

**ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ И ТОКОВЫЕ ВОЛНЫ,  
ГЕНЕРИРУЕМЫЕ ПРИ ВХОДЕ УДАРНОЙ ВОЛНЫ  
В ПРОВОДЯЩИЙ ОБРАЗЕЦ  
С ПОПЕРЕЧНЫМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ**

УДК 539.63

**Е. И. Биченков**

**Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,  
630090 Новосибирск**

Ударная волна в проводящем материале как генератор тока. В [1] показано, что при распространении стационарной ударной волны в проводящем материале с поперечным магнитным полем генерируется ток с линейной плотностью

$$i_s = \frac{c}{4\pi} B_0 (n - 1), \quad (1)$$

где  $B_0$  — поле перед фронтом волны;  $n = \rho_f / \rho_0$  — сжимаемость материала. В материале возникает распределение электрического и магнитного полей, приводящее к распространению токовой волны совместно с ударно-волновым фронтом. При этом для стационарности волновой картины необходимо, чтобы за фронтом ударной волны поле было однородным и равным своему «вмороженному» в материал значению  $B_f = nB_0$ , т. е. при стационарном распространении ударной волны токи в области за скачком отсутствуют. Перед скачком формируется стационарный переходный слой, в который диффундирует магнитное поле, и создается соответствующее распределение тока. Довольно неожиданным оказалось, что толщина этого слоя совершенно не зависит от состояния материала за скачком и определяется исключительно проводимостью исходного материала. Для нее получена оценка

$$l_0 = \frac{c}{4\pi\sigma_0} \frac{c}{D}.$$

Мы назвали этот слой диффузионным, а  $l_0$  — диффузионной толщиной токового слоя. В него входит известное в физике время релаксации электрического заряда в материале с проводимостью  $\sigma$ :

$$\tau_r = c / (4\pi\sigma). \quad (2)$$

Помимо диффузионной области часть тока может локализоваться внутри самого фронта ударной волны. Эта часть тока зависит главным образом от отношения толщины фронта ударной волны  $l_w$  к диффузионной толщине  $l_0$  и возрастает с увеличением  $l_w$ .

В гидродинамике плодотворным первым приближением является идеализация ударной волны бесструктурным разрывом с нулевой толщиной ударного фронта. Предположив, что силы, создающие идеальный гидродинамический разрыв, действуют только на ионную основу проводника, и рассмотрев взаимодействие электронной компоненты с ионной в рамках двухжидкостной МГД-модели с трением между компонентами, определяемым только проводимостью материала, нам удалось установить, что плотность электронной компоненты релаксирует к плотности ионов в результате многократных осцилляций, происходящих с так называемой плазменной частотой  $\omega_p = \sqrt{4\pi n_e e^2 / m}$ . Здесь  $n_e$  — плотность электронов в единице объема;  $e$  и  $m$  — заряд и масса электрона. При этом за время рассеяния импульса электрона на ионах  $\tau_0$  совершится  $Q = \omega_p \tau_0$  таких колебаний, т. е.

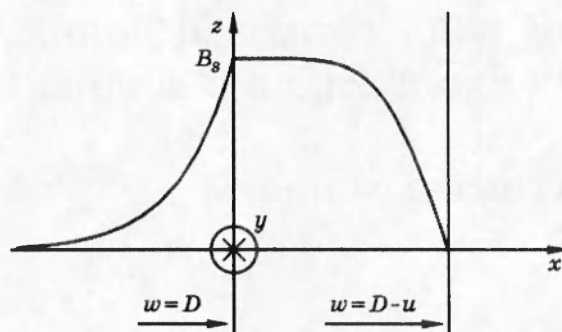


Рис. 1

можно рассматривать величину  $Q$  как своеобразную меру «добротности» материала. Так как время  $\tau_0$  определяет проводимость, можно оценить  $Q$ :  $Q = 14$  для Ti и 500 для Al.

Для времени установления равновесной плотности электронной жидкости получена оценка  $\tau_{ei} \approx 2Q^2(1 + s/n^2)\tau_r$ , где  $\tau_r$  — время релаксации электрического заряда в проводящем материале (2);  $s = \sigma_f/\sigma_0$  — скачок проводимости материала в ударной волне. Это означает, что для проводников типа металлов равновесие плотности электронов и ионов устанавливается практически мгновенно за время  $10^{-13} \div 10^{-15}$  с, и его почти никогда не следует принимать в расчет.

Второй результат рассмотренной задачи состоит в том, что в зону осцилляций плотности электронной жидкости захватывается ничтожный ток с линейной плотностью  $\Delta i_w \approx (2/(1+s))(1+s/n^3)(D^2/c^2)i_s$ . При всей малости этого тока можно показать, что именно он приводит к появлению электрических зарядов на параллельных магнитному полю поверхностях проводящего образца и возникновению связанного с ними электрического поля  $\mathbf{E} = -(1/c)[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$ , компенсирующего ЭДС индукции, генерируемую при движении в магнитном поле проводящего материала с массовой скоростью  $\mathbf{u}$ .

На распределении же магнитного поля составляющая тока, связанная с осцилляциями электронной плотности в ударной волне, практически не сказывается. Для идеального скачка нулевой толщины это означает, что весь ток, возникающий при стационарном распространении волны, сосредоточен перед гидродинамическим разрывом в области, названной нами диффузионной.

