

УДК 533.72

Влияние чисел Прандтля и Кнудсена на процесс переноса тепла в задаче о плоском течении Пуазейля

В.Н. Попов, Д.А. Рудный

Северный (Арктический) федеральный университет, Архангельск

E-mail: popov.vasily@pomorsu.ru

В рамках кинетического подхода для произвольных значений числа Прандтля построено аналитическое (в виде ряда Неймана) решение задачи о вычислении потока тепла в плоском канале при наличии параллельного стенкам градиента давления (в задаче о плоском течении Пуазейля). В качестве основного уравнения используется эллипсоидально-статистическая модель кинетического уравнения Больцмана, а в качестве граничного условия — модель диффузного отражения. Проведенный численный анализ окончательных выражений, полученных в настоящей работе, показал существенную зависимость потока тепла от значения числа Прандтля газа для каналов, толщина которых сравнима со средней длиной свободного пробега молекул газа.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, модельные кинетические уравнения, модели граничных условий, течение газа в канале, число Прандтля, число Кнудсена.

Введение

Плоским течением Пуазейля называется течение жидкости или газа в канале между двумя параллельными пластинами, вызываемое градиентом давления, параллельным пластинам [1]. В рамках механики сплошной среды нет различия между градиентом давления, обусловленным градиентом плотности (концентрации), и градиентом давления, обусловленным градиентом температуры. Напротив, в рамках кинетического подхода это различие должно приниматься во внимание. Как и в работе [1], ограничимся первым случаем и вычислим поток тепла, проходящий через поперечное сечение канала при наличии параллельного стенкам градиента давления. Данная задача неоднократно рассматривалась ранее различными авторами с использованием как численных, так и аналитических методов [1]–[8]. Однако полученные в этих работах результаты относятся к газам, число Прандтля которых близко к $2/3$, в то время как для ряда реальных газов это значение существенно отличается от приведенного выше. Так, при $t = 20$ °С для воздуха, кислорода и аммиака число Прандтля равно соответственно 0,71, 0,85 и 0,93, для водяных паров при $t = 100$ °С число Прандтля равно 1,01 [9]. Учитывая этот факт, рассмотрим вопрос, связанный с исследованием зависимости макропараметров газа в канале (в частности, потока тепла) от значения числа Прандтля. Последнее составляет цель настоящей работы.

Постановка задачи. Построение функции распределения молекул газа

Рассмотрим течение разреженного газа в плоском канале толщиной D' , стенки которого расположены в плоскостях $x' = \pm d'$ прямоугольной декартовой системы координат ($d' = D'/2$). Предположим, что в канале поддерживается постоянный градиент давления, параллельный его стенкам. Направим ось Oz' декартовой системы координат вдоль градиента давления. Запишем в выбранной системе координат эллипсоидально-статистическую (ЭС) модель кинетического уравнения Больцмана:

$$v_x \frac{\partial f}{\partial x'} + v_z \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{p}{\eta_g} \text{Pr}(\Phi_{\text{eq}} - f). \quad (1)$$

Здесь $f(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ — функция распределения молекул газа по координатам и скоростям, p и η_g — давление и коэффициент динамической вязкости газа, \mathbf{v} и \mathbf{r}' — скорости поступательного движения и размерные радиус-векторы координат центров масс молекул газа, $\Phi_{\text{eq}}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ — локально-равновесный анизотропный максвеллиан (см. [1]),

$$\Phi_{\text{eq}}(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z) \beta^{3/2} (\det A)^{1/2} \exp \left[- \sum_{i,j=1}^3 A_{ij} (C_i - U_i)(C_j - U_j) \right],$$

$$A = \| A_{ij} \| = \left\| \delta_{ij} + (1 - \text{Pr}^{-1}) \frac{p_{ij}}{p} \right\|^{-1},$$

$\mathbf{C} = \beta^{1/2} \mathbf{v}$ и $\mathbf{U} = \beta^{1/2} \mathbf{u}$ — безразмерные скорость молекул газа и массовая скорость газа, $\beta = m / 2k_B T$, m — масса молекулы газа, k_B — постоянная Больцмана, T — температура газа, p_{ij} — компоненты бездивергентного тензора вязких напряжений [1].

