

УДК 531.114

## ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ УПРУГИХ ДИНАМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ДЛЯ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ, ОПИСЫВАЕМЫМИ МНОГОЗНАЧНЫМИ СООТНОШЕНИЯМИ

И. Н. Вассерман, И. Н. Шардаков

Институт механики сплошных сред УрО РАН, 614013 Пермь

Исследовано динамическое поведение стержневых систем с учетом внешних силовых факторов, описываемых многозначными (сублидифференциальными) соотношениями. Дана математическая формулировка задачи в виде динамического квазивариационного неравенства. Решение задачи с помощью разностной схемы Ньюмарка, последовательных приближений и конечно-элементной дискретизации сведено к нахождению на каждом временном шаге минимума выпуклого негладкого конечномерного функционала относительно скоростей. Задача минимизации этого функционала при введении вспомогательных переменных с использованием метода модифицированного лагранжиана сводится к последовательности гладких задач нелинейного программирования. Проведено численное тестирование алгоритма на задаче с одной степенью свободы. Предложенный алгоритм использован для расчета штанговых колонн глубинных насосных установок.

**Ключевые слова:** динамические задачи, стержневые системы, конечно-элементная дискретизация.

**Введение.** Современный уровень развития вычислительной техники и численных методов позволяет рассматривать задачи, изучение которых до сих пор было чрезвычайно трудоемким. К их числу относятся задачи о динамических системах, в которых граничные условия описываются многозначными соотношениями. Для их эффективного решения необходимо применение специальных подходов, например, использование вариационных неравенств.

Исследованию динамического поведения механических систем с разрывными нелинейностями посвящено большое число работ, в которых главное внимание уделялось изучению колебания систем с кулоновским трением. В основном эти работы посвящены исследованию систем с одной или малым числом степеней свободы [1–4]. В работах [5–7] находятся периодические решения и исследуется их устойчивость для систем с разрывными нелинейностями и произвольным числом степеней свободы. В этих работах фазовое пространство системы разделяется на ряд подобластей, внутри которых уравнения, описывающие поведение системы, непрерывны. Этот подход подразумевает построение границ раздела между подобластями и определение точек пересечения фазовой траектории с этими границами, что для систем с большим числом степеней свободы затруднительно.

Задачу о колебаниях системы с трением можно решить как краевую динамическую задачу, взяв в качестве начальных условий решение для линейной системы, близкой к исходной, и проследив за решением на протяжении нескольких периодов.

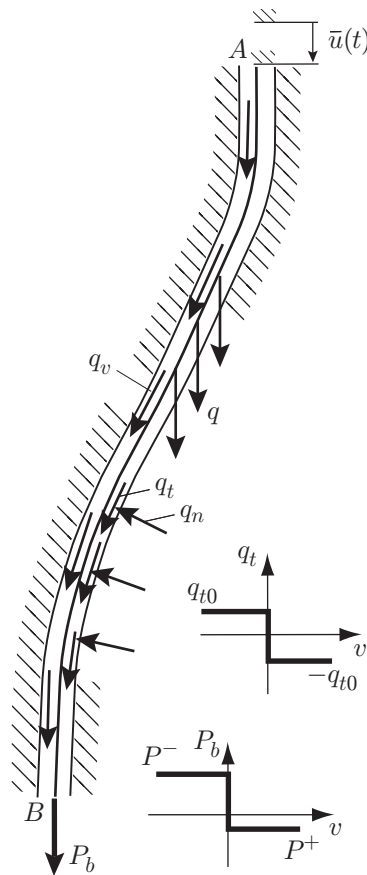


Рис. 1. Расчетная схема

Одной из универсальных и корректных в математическом смысле является постановка краевой задачи с нелинейностями типа трения в виде вариационных и квазивариационных неравенств. Теория этих неравенств подробно изложена в работах [8–12], а их приложения в механике рассмотрены в [13–15].

В данной работе исследуется движение упругой стержневой системы с учетом внешних силовых факторов, описываемых многозначными соотношениями.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается система, представляющая собой тяжелый упругий стержень, находящийся в искривленном канале, по которому течет вязкая жидкость. Распределение давления, плотности и расхода жидкости по длине канала считается известным. Диаметр этого канала на несколько порядков меньше радиуса кривизны оси канала и соизмерим с диаметром стержня. Стержень ограничен стенками канала и может двигаться только вдоль его оси. Расчетная схема рассматриваемой конструкции показана на рис. 1. Верхний конец стержня (точка A на рис. 1) совершает периодическое движение по заданному закону  $\bar{u}(t)$ , а на нижнем (точка B на рис. 1) приложена сила, зависящая от направления его движения:

$$P_B(\dot{u}_B) = \begin{cases} P^-, & \dot{u}_B < 0, \\ [P^+, P^-], & \dot{u}_B = 0, \\ P^+, & \dot{u}_B > 0, \end{cases} \quad P^- > P^+. \quad (1)$$

Здесь  $\dot{u}_B$  — скорость движения нижнего конца стержня;  $P^-$ ,  $P^+$  — сила, действующая на нижний конец стержня при его движении вверх и вниз соответственно.

