, 23], в которых задача о разрушении плотины (9.1) экспериментально моделировалась при начальных глубинах $H_0 = 3 \div 21$ см, следует, что при $H_0 = 7 \div 21$ см параметры θ и τ изменяются незначительно и близки к постоянным значениям $\theta = 6,7$, $\tau = 0,62$. При этих значениях параметров θ и τ точное решение достаточно хорошо согласуется с данными лабораторных экспериментов при $t > kt_1 = k\tau\sqrt{H_0/g}$ ($k = 1,3$), когда вертикальные скорости в створе плотины затухают и реальное течение можно рассматривать как одномерное. Предполагая, что в данной задаче характерная глубина течения H совпадает с начальной глубиной верхнего бьефа, т. е. $H = H_0$, для безразмерного параметра γ^* из формулы (7.8) с учетом (9.7) получим значение

$$\gamma^* = 4/(9\sqrt[3]{\theta}(\theta - 2)) \approx 0,05.$$

Из рис. 3,б следует, что построенное в данном пункте модифицированное автомодельное решение в момент времени $t = 1,47$ с $\in (kt_1, t_2)$ ($t_1 \approx 0,77$ с $\Rightarrow kt_1 \approx 1$ с, $t_2 \approx 2$ с) достаточно точно аппроксимирует профиль экспериментальной волны в нижнем бьефе, что свидетельствует об обоснованности предположений, использованных при его построении. В более ранний момент времени $t = 0,41$ с $< t_1$ (см. рис. 3,а), когда неустойчивый разрыв $[h_1, h^*]$ еще не распался и реальное течение является существенно двумерным, результаты расчетов и экспериментальные данные согласуются значительно хуже.

10. Замкнутая система уравнений для описания турбулентного бора. Для получения модифицированного закона сохранения полного импульса (7.2), в рамках которого уравнения мелкой воды допускают распространение прерывных волн по сухому

руслу, достаточно задать зависимость (5.4) коэффициента турбулентной вязкости ν_* от вертикальной компоненты скорости w_* только на свободной поверхности (4.5) переходной области (4.6). В то же время для более детального анализа турбулентного течения в этой области (турбулентного бора) необходимо доопределить зависимость (5.4) при всех $z^* \in [0, h^*]$ и задать на свободной поверхности (4.5) явный вид функции свободной энергии $\sigma_*(u^*, w_*)$. Наиболее просто это можно сделать, предположив, что при $\delta \rightarrow 0$

$$\nu_* \approx \gamma^* w_* \quad \forall z^* \in [0, h^*], \quad \sigma_* \approx \vartheta_* w_*^2 \Big|_{z^*=h^*} \quad (10.1)$$

($\vartheta_* = H\vartheta/l^2 = \text{const}$). В этом случае динамическое граничное условие (4.19) принимает вид

$$\left(\frac{\partial w_*}{\partial x_*} + \frac{\partial w_*}{\partial z_*} \frac{\partial h^*}{\partial x_*} + r_* \frac{\partial u^*}{\partial z_*} \right) \Big|_{z^*=h^*} = 0, \quad (10.2)$$

где $r_* = \gamma^*/\vartheta_* = \text{const}$. В результате при заданных безразмерных параметрах γ^* и ϑ_* получается замкнутая система уравнений (4.12), (4.18), (4.20) неидеальной вихревой мелкой воды со следующими граничными условиями: условием непротекания на дне $w_*(x_*, 0, t_*) = 0$, а также кинематическим (4.16) и динамическим (10.2) условиями на свободной поверхности. Из первой формулы (10.1) следует, что в этой системе не учитывается влияние донного трения, обусловленное действием турбулентной вязкости в придонном пограничном слое, толщина которого считается пренебрежимо малой по сравнению с характерной глубиной потока H . Эту систему можно использовать для численного моделирования формирования и эволюции турбулентного бора.

Автор выражает благодарность В. В. Кузнецову за полезные замечания, сделанные при обсуждении данной работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Стокер Дж. Дж.** Волны на воде. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
2. **Овсянников Л. В.** Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн / Л. В. Овсянников, Н. И. Макаренко, В. И. Налимов и др. Новосибирск: Наука. Сиб. отделение, 1985.
3. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
4. **Куликовский А. Г.** Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. М.: Физматлит, 2001.
5. **Остапенко В. В.** Гиперболические системы законов сохранения и их приложение к теории мелкой воды. Новосибирск: Изд-во Нососиб. гос. ун-та, 2004.
6. **Васильев О. Ф., Гладышев М. Т.** О расчете прерывных волн в открытых руслах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1966. № 6. С. 120–123.
7. **Остапенко В. В.** О сквозном расчете прерывных волн // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 1993. Т. 33, № 5. С. 743–752.
8. **Воеводин А. Ф., Остапенко В. В.** О расчете прерывных волн в открытых руслах // Сиб. журн. вычисл. математики. 2000. Т. 3, № 4. С. 305–321.
9. **Delis A., Skeels C. P.** TVD schemes for open channel flow // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 1998. V. 26. P. 791–809.
10. **Wang J., Ni H., He Y.** Finite-difference TVD schemes for computation of dam-break problems // J. Hydraul. Engng ASCE. 2000. V. 126. P. 253–262.