Будем считать температуру постоянной, а относительный перепад давления на длине свободного пробега молекул газа l_g — малым. Тогда задача допускает линеаризацию, и функцию распределения молекул газа по координатам и скоростям можно представить в виде

$$f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) = n(z) \beta^{3/2} \pi^{-3/2} \exp(-C^2) [1 + C_z G_n Z(x, C_x)]. \quad (2)$$

Здесь $G_n = (1/p)(dp/dz)$ — безразмерный градиент давления в направлении оси Oz' , $Z(x, C_x)$ — линейная поправка к локально-равновесной функции распределения, $x = \text{Pr} x' / l_g$ и $z = \text{Pr} z' / l_g$ — безразмерные координаты, $l_g = \eta_g \beta^{-1/2} / p$.

Подставляя (2) в (1) и линеаризуя $\Phi_{\text{eq}}(\mathbf{r}', \mathbf{v})$ относительно локального, приходим к уравнению для нахождения $Z(x, \mu)$ ($\mu = C_x$)

$$\mu \frac{\partial Z}{\partial x} + Z(x, \mu) + 1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp(-\tau^2) [1 + 2(1 - \text{Pr}^{-1}) \mu \tau] Z(x, \tau) d\tau. \quad (3)$$

Общее решение (3) имеет вид (см. [10])

$$Z(x, \mu) = \gamma x^2 - 2\mu x + 2\mu^2 + A_0 + A_1 (x - \gamma^{-1} \mu) + \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) F(\eta, \mu) a(\eta) d\eta. \quad (4)$$

Здесь A_0 , A_1 и $a(\eta)$ — неизвестные параметры и функция, подлежащие дальнейшему определению,

$$F(\eta, \mu) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \eta P \frac{1}{\eta - \mu} + \exp(\eta^2) \lambda(\eta) \delta(\eta - \mu),$$

$$\lambda(z) = 1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} z \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\exp(-\mu^2) d\mu}{\mu - z},$$

$P(1/z)$ — распределение в смысле главного значения при вычислении интеграла от $1/z$, $\delta(z)$ — дельта-функция Дирака, $\gamma = \text{Pr}^{-1}$. В качестве модели граничного условия на стенках канала используем модель диффузного отражения. С учетом этого на верхней и нижней стенках канала должны выполняться условия

$$Z(\pm d, \mp \mu) = 0, \quad \mu > 0. \quad (5)$$

Здесь $d = D/2$, D — безразмерная толщина канала. Согласно принятому способу перехода к безразмерным величинам, $D = \text{Pr} D' / l_g = \text{Pr} \text{Kn}^{-1}$, где $\text{Kn} = l_g / D'$ — число Кнудсена.

С учетом симметрии задачи $Z(-d, -\mu) = Z(d, \mu)$ [1]. В силу этого необходимо положить $A_1 = 0$, $a(-\eta) = a(\eta)$. Учитывая сказанное выше и подставляя (4) в (5), приходим к интегральному уравнению

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, -d) d\eta}{\eta - \mu} + \exp(\mu^2) b(\mu, -d) \lambda(\mu) = f(\mu), \quad \mu > 0, \quad (6)$$

$$f(\mu) = -\gamma d^2 - 2\mu^2 - A_0 - 2d\mu - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau b(\tau, d) d\tau}{\tau + \mu}, \quad (7)$$

$$b(\eta, x) = \exp\left(-\frac{x}{\eta}\right) a(\eta). \quad (8)$$

Решение (6) ищем с использованием теории краевых задач функции комплексного переменного. С этой целью введем вспомогательную функцию, заданную интегралом типа Коши,

$$N(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\eta b(\eta, -d) d\eta}{\eta - z}. \quad (9)$$