Со стороны жидкости на стержень при его движении действуют силы вязкого сопротивления, величина которых, отнесенная к единице длины (с учетом знака),  $q_v$  может быть вычислена по формуле

$$q_v = q_Q - C_v \dot{u},$$

где  $q_Q$  — составляющая, обусловленная расходом жидкости в каждом сечении канала;  $C_v$  — коэффициент гидродинамического сопротивления движению стержня.

Влияние гидростатического давления, действующего на стержень со стороны жидкости, учитывается следующим образом. Главный вектор и главный момент системы сил, соответствующей действию всестороннего давления на участок стержня, равны нулю, а перемещения, вызванные продольной деформацией вследствие действия всестороннего давления, малы. Поэтому деформация и сила прижатия к стенкам канала участка стержня, на боковую поверхность которого действует давление  $p_f$ , при продольной силе  $N$  считаются эквивалентными деформации и силе прижатия для стержня, не подвергающегося действию давления. Для эквивалентной продольной силы имеем

$$N_{eq} = N + p_f A \quad (2)$$

( $A$  — площадь поперечного сечения стержня на рассматриваемом участке).

В результате взаимодействия со стенками канала вдоль оси стержня действует сила трения скольжения, направленная против движения. Величина силы трения, отнесенная к единице длины при скольжении, равна

$$q_{t0} = f |q_n|.$$

Здесь  $f$  — коэффициент трения;  $q_n$  — сила прижатия стержня к стенкам канала, отнесенная к единице длины. Вектор этой силы направлен перпендикулярно оси стержня и не имеет осевой составляющей. Величина этой силы зависит от текущего напряженно-деформированного состояния стержня и равна

$$q_n = \sqrt{\left( (q - q_0) \sin \alpha + N_{eq} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \right)^2 + \left( N_{eq} \frac{\partial \theta}{\partial x} \sin \alpha \right)^2}.$$

Здесь  $q$  — вес отрезка стержня единичной длины;  $\alpha$  — угол между касательной к оси стержня и вертикалью;  $\theta$  — азимут (угол, определяющий направление проекции касательной к оси стержня на горизонтальную плоскость);  $q_0$  — вес жидкости, вытесняемой отрезком стержня единичной длины.

Следует отметить, что при исследовании данной системы основные трудности возникают из-за наличия в ней таких нагрузок, как кулоновская сила трения и сила, действующая на нижний конец стержня. Их зависимости от скоростей выражаются многозначными соотношениями: нулевому значению скорости соответствует интервал значений силы. Такие зависимости могут быть представлены в субдифференциальном виде. Пусть  $f(x)$  — выпуклая функция  $n$  переменных. По определению величина  $y$  принадлежит множеству  $\partial f(x)$ , называемому субдифференциалом функции  $f(x)$ , если выполняется неравенство

$$f(x_1) - f(x) \geq (y, x_1 - x)_{\mathbb{R}^n} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

Для одномерного случая, который и имеет место в рассматриваемой задаче, вместо скалярного может быть записано простое произведение  $(y, x_1 - x)_{\mathbb{R}} = y(x_1 - x)$ .

В [10] показано, что в одномерном случае субдифференциал функции может быть представлен в виде

$$\partial f(x) = \{y \in \mathbb{R} \mid f'_-(x) \leq y \leq f'_+(x)\},$$

где  $f'_-(x)$ ,  $f'_+(x)$  — лево- и правосторонняя производные в точке  $x$ . В этом случае для силы, действующей на нижний конец стержня, соотношение (1) с учетом (2) может быть записано в виде

$$-P_{B,eq} \in \partial j_B(\dot{u}_B), \quad (3)$$

где  $j_B(\dot{u}_B)$  — выпуклая негладкая функция, называемая суперпотенциалом и определяемая по формуле

$$j_B(\dot{u}_B) = \sup_{u^* \in K_B} (u^* \dot{u}_B),$$

$$K_B = [-P_{eq}^-, -P_{eq}^+], \quad P_{eq}^- = P^- + p_B A_B, \quad P_{eq}^+ = P^+ + p_B A_B.$$

Субдифференциальные соотношения для распределенной силы  $q_t$ , обусловленной кулоновским трением, записываются в виде

$$-q_t \in \partial j_{t,q_n}(u)(\dot{u}), \quad (4)$$

где

$$j_{t,q_n}(u)(\dot{u}) = \mu |q_n(u)| |\dot{u}| = \sup_{u^* \in K_t(u)} (u^* \dot{u}),$$

$$K_t(u) = [-\mu |q_n(u)|, \mu |q_n(u)|] = [-q_{t0}(u), q_{t0}(u)].$$

Согласно определению субдифференциала соотношения (3) и (4) могут быть записаны в виде вариационного неравенства

$$j_{B,eq}(v) - j_{B,eq}(\dot{u}_B) \geq -P_{B,eq}(v - \dot{u}_B) \quad \forall v \in \mathbb{R} \quad (5)$$

и квазивариационного неравенства

$$j_{t,q_n}(u)(v) - j_{t,q_n}(u)(\dot{u}) \geq -q_t(v - \dot{u}) \quad \forall v \in \mathbb{R}. \quad (6)$$

Для построения решения задачи используется принцип возможных перемещений, который в данном случае имеет вид

$$\int_L \rho \ddot{u} w A dx + \int_L C_v \dot{u} w dx + \int_L N_{eq}(u) \varepsilon(w) dx =$$

$$= \int_L q_t(\dot{u}) w dx + \int_L q_Q w dx + \int_L \left( \rho g \cos \alpha - \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) w A dx + P_{B,eq}(\dot{u}_B) w_B - p_A A_A w_A, \quad (7)$$