11. **Gottardi G., Venutelli M.** Central schemes for open channel flow // Intern. J. Numer. Methods Fluids. 2003. V. 41. P. 841–861.
12. **Шокин Ю. И.** Вычислительный эксперимент в проблеме цунами / Ю. И. Шокин, Л. Б. Чубаров, А. Г. Марчук, К. В. Симонов. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
13. **Ritter A.** Die fortpflanzung der wasserwellen // Z. Vereins dt Ing. 1892. V. 36. P. 947–954.
14. **Dressler R. F.** Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions // J. Res. Nat. Bureau Standards. 1952. V. 49, N 3. P. 217–225.
15. **Whitham G. B.** The effects of hydraulic resistance in the dambreak problem // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1955. V. 227, N 1170. P. 399–407.
16. **Судобичер В. Г., Шугрин С. М.** Движение потока воды по сухому руслу // Изв. СО АН СССР. Сер. техн. наук. 1968. № 13, вып. 3. С. 116–122.
17. **Борисова Н. М., Остапенко В. В.** О численном моделировании процесса распространения прерывных волн по сухому руслу // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2006. Т. 46, № 7. С. 1322–1344.
18. **Martin J. C., Moyce W. J.** An experimental study of the collapse of liquid columns on a rigid horizontal plane // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1952. V. 244. P. 312–324.
19. **Dressler R. F.** Comparison of theories and experiments for the hydraulic dam-break wave // Intern. Assoc. Sci. Hydrology. 1954. V. 3, N 38. P. 319–328.
20. **Stansby P. K., Chugini A., Barnes T. C.** The initial stages of dam-break flow // J. Fluid Mech. 1998. V. 374. P. 407–424.
21. **Букреев В. И., Гусев А. В., Малышева А. А., Малышева И. А.** Экспериментальная проверка газогидравлической аналогии на примере задачи о разрушении плотины // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2004. № 5. С. 143–152.
22. **Букреев В. И., Гусев А. В.** Начальная стадия генерации волн при разрушении плотины // Докл. РАН. 2005. Т. 401, № 5. С. 1–4.
23. **Борисова Н. М., Гусев А. В., Остапенко В. В.** О распространении прерывных волн по сухому руслу // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 4. С. 135–148.
24. **Friedrichs K. O., Lax P. D.** Systems of conservation equation with convex extension // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. 1971. V. 68, N 8. P. 1686–1688.
25. **Lax P. D.** Hyperbolic systems of conservation laws and the mathematical theory of shock waves. Philadelphia: Soc. Industr. and Appl. Math., 1972.
26. **Friedrichs K. O.** On the derivation of shallow water theory // Comm. Pure Appl. Math. 1948. V. 1. P. 109–134.
27. **Атавин А. А., Шугрин С. М.** О дифференциальных уравнениях теории мелкой воды // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1985. Вып. 70. С. 25–53.
28. **Пухначев В. В.** Движение вязкой жидкости со свободными границами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. гос. ун-та, 1989.
29. **Madsen P. A., Svendsen I. A.** Turbulent bores and hydraulic jumps // J. Fluid Mech. 1983. V. 129. P. 1–25.
30. **Svendsen I. A., Madsen P. A.** Turbulent bore on a beach // J. Fluid Mech. 1984. V. 148. P. 73–96.
31. **Hoyt J. W., Sellin R. H.** Hydraulic jumps as “mixing layer” // J. Hydraul. Engng. 1989. V. 115, N 12. P. 1607–1614.
32. **Gunal M., Narayanan R.** Hydraulic jump in sloping channels // J. Hydraul. Engng. 1996. V. 122, N 8. P. 436–442.

-
33. **Freeman N. C.** Simple waves on shear flow: similarity solutions // J. Fluid Mech. 1972. V. 56. P. 257–263.
 34. **Benney D. J.** Some properties of long nonlinear waves // Stud. Appl. Math. 1973. V. 52. P. 45–50.
 35. **Zakharov V. E.** Benney equations and quasi-classical approximation in the method of inverse problem // Funct. Anal. Appl. 1980. V. 14. P. 15–24.
 36. **Sachdev P. L., Varugheze Ph.** Invariance group properties and exact solutions of equations describing time-dependent free surface flow under gravity // Quart. Appl. Math. 1986. V. 43. P. 465–482.
 37. **Teshukov V., Russo G., Chesnokov A.** Analytical and numerical solutions of the shallow water equations for 2D rotational flows // Math. Models Methods Appl. Sci. 2004. V. 14, N 10. P. 1451–1479.

*Поступила в редакцию 7/II 2006 г.,
в окончательном варианте — 23/XI 2006 г.*