С учетом граничных условий на верхнем и нижнем берегах разрезов для функций $N(z)$ и $\lambda(z)$ сведем интегральное уравнение (6) к краевой задаче Римана на действительной положительной полуоси:

$$N^+(\mu) \lambda^+(\mu) - N^-(\mu) \lambda^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu f(\mu) \exp(-\mu^2), \quad \mu > 0. \quad (10)$$

Общее решение (10) имеет вид

$$N(z) = \frac{1}{X(z)} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) \frac{d\eta}{\eta - z}. \quad (11)$$

Здесь

$$X(z) = \frac{1}{z} \exp \left[\frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \frac{[\theta(\tau) - \pi] d\tau}{\tau - z} \right], \quad \theta(\tau) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arccotg} \frac{\lambda(\tau)}{\sqrt{\pi \tau} \exp(-\tau^2)}.$$

Раскладывая (11) в окрестности бесконечно удаленной точки, приходим к условию разрешимости краевой задачи (10)

$$\gamma d^2 - 2Q_2 + A_0 - 2dQ_1 - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta f(\eta) \exp(-\eta^2) d\eta - \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau b(\tau, d)}{\tau + \eta} d\tau = 0. \quad (12)$$

Здесь Q_n — интегралы Лойалки [7].

$$Q_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \eta^{n+1} \exp(-\eta^2) d\eta,$$

в частности, $Q_1 = -1,01619$, $Q_2 = -1,26632$. Изменяя в (12) порядок интегрирования, учитывая (8) и интегральное представление

$$X(-\tau) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{X^-(\eta)}{\lambda^-(\eta)} \frac{\eta \exp(-\eta^2) d\eta}{\tau + \eta},$$

находим

$$A_0 = -\gamma d^2 + 2Q_2 + 2dQ_1 + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \tau X(-\tau) a(\tau) \exp\left(-\frac{d}{\tau}\right) d\tau. \quad (13)$$

Коэффициенты $a(\mu)$ в разложении (4) решения рассматриваемой задачи по собственным векторам непрерывного спектра найдем по формулам Сохоцкого. Учитывая, что, согласно (8) и (9),

$$N^+(\mu) - N^-(\mu) = 2\sqrt{\pi} i \mu a(\mu) \exp\left(-\frac{d}{\mu}\right), \quad (14)$$

приходим к интегральному уравнению

$$a(\mu) = h(\mu) \left[Q_1 - \mu - d - \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{\tau X(-\tau) a(\tau)}{\tau + \mu} \exp\left(-\frac{d}{\tau}\right) d\tau \right], \quad \mu > 0, \quad (15)$$

$$h(\mu) = \frac{X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \exp\left(-\mu^2 - \frac{d}{\mu}\right).$$

Ядро уравнения (15) с точностью до обозначений совпадает с ядром аналогичного уравнения, приведенного в работе [1]. Там же показано, что данное уравнение является классическим уравнением Фредгольма второго рода с симметризуемым ядром и его решение в виде ряда Неймана сходится для любого значения d .

Для построения решения (15) рассмотрим уравнение

$$a(\mu) = h(\mu) \left[Q_1 - \mu - d + \lambda \int_0^{+\infty} \frac{\tau X(-\tau) a(\tau)}{\tau + \mu} \exp\left(-\frac{d}{\tau}\right) d\tau \right], \quad \mu > 0. \quad (16)$$

Нетрудно видеть, что уравнение (15) получается из (16) при $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. Будем искать решение (16) в виде ряда

$$a(\mu) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k a_k(\mu). \quad (17)$$

Подставляя (17) в (16) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях λ , приходим к системе рекуррентных соотношений для нахождения коэффициентов $a_k(\mu)$

$$a_0(\tau) = h(\tau)[Q_1 - \tau - D/2], \quad (18)$$

$$a_{k+1}(\tau) = h(\tau) \int_0^{+\infty} \frac{\tau X(-\tau) a_k(\tau)}{\tau + \mu} \exp\left(-\frac{d}{\tau}\right) d\tau. \quad (19)$$