где  $P_{B,eq} = P_B + p_B A_B$ ;  $\rho$  — плотность материала стержня;  $A_A$ ,  $A_B$  — площадь поперечного сечения в точках  $A$  и  $B$ ;  $p_A$ ,  $p_B$  — давление жидкости в точках  $A$  и  $B$ ;  $w$  — пробная функция, равная нулю в той точке, где задано перемещение. Исходя из принципа возможных перемещений (7), учитывая субдифференциальные граничные условия (5) и (6) и представляя пробную функцию  $w$  в виде  $w = v - \dot{u}$ , можно прийти к следующей постановке задачи: найти поле перемещений  $u(t)$ , удовлетворяющее динамическому квазивариационному неравенству

$$\int_L \rho \ddot{u}(v - \dot{u}) A dx + \int_L C_v \dot{u}(v - \dot{u}) dx + \int_L N_{eq}(u) \varepsilon(v - \dot{u}) dx +$$

$$+ j_B(v_B) - j_B(\dot{u}_B) + \Phi_{t,q_n}(u)(v) - \Phi_{t,q_n}(u)(\dot{u}) -$$

$$- \int_L q_Q(v - \dot{u}) dx - \int_L \left( \rho g \cos \alpha - \frac{\partial p_f}{\partial x} \right) (v - \dot{u}) A dx + p_A A_A (v_A - \dot{u}_A) \geq 0 \quad \forall v \in U, \quad (8)$$

начальным условиям для  $u$  и  $\dot{u}$ , и такое, что  $\dot{u}(t) \in U$ . Здесь  $U$  — множество допустимых скоростей;  $\Phi_{t,q_n(u)}(v) = \int_L j_{t,q_n(u)}(v) dx$ .

Квазивариационное неравенство (8) можно представить в виде

$$(\rho A \ddot{u}, v - \dot{u}) + (C_v \dot{u}, v - \dot{u}) + a(u, v - \dot{u}) + j_B(v_B) - j_B(\dot{u}_B) + \Phi_{t,q_n(u)}(v) - \Phi_{t,q_n(u)}(\dot{u}) \geq l(v - \dot{u}) \quad \forall v \in U, \quad (9)$$

где  $(u, v) = \int_L uv dx$  — скалярное произведение;  $a(u, v)$  — билинейная форма;  $l(v)$  — линейный функционал.

**2. Численное решение квазивариационного неравенства.** Численное решение квазивариационного неравенства (9) осуществляется следующим образом. Для дискретизации по времени в данной работе используется схема Ньюмарка

$$u^{(n+1)} = u^{(n)} + \Delta t \dot{u}^{(n)} + (1/2 - \beta)(\Delta t)^2 \ddot{u}^{(n)} + \beta(\Delta t)^2 \ddot{u}^{(n+1)}, \\ \dot{u}^{(n+1)} = \dot{u}^{(n)} + (1 - \gamma)\Delta t \ddot{u}^{(n)} + \gamma\Delta t \ddot{u}^{(n+1)},$$

где  $u^{(i)}$ ,  $\dot{u}^{(i)}$ ,  $\ddot{u}^{(i)}$  — перемещения, скорости и ускорения в момент времени  $t_i$ ;  $\Delta t = t_{n+1} - t_n$  — шаг по времени.

Выражая перемещения и ускорения в момент времени  $t_{n+1}$  через  $\dot{u}^{(n+1)}$ , а также через  $u^{(n)}$ ,  $\dot{u}^{(n)}$ ,  $\ddot{u}^{(n)}$ , вычисленные на предыдущем шаге, подставляя их в (9) и используя свойства билинейности формы  $a(\cdot, \cdot)$ , скалярного произведения и линейности функционала  $l(\cdot)$ , получим следующую постановку задачи: найти  $\dot{u}^{(n+1)} \in U_{n+1}$ , удовлетворяющее квазивариационному неравенству

$$\hat{a}(\dot{u}^{(n+1)}, v - \dot{u}^{(n+1)}) + j_B(v_B) - j_B(\dot{u}_B^{(n+1)}) + \Phi_{t,q_n(u^{(n+1)})}(v) - \Phi_{t,q_n(u^{(n+1)})}(\dot{u}^{(n+1)}) \geq \hat{l}(v - \dot{u}^{(n+1)}) \quad \forall v \in U_{n+1},$$

где

$$\hat{a}(u, v) = \frac{\rho}{\gamma \Delta t} (Au, v) + (C_v u, v) + \frac{\beta \Delta t}{\gamma} a(u, v), \\ \hat{l}(v) = l(v) + \rho(\tilde{w}, v) - a(\tilde{u}, v),$$

$\tilde{u}$ ,  $\tilde{w}$  — вспомогательные величины, зависящие от значений перемещений, скоростей и ускорений, вычисленных на предыдущем шаге. В это неравенство входят негладкие функционалы, зависящие от силы прижатия, которая, в свою очередь, зависит от искомого решения. Эту трудность можно преодолеть с помощью подхода, предложенного в работах [12–14]. В этих работах показано, что решение квазивариационного неравенства может быть построено путем последовательного решения вариационных неравенств вида

$$\hat{a}(\dot{u}^{[k+1]}, v - \dot{u}^{[k+1]}) + j_B(v_B) - j_B(\dot{u}_B^{[k+1]}) + \Phi_{t,q_n(u^{[k]})}(v) - \Phi_{t,q_n(u^{[k]})}(\dot{u}^{[k+1]}) \geq \hat{l}(v - \dot{u}^{[k+1]}) \quad \forall v \in U_{n+1},$$

в которых сила прижатия, а значит, и сила трения вычисляются на основе решения, полученного на предыдущей итерации. Здесь  $\dot{u}^{[k]}$  —  $k$ -е приближение поля скоростей  $\dot{u}^{(n+1)}$ ;  $u^{[k]}$  —  $k$ -е приближение поля перемещений. В качестве начального приближения берется значение поля скоростей на предыдущем шаге:  $\dot{u}^{[0]} = \dot{u}^{(n)}$ .

При малом шаге по времени для достижения приемлемой точности может оказаться достаточно одной итерации. В этом случае квазивариационное неравенство можно заменить вариационным

$$\hat{a}(\dot{u}^{(n+1)}, v - \dot{u}^{(n+1)}) + j_B(v_B) - j_B(\dot{u}_B^{(n+1)}) + \\ + \Phi_{t, q_n(u^{(n)})}(v) - \Phi_{t, q_n(u^{(n)})}(\dot{u}^{(n+1)}) \geq \hat{l}(v - \dot{u}^{(n+1)}) \quad \forall v \in U_{n+1}, \quad (10)$$

где сила прижатия вычисляется на основе решения, полученного на предыдущем временном шаге.

Решение вариационного неравенства (10) эквивалентно нахождению минимума негладкого функционала

$$J(\dot{u}^{(n+1)}) = (1/2)\hat{a}(\dot{u}^{(n+1)}, \dot{u}^{(n+1)}) + j_B(\dot{u}_B^{(n+1)}) + \Phi_t(\dot{u}^{(n+1)}) - \hat{l}(\dot{u}^{(n+1)})$$

при  $\dot{u}^{(n+1)} \in U_{n+1}$ .

С использованием схемы Ньюмарка множество допустимых скоростей  $U$  можно записать в следующем виде:

$$U_{n+1} = \{\dot{u}\},$$

причем  $\dot{u} = \hat{u}$  в точке  $A$ . Здесь  $\hat{u} = \gamma(\bar{u}(t_{n+1}) - \tilde{u})/(\beta\Delta t)$ ;  $\bar{u}(t)$  — заданное перемещение верхней точки стержня  $A$  в момент времени  $t$ .

Для реализации алгоритма задачу необходимо свести к конечномерной. С этой целью стержень разбивается на ряд конечных элементов. При этом функционалы, входящие в вариационные неравенства, могут быть представлены в матричном виде

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T K \mathbf{v}, \quad \hat{a}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathbf{u}^T K_* \mathbf{v}, \quad (A\rho\ddot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \ddot{\mathbf{u}}^T M \mathbf{v}, \\ (C_v \dot{\mathbf{u}}, \mathbf{v}) = \dot{\mathbf{u}}^T C \mathbf{v}, \quad l(\mathbf{v}) = \mathbf{b}^T \mathbf{v}, \quad \hat{l}(\mathbf{v}) = \mathbf{b}_*^T \mathbf{v},$$

где

$$K_* = \frac{\beta\Delta t}{\gamma} K + \frac{1}{\Delta t\gamma} M + C, \quad \mathbf{b}_* = \mathbf{b} + M\tilde{\mathbf{w}} - K\tilde{\mathbf{u}}.$$

Здесь  $K$ ,  $M$ ,  $C$  — матрицы жесткости, масс и демпфирования соответственно;  $\mathbf{b}$  — вектор внешних сил;  $\tilde{\mathbf{u}}$ ,  $\tilde{\mathbf{w}}$  — векторы, компонентами которых являются значения  $\tilde{u}$  и  $\tilde{w}$  в дискретных точках.

В результате задача сводится к минимизации конечномерного функционала

$$J^h(\mathbf{v}) = \hat{a}^h(\mathbf{v}, \mathbf{v})/2 + \Phi(\mathbf{v}) - \hat{l}^h(\mathbf{v})$$

при условии  $\mathbf{v} \in U$ .

Согласно [9] дискретная форма негладкого функционала  $\Phi(\mathbf{v})$  вычисляется по формуле

$$\Phi(\mathbf{v}) = \sum_{i=0}^n \Phi_i^h(v_i),$$

где

$$\Phi_i^h(v_i) = \sup_{u^* \in \bar{K}_i} (u^* v_i), \quad \bar{K}_i = \begin{cases} [-Q_i, Q_i], & i = 0, \dots, n-1, \\ [Q^-, Q^+], & i = n, \end{cases} \\ Q_i = \begin{cases} (f/2)|q_{n,0}|\Delta l_0, & i = 0, \\ (f/2)(|q_{n,i-1}|\Delta l_{i-1} + |q_{n,i}|\Delta l_i), & i = 1, \dots, n-1, \end{cases}$$

$$Q^- = -P_{eq}^- - (f/2)|q_{n,n-1}|\Delta l_{n-1}, \quad Q^+ = -P_{eq}^+ + (f/2)|q_{n,n-1}|\Delta l_{n-1},$$

$\Delta l_i$  — длина  $i$ -го элемента;  $q_{n,i}$  — прижимающая сила на  $i$ -м элементе;  $v_i$  —  $i$ -й элемент вектора  $\mathbf{v}$ ;  $n$  — общее число элементов.