Учитывая (18) и (19), выпишем в явном виде несколько первых членов разложения $a(\mu)$ по степеням λ :

$$a_1(\tau) = h(\tau) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta)[Q_1 - \eta - D/2] d\eta}{\eta + \tau}, \quad (20)$$

$$a_2(\tau) = h(\tau) \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \tau} \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu)[Q_1 - \mu - D/2] d\mu}{\mu + \eta}, \quad (21)$$

$$g(\tau) = \frac{\tau X^2(-\tau)}{|\lambda^+(\tau)|^2} \exp\left(-\tau^2 - \frac{D}{\tau}\right).$$

Остальные коэффициенты записываются аналогичным образом. Подставляя далее (18), (20), (21) в (14), находим

$$A_0 = -\frac{\gamma D^2}{4} + 2Q_2 + DQ_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k I_k,$$

$$I_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau)[Q_1 - \tau - D/2] d\tau,$$

$$I_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta)[Q_1 - \eta - D/2] d\eta}{\eta + \tau},$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \tau} \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu)[Q_1 - \mu - D/2] d\mu}{\mu + \eta},$$

$$I_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} g(\tau) d\tau \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \tau} \int_0^{+\infty} \frac{g(\mu)[Q_1 - \mu - D/2] d\mu}{\mu + \eta}.$$

Здесь, учитывая (15) и (16), $\lambda = -\frac{1}{2\sqrt{\pi}}$. Таким образом, неизвестные параметры

A_0 , A_1 и функция $a(\eta)$, входящие в (4), найдены, функция распределения молекул газа по координатам и скоростям построена.

Вычисление потока тепла

С учетом построенной функции распределения вычислим z -компоненту вектора плотности потока тепла $q'_z(x')$ и величину потока тепла в направлении оси Oz' , приходящуюся на единицу ширины канала Q'_p . Исходя из статистического смысла функции распределения и учитывая (2), находим [7]

$$q'_z(x') = \int \frac{m}{2} [\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')] |\mathbf{v} - \mathbf{u}(\mathbf{r}')|^2 f(\mathbf{r}', \mathbf{v}) d^3 \mathbf{v} = \frac{nk_B T}{\sqrt{\beta}} q_z(x) \frac{1}{p} \frac{dp}{dz}.$$

Здесь

$$q_z(x) = \pi^{-3/2} \int \exp(-C^2) C_z^2 (C^2 - \frac{5}{2}) Z(x, C_x) d^3 C \quad (22)$$

есть безразмерная z -компонента вектора плотности потока тепла. Подставив (4) в (22), после интегрирования получим

$$q_z(x) = \frac{1}{2} \left[1 - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k J_k(x) \right], \quad (23)$$

$$J_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \mu) [Q_1 - \mu - D/2] d\mu,$$

$$J_1(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \mu) d\mu \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) [Q_1 - \eta - D/2] d\eta}{\eta + \mu},$$

$$J_2(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \gamma(x, \mu) d\mu \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \int_0^{+\infty} \frac{g(\tau) [Q_1 - \tau - D/2] d\tau}{\tau + \eta},$$

$$\gamma(x, \mu) = \frac{X(-\mu)}{|\lambda^-(\mu)|^2} \exp(-\mu^2) \left[\exp\left(\frac{x - D/2}{\mu}\right) + \exp\left(-\frac{x + D/2}{\mu}\right) \right].$$

Величину потока безразмерного тепла Q_p в направлении оси Oz' , приходящуюся на единицу ширины канала, вычислим согласно [3]:

$$Q_p = -\frac{2}{D^2} \int_{-D/2}^{D/2} q(x) dx. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (24) и выполняя интегрирование, получаем

$$Q_p = -\frac{1}{D^2} \left[D - \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k K_k \right], \quad (25)$$

$$K_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\mu) [Q_1 - \mu - D/2] d\mu,$$

$$K_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\mu) d\mu \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) [Q_1 - \eta - D/2] d\eta}{\eta + \mu},$$

$$K_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \zeta(\mu) d\mu \int_0^{+\infty} \frac{g(\eta) d\eta}{\eta + \mu} \int_0^{+\infty} \frac{g(\tau) [Q_1 - \tau - D/2] d\tau}{\tau + \eta},$$

$$\zeta(\mu) = \frac{\mu X(-\mu)}{|\lambda^+(\mu)|^2} \exp(-\mu^2) \left[1 - \exp\left(-\frac{D}{\mu}\right) \right].$$