При дискретизации множество допустимых скоростей запишется в виде

$$U = \{\mathbf{v} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid v_0 = \hat{u}\}. \quad (11)$$

Условие (11) является простым ограничением.

Как показано в работе [16], задачу минимизации негладкого функционала можно свести к последовательности гладких задач нелинейного программирования с использованием метода модифицированного лагранжиана (метода множителей). Для этого вводятся дополнительные переменные  $z_i$ , а задача приводится к следующему виду: найти минимум по  $\mathbf{v}$  и  $\mathbf{z}$  функционала

$$J_0(\mathbf{v}) + \sum_{i=0}^n \Phi_i^h(v_i - z_i)$$

при  $\mathbf{v} \in U$ ,  $z_i = 0$ ,  $i = 0, \dots, n$ . Здесь  $J_0(\mathbf{v}) = \hat{a}^h(\mathbf{v}, \mathbf{v})/2 - \hat{l}^h(\mathbf{v})$ ;  $\mathbf{z}$  — вектор вспомогательных переменных  $z_i$ .

Применение метода модифицированного лагранжиана при ограничениях  $z_i = 0$  сводится к минимизации функционала

$$L_r(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \lambda) = J_0(\mathbf{v}) + \sum_{i=0}^n \left( \Phi_i^h(v_i - z_i) + \lambda_i z_i + \frac{1}{2} r z_i^2 \right)$$

при условии  $\mathbf{v} \in U$ .

Минимизируя функционал  $L_r(\mathbf{v}, \mathbf{z}, \lambda)$  явно по  $\mathbf{z}$  и используя свойство эквивалентности [16]

$$\inf_{z_i} \left( \Phi_i^h(v_i - z_i) + (\lambda_i, z_i)_{\mathbb{R}^k} + \frac{1}{2} r |z_i|_{\mathbb{R}^k}^2 \right) = \sup_{z_i^*} \left( (v_i, z_i^*)_{\mathbb{R}^k} - \Phi_i^*(z_i^*) - \frac{1}{2r} |z_i^* - \lambda_i|_{\mathbb{R}^k}^2 \right),$$

где  $\Phi_i^*(\cdot)$  — сопряженная с  $\Phi_i^h(\cdot)$  функция, причем для данной задачи

$$\Phi_i^*(z_i^*) = \begin{cases} 0, & z_i^* \in \bar{K}_i, \\ \infty, & z_i^* \notin \bar{K}_i, \end{cases}$$

можно получить следующее выражение для модифицированного лагранжиана:

$$L_r(\mathbf{v}, \lambda) = J_0(\mathbf{v}) + \sum_{i=0}^n \left( \frac{1}{2} r v_i^2 + v_i \lambda_i - \frac{1}{2r} d^2(\lambda_i + r v_i, \bar{K}_i) \right).$$

Здесь  $d(x, A)$  — расстояние от точки  $x$  до множества (отрезка)  $A$  на числовой прямой  $\mathbb{R}$ .

Решение задачи минимизации негладкого функционала сводится к последовательному решению задач минимизации модифицированного лагранжиана  $L_r(\mathbf{v}, \lambda)$  по вектору переменных  $\mathbf{v}$  при фиксированных значениях вектора множителей  $\lambda$ .

Для пересчета множителей можно использовать теорию двойственности. Согласно этой теории определение вектора множителей Лагранжа, при котором достигается оптимум задачи нелинейного программирования, эквивалентно максимизации двойственного функционала

$$D_r(\lambda) = \min_{\mathbf{v} \in U} L_r(\mathbf{v}, \lambda) = L_r(\mathbf{v}(\lambda, r), \lambda),$$

где  $\mathbf{v}(\lambda, r)$  — решение задачи минимизации модифицированного лагранжиана при заданном  $\lambda$ .

Производные модифицированного лагранжиана по  $\mathbf{v}$  и  $\lambda$  можно представить в виде

$$\nabla_{\mathbf{v}} L_r(\mathbf{v}, \lambda) = \nabla J_0(\mathbf{v}) + \mathbf{P}(\mathbf{v}, \lambda, r), \quad \nabla_{\lambda} L_r(\mathbf{v}, \lambda) = -(\lambda - \mathbf{P}(\mathbf{v}, \lambda, r))/r.$$

Здесь  $\mathbf{P}(\mathbf{v}, \lambda, r)$  — вектор-столбец:

$$\mathbf{P}(\mathbf{v}, \lambda, r) = \begin{Bmatrix} P_{\bar{K}_0}(\lambda_0 + rv_0) \\ \vdots \\ P_{\bar{K}_n}(\lambda_n + rv_n) \end{Bmatrix},$$

$P_K(z)$  — проекция точки  $z$  на множество  $K$ .

Учитывая, что  $\nabla_{\mathbf{v}} L_r(\mathbf{v}, \lambda)|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\lambda, r)} = 0$ , выражение для  $\nabla D_r(\lambda)$  можно представить в виде

$$\nabla D_r(\lambda) = \nabla_{\lambda} L_r(\mathbf{v}, \lambda)|_{\mathbf{v}=\mathbf{v}(\lambda, r)}.$$

Если для максимизации двойственной функции использовать метод наискорейшего подъема, то получим формулу пересчета множителей Хестенса — Пауэлла

$$\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)} + r \nabla D_r(\lambda^{(k)}),$$

которая для рассматриваемой задачи принимает вид

$$\lambda^{(k+1)} = \mathbf{P}(\mathbf{v}(\lambda^{(k)}, r), \lambda^{(k)}, r).$$

Минимизация  $L_r(\mathbf{v}, \lambda)$  по  $\mathbf{v}$  при известном  $\lambda$  производится путем решения системы уравнений, представляющей собой условие минимума. Поскольку ограничение (11) является простым, это условие принимает вид

$$\nabla_{v, FR} L_r(\mathbf{v}, \lambda) = 0, \quad v_0 = \hat{u},$$

где  $\nabla_{v, FR}$  — градиент по свободным переменным  $v_i$ . При использовании метода конечных элементов это соотношение принимает вид

$$K_{*,M} \mathbf{v} - \mathbf{b}_{*,M} + \mathbf{P}_M(\mathbf{v}, \lambda, r) = 0. \quad (12)$$

Здесь  $K_{*,M}$  и  $\mathbf{b}_{*,M}$  — модифицированные с целью учета кинематических ограничений приведенные матрица жесткости  $K_*$  и вектор сил  $\mathbf{b}_*$ . Вектор  $\mathbf{P}_M(\mathbf{v}, \lambda, r)$  получается из вектора  $\mathbf{P}(\mathbf{v}, \lambda, r)$  путем замены на нуль элемента вектора, соответствующего заданному перемещению.

Для решения системы (12) можно использовать метод Пикара. Внутренние итерации этого метода для данной задачи можно записать как

$$\mathbf{v}^{(k+1)} = K_{*,M}^{-1}(\mathbf{b}_{*,M} - \mathbf{P}_M(\mathbf{v}^{(k)}, \lambda, r)).$$

Минимизация  $L_r(\mathbf{v}, \lambda)$  по  $\mathbf{v}$  при известном  $\lambda$  может производиться приближенно. Если для приближенной минимизации использовать одну итерацию метода Пикара, а для пересчета множителей — формулу Хестенса — Пауэлла, то процедура решения сведется к известному методу Удзавы [9].

Значение параметра штрафа  $r$  находится из условия сходимости итераций Удзавы [9]

$$0 < r < \lambda_1(K_{*,M}),$$

где  $\lambda_1(K_{*,M})$  — минимальное собственное значение матрицы  $K_{*,M}$ . При выполнении этого условия итерации Пикара являются сжимающими отображениями.



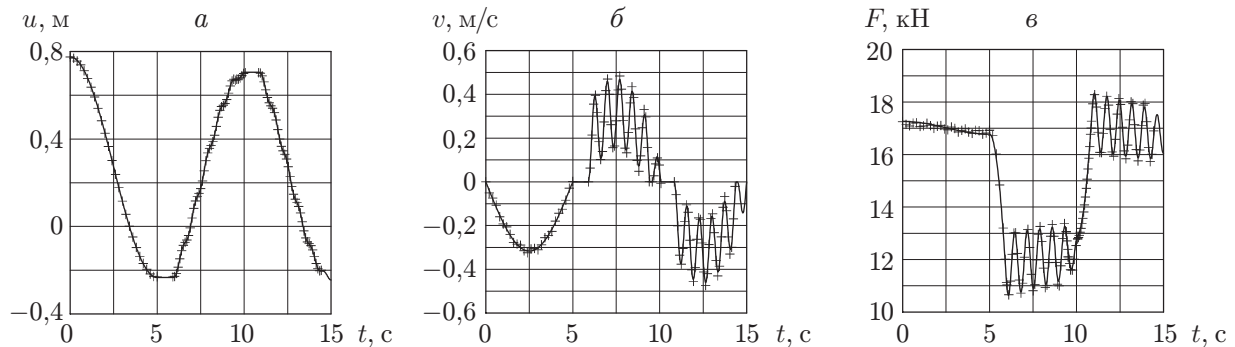


Рис. 2. Зависимости перемещения (а), скорости сосредоточенной массы (б) и усилия в точке подвеса (в) от времени:  
сплошные линии — численное решение; крестики — аналитическое решение

**3. Тестирование алгоритма и его применение для расчета штанговых колонн.** Для тестирования алгоритма численное решение системы, полученной дискретизацией стержня одним элементом, сравнивается с аналитическим решением системы, представляющей собой груз, подвешенный на пружине. Точка подвеса движется по периодическому (в данном случае косинусоидальному) закону. При движении груза вверх на него действует внешняя сила  $P^-$ , при движении груза вниз — сила  $P^+$ . Параметры системы и действующие на нее нагрузки подбираются так, чтобы она была эквивалентна одноэлементной модели. Тестирование алгоритма проводилось при следующих условиях нагружения и параметрах конструкции: длина стержня  $l = 1000$  м, его диаметр  $d = 0,02$  м, период движения верхнего конца стержня  $T = 10$  с, амплитуда  $U_a = 0,5$  м,  $P^- = 5000$  Н,  $P^+ = 0$ .