Таблица 1

Kn^{-1}	$\lambda^k K_k$				
	$k=0$	$k=1$	$k=2$	$k=3$	$k=4$
Pr = 1,01					
0,1	0,1004018	-0,0069412	0,0004472	-0,0000283	0,0000018
1,0	0,7247182	-0,0143882	0,0002172	-0,0000039	
10,0	3,4163568	-0,0002480			
Pr = 0,85					
0,1	0,0854925	-0,0061322	0,0004126	-0,0000272	0,0000018
1,0	0,6349500	-0,0149171	0,0002948	-0,0000057	
10,0	3,0440135	-0,0004880			
Pr = 0,64					
0,1	0,0653793	-0,0049494	0,0003536	-0,0000248	0,0000017
1,0	0,5074097	-0,0151687	0,0003881	-0,0000098	
10,0	2,5131019	-0,0012294			

Значения интегралов K_k , входящих в (25), вычислены с использованием пакета прикладных программ Maple 9.5 путем интерполяции подынтегральных функций линейными сплайнами. Учитывая, что подынтегральные выражения, входящие в K_k , содержат множитель $\exp(-\mu^2)$, эти интегралы достаточно быстро сходятся. При их вычислении в качестве верхнего предела интегрирования принималось значение, равное 5. Число членов ряда, которое необходимо учитывать при вычислении Q_p , существенным образом зависит от толщины канала D . Как видно из табл. 1, для достижения точности порядка 10^{-4} в случае $D=0,1$ необходимо учитывать пять членов ряда, а при $D=10,0$ достаточно ограничиться только одним.

Значения Q_p , рассчитанные согласно (25), представлены в табл. 2. Графики зависимости Q_p от Pr для различных значений числа Кнудсена отражены на рисунке. Из приведенных результатов видно, что рассматриваемый эффект имеет место лишь для каналов, толщина которых соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул газа, т. е. при $\text{Kn} = O(1)$. При этом чем меньше толщина канала, тем существеннее Q_p зависит от значений числа Прандтля. В случае, когда

Таблица 2

Газ	Q_p					
	$\text{Kn}^{-1} = 0,1$	$\text{Kn}^{-1} = 0,5$	$\text{Kn}^{-1} = 1,0$	$\text{Kn}^{-1} = 3,0$	$\text{Kn}^{-1} = 10,0$	$\text{Kn}^{-1} = 50,0$
Водяной пар (Pr = 1,01)	-0,6978	-0,3968	-0,2936	-0,1607	-0,0655	-0,0147
Аммиак (Pr = 0,93)	-0,7111	-0,4103	-0,3050	-0,1694	-0,0704	-0,0160
Кислород (Pr = 0,85)	-0,7270	-0,4252	-0,3179	-0,1790	-0,0755	-0,0175
Воздух (Pr = 0,71)	-0,7702	-0,4552	-0,3440	-0,1990	-0,0873	-0,0207
Хлор (Pr = 0,64)	-0,7909	-0,4734	-0,3598	-0,2111	-0,0949	-0,0229
Одноатомный газ (Pr = 2/3)	-0,7832	-0,4660	-0,3539	-0,2062	-0,0920	-0,0220
Одноатомный газ (S модель, [4])	-0,7327		-0,3655		-0,0981	
Одноатомный газ (CES модель, [4])	-0,7909		-0,4046		-0,0930	
Одноатомный газ (LBE, [5])	-0,7993		-0,3891		-0,0900	

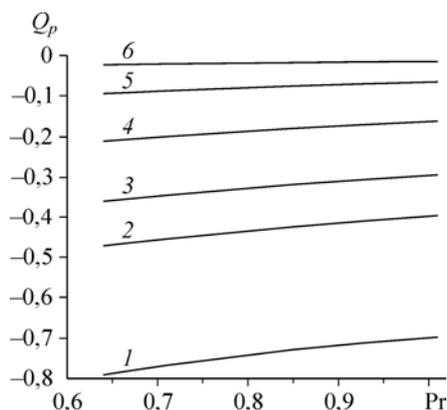


Рис. Зависимость Q_p от Pr для различных значений числа Кнудсена.