Численный расчет проводился при шаге по времени  $\Delta t = 0,025$  с и значениях коэффициентов Ньюмарка  $\beta = 0,276$ ,  $\gamma = 0,55$ .

На рис. 2 для данной системы приведены зависимости перемещения  $u$ , скорости сосредоточенной массы  $v$  и усилия в точке подвеса  $F$  от времени. Из рис. 2 следует, что аналитическое и численное решения практически совпадают, при этом различие полученных в численном и аналитических решениях перемещений и усилий не превышает 1 %, скоростей — 3 %.

Полученный алгоритм использован для расчета штанговых колонн в условиях, приближенных к реальным. Для этой системы имеют место следующие многозначные соотношения: 1) зависимость между силой, прикладываемой к нижнему сечению колонны, и скоростью этого сечения, обусловленная работой клапанов глубинного насоса; 2) кулоновское трение штанг о стенки насосно-компрессорной трубы.

Исследовано влияние сил кулоновского трения и вязкого сопротивления на динамическое поведение штанговой колонны при следующих условиях нагружения и параметрах конструкции: длина стержня  $l = 1700$  м, его диаметр  $d_s = 19$  мм, диаметр трубы  $d_t = 62$  мм, период возмущения  $T = 10$  с, амплитуда движения верхнего конца стержня  $a = 3,5$  м,  $P^- = 10000$  Н,  $P^+ = -400$  Н. Верхний конец стержня перемещается по косинусоидальному закону.

Зенитный угол, описывающий геометрию канала, изменяется линейно от  $0^\circ$  в верхнем сечении канала до  $20^\circ$  на глубине 425 м. Этот угол остается постоянным до глубины 1275 м, затем вновь линейно уменьшается до  $0^\circ$  на глубине 1700 м.

Плотность и статический коэффициент вязкости откачиваемой жидкости принимаются постоянными:  $\rho_f = 900$  кг/м<sup>3</sup>,  $\nu = 10^{-4}$  м<sup>2</sup>/с соответственно. Коэффициент трения

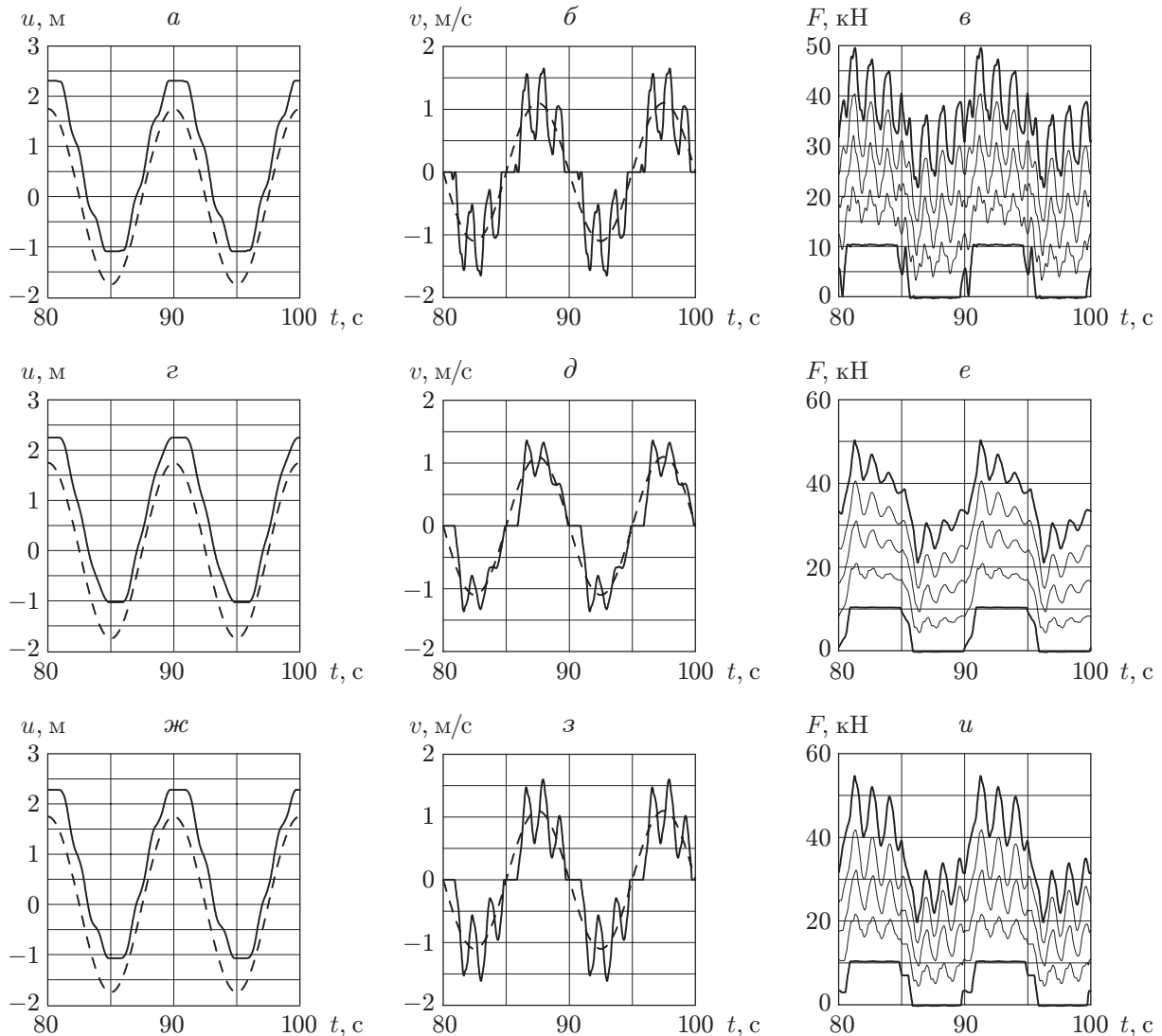


Рис. 3. Влияние сил сопротивления на поведение колонны:

*a, б, в* — в отсутствие сил сопротивления; *г, д, е* — при действии сил гидродинамического сопротивления; *ж, з, и* — при действии сил кулоновского трения; сплошные линии — перемещения и скорости нижнего конца штанговой колонны; штриховые — перемещения и скорости верхнего конца колонны

стержня о стенки трубы  $f = 0,3$ , модуль Юнга  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа, плотность материала стержня  $\rho = 7800$  кг/м<sup>3</sup>.

Численный расчет производился при разбиении штанговой колонны по длине на 80 элементов. Шаг по времени принимался равным  $\Delta t = T/400$ .

На рис. 3 сплошными линиями показаны перемещения и скорости нижнего конца штанговой колонны, а также продольные усилия в серединах 1, 20, 40, 60 и 80-го элементов, что соответствует сечениям штанговой колонны, находящимся на расстояниях от ее верхнего конца, приблизительно равных  $0, L/4, L/2, 3L/4, L$ . Штриховыми линиями показаны перемещения и скорости верхнего конца.

Движение нижнего конца штанговой колонны происходит с остановками, во время которых усилие, действующее на нижний конец колонны, изменяется от минимального значения до максимального. Наряду с колебаниями с частотой возмущающей силы на-

блюдаются собственные колебания, которые возбуждаются дважды за цикл при изменении направления движения нижнего конца колонны.

Силы гидродинамического сопротивления и кулоновского трения влияют на поведение конструкции различным образом. В обоих случаях происходит уменьшение амплитуды перемещения нижнего сечения и увеличение амплитуды продольных усилий в верхнем. Воздействие вязких сил со стороны откачиваемой жидкости заключается в быстром затухании свободных колебаний. Кроме того, наблюдается значительное уменьшение амплитуды скорости нижнего сечения по сравнению со случаем, когда силы гидродинамического сопротивления не учитываются. При действии только сил кулоновского трения затухания свободных колебаний и значительного уменьшения амплитуды скоростей не происходит.

При отсутствии сил кулоновского трения поведение кривых на рис. 3 на участках убывания и возрастания примерно одинаково. При действии сил кулоновского трения этого не наблюдается, поскольку эти силы зависят от сил прижатия, которые, в свою очередь, зависят от текущего состояния рассматриваемой системы.

**Заключение.** Численное тестирование предлагаемого подхода к решению динамических задач с многозначными нелинейностями и сравнение с известным аналитическим решением свидетельствуют о достоверности получаемых результатов.

Предложенный подход и его численная реализация позволили исследовать продольные колебания штанговых колонн глубинных насосных установок и изучить влияние вязкого сопротивления и кулоновского трения на динамическое поведение штанговой колонны.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Бидерман В. Л. Прикладная теория механических колебаний. М.: Высш. шк., 1972.
2. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М.: Наука, 1976.
3. Гуляев В. И., Баженов В. А., Попов С. Л. Прикладные задачи теории нелинейных колебаний механических систем. М.: Высш. шк., 1989.
4. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М.: Наука, 1981.
5. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. М.: Наука, 1985.
6. Фейгин М. И. Вынужденные колебания систем с разрывными нелинейностями. М.: Наука, 1994.
7. Розенвассер Е. Н. Общие уравнения чувствительности разрывных систем // Автоматика и телемеханика. 1967. № 3. С. 52–57.
8. Дюво Г., Лионс Ж.-Л. Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.
9. Гловински Р., Лионс Ж.-Л., Трёмольер Р. Численное исследование вариационных неравенств. М.: Мир, 1979.
10. Панагиотопулос П. Неравенства в механике и их приложения. Выпуклые и невыпуклые функции энергии. М.: Мир, 1989.
11. Байокки К., Капелло А. Вариационные и квазивариационные неравенства. Приложения к задачам со свободной границей. М.: Наука, 1988.
12. Главачек И., Гаслингер Я., Нечас И., Ловишек Я. Решение вариационных неравенств в механике. М.: Мир, 1986.
13. Кравчук А. С. К теории контактных задач с учетом трения на поверхности соприкосновения // Прикл. математика и механика. 1980. Т. 44, вып. 1. С. 122–129.

14. **Вовкушевский А. В.** Вариационная постановка и методы решения контактной задачи с трением при учете шероховатости поверхности // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1991. № 3. С. 56–62.
15. **Alart P., Curnier A.** A mixed formulation for frictional contact problems prone to Newton-like solution method // Comput. Methods Appl. Mech. Engng. 1991. V. 92. P. 353–375.
16. **Бертсекас Д.** Условная оптимизация и метод множителей Лагранжа. М.: Радио и связь, 1987.

*Поступила в редакцию 30/I 2002 г.,  
в окончательном варианте — 18/XI 2002 г.*

---