$Kn = 10$ (1), 2 (2), 1 (3), 0,333 (4), 0,1 (5), 0,02 (6).

$D' \gg l_g$, т. е. при $Kn \rightarrow 0$, величина потока тепла стремится к нулю. Таким образом, при $Kn \rightarrow 0$ полученный результат переходит в соответствующий результат, получаемый на основе классической термодинамики: поток тепла в отсутствие градиента температуры равен нулю. В табл. 2 приведены также значения Q_p , полученные в работах [5] и [6] на основе линейризованного уравнения Больцмана (LBE), линейризованной модели Шахова (S) и линейризованной модели уравнения Больцмана с синтетическим ядром (CES). Из приведенных данных видно, что при $Pr = 2/3$ использованная в работе линейризованная ЭС модель уравнения Больцмана дает результаты, хорошо совпадающие с аналогичными результатами, приведенными в работах [5] и [6].

Заключение

В работе в виде ряда Неймана построено решение ЭС модели кинетического уравнения Больцмана в задаче о вычислении потока тепла в плоском канале с параллельными бесконечными стенками при наличии параллельного стенкам градиента давления. Получено выражение, описывающее поток тепла в газе, приходящегося на единицу ширины канала в зависимости от значений чисел Прандтля и Кнудсена. Проведенный численный анализ итоговых выражений показал существенную зависимость изотермического потока тепла от значений числа Прандтля газа в случае, когда толщина канала соизмерима со средней длиной свободного пробега молекул газа. Показано, что при $Kn \rightarrow 0$ полученные в работе результаты переходят в соответствующие результаты классической термодинамики. Полученные результаты могут быть использованы для расчета количества тепла, выделяющегося при перекачке газов при низких давлениях.

Список литературы

1. Черчиньяни К. Математические методы в кинетической теории газов. М.: Мир, 1973. 245 с.
2. Шарипов Ф.М., Селезнев В.Д. Движение разреженных газов в каналах и микроканалах. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. 230 с.
3. Barichello L.B., Siewert C.E. A discrete-ordinates solutions for Poiseuille flow in a plane channel // Zeitschrift für Angewandte Math. und Physik. 1999. Vol. 50. P. 972–981.
4. Barichello L.B., Camargo M., Rodrigues P., Siewert C.E. Unified solutions to classical flow problems based on the BGK model // ZAMP. 2001. No. 52. P. 517–534.
5. Siewert C.E. Poiseuille, thermal creep and Couette flow: results based on the CES model linearized Boltzmann equation // European J. of Mechanics B/Fluids. 2002. Vol. 21. P. 579–597.
6. Siewert C.E. The linearized Boltzmann equation: concise and accurate solutions to basic flow problems // Zeitschrift für Angewandte Mathematic und Physik. 2003. Vol. 54. P. 273–303.
7. Латышев А.В., Юшканов А.А. Аналитические решения граничных задач для кинетических уравнений. М.: МГОУ. 2004. 286 с.
8. Garcia R.D.M., Siewert C.E. The linearized Boltzmann equation with Cercignani–Lampis boundary conditions: basic flow problems in a plane channel // European J. of Mechanics B/Fluids. 2009. Vol. 28. P. 387–396.
9. Варгафтик Н.Б. Справочник по теплофизическим свойствам газов и жидкостей. М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит. 1963. 708 с.
10. Латышев А.В., Юшканов А.А. Задача Пуазейля для эллипсоидально-статистического уравнения и почти зеркальных граничных условий. // ЖТФ. 1998. Т. 68, № 11. С. 27–31.

Статья поступила в редакцию 9 ноября 2010 г.