**Нестационарная задача формирования токовой зоны ударной волны.** Рассмотрим задачу о формировании токовой зоны при входе ударной волны в проводящий образец. Ограничимся простейшей плоской постановкой. Рассмотрение проведем в системе отсчета, связанной с фронтом ударной волны, которую будем считать идеальным разрывом. На разрыв слева со скоростью  $w = D$  набегают материал с плотностью  $\rho_0$ . После прохождения разрыва плотность мгновенно приобретает значение  $\rho_f$ , и скорость материала падает до  $w = (D - u)$ . Ориентация координатных осей относительно потока материала показана на рис. 1. Ось  $x$  направлена вдоль скорости потока  $\mathbf{w}$ , магнитное поле  $B$  — перпендикулярно потоку вдоль оси  $z$ , электрическое — вдоль оси  $y$ . В результате взаимодействия магнитного поля с потоком проводящего материала установится распределение электрического и магнитного полей и плотности тока. На рис. 1 представлено распределение магнитного поля в некоторый момент времени.

В квазистационарном приближении задача сводится к решению уравнения диффузии магнитного поля [2]

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \frac{\partial(wB)}{\partial x} = \frac{c^2}{4\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{\sigma} \frac{\partial B}{\partial x} \right),$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$B(t, x)_{x \rightarrow -\infty} \rightarrow B_0, \quad B(t, x)_{x=(D-u)t} = B_0.$$

Плотность тока при этом определяется из уравнения Максвелла без токов смещения

$$j = -\frac{c}{4\pi} \frac{\partial B}{\partial x},$$

а электрическое поле — из закона Ома в движущемся проводнике

$$E = \frac{w}{c} B + \frac{1}{\sigma} j.$$

Будем считать ударную волну идеальным разрывом нулевой толщины. В такой постановке задача распадается на две:

- задачу диффузии поля в набегающий поток от  $B_s(t)$ , создаваемого в процессе сжатия материала на фронте ударной волны, к  $B_0$  на бесконечности слева;
- задачу релаксации поля за скачком от  $B_s(t)$  к  $B_0$  на поверхности образца, уходящей от ударного фронта вправо со скоростью  $(D - u)$ .

Так как идеальный бесструктурный гидродинамический разрыв не способен захватить внутрь себя какой-либо заметный ток, то магнитное поле на самом скачке следует считать непрерывным.

По физической природе задачи понятно, что при сжатии магнитное поле на фронте волны возрастает. Это значит, что перед скачком создается ток соответствующего направления. Так как на поверхности образца поле принимает исходное значение, то вблизи нее генерируется ток, равный по величине возникшему перед скачком, но противоположный по направлению. Таким образом, распространение ударной волны в проводящем образце сопровождается возникновением системы двух одинаковых по величине и противоположных по направлению токов, сосредоточенных в области перед фронтом волны и вблизи поверхности образца, которые будем называть током и противотоком.

**Начальные условия задачи.** Разделив задачу на указанные выше две задачи определения поля вверху и внизу по течению, сформулируем для них начальное условие на границе  $x = 0$ . Казалось бы, можно просто принять  $B_s(0) = B_0$  в начальный момент и далее рассмотреть эволюцию поля в процессе сжатия материала. Подобный подход возможен для волны конечной толщины. Но для идеального разрыва сжатие происходит мгновенно, и рассуждения о процессе эволюции поля в процессе сжатия требуют осмотрительности.

Повторив общеизвестные выкладки для деформируемой частицы заданной массы  $\delta m$ , можно прийти к общему результату:

$$\frac{d}{dt}(\delta\varphi) = \delta m \frac{d}{dt} \left( \frac{B}{\rho} \right) \quad (3)$$

( $\delta\varphi$  — магнитный поток, связанный с этой частицей). С другой стороны, закон электромагнитной индукции для области, занятой той же частицей, приводит совместно с законом Ома к соотношению

$$\frac{1}{c} \frac{d}{dt}(\delta\varphi) = \frac{j_1}{\sigma_1} - \frac{j_2}{\sigma_2}, \quad (4)$$

в котором плотности токов и электропроводности определяются на границах частицы.

Так как в начальный момент вне области, занятой волной, токов нет, то из (4) следует, что для идеального разрыва в этот момент времени выполнено условие сохранения потока и в соответствии с (3) на скачке возникает магнитное поле, определяемое условием «вмороженности» в материал:  $B_f = nB_0$ , т. е. с начального момента оно сразу равно стационарному значению для области за скачком. Тем самым задача о распределении

электромагнитного поля и токов, возникающих при входе бесструктурной ударной волны в проводник с поперечным магнитным полем, сводится к решению двух задач о диффузии магнитного поля в движущийся проводник с разными скоростями и электропроводностями сверху и снизу по течению и с одним и тем же стационарным граничным условием  $B(t, 0) = nB_0$ .

Решение сформулированной задачи может быть наглядно представлено следующим образом. На поверхности проводника находятся вложенные друг в друга ток и противоток, величина которых определяется соотношением (1). Входящая в образец через эту поверхность ударная волна отрывает ток от противотока и уносит его с собой. На фронте волны при этом возникает постоянное магнитное поле  $B_f = nB_0$ , а перед фронтом из-за диффузии поля в течение некоторого времени строится диффузионная зона с соответствующим распределением тока в ней. В проводнике, охваченном волновым движением, поле релаксирует к поверхности, принимая на ней исходное значение  $B_0$ , а противоток медленно диффундирует от поверхности образца в движущийся за фронтом волны материал.

Далее будет приведено решение поставленной задачи. Все формулы выписаны в безразмерных переменных, в которых линейный масштаб отнесен к диффузионной толщине токового слоя  $l_0$ , время — к  $l_0/D$ , магнитное поле — к  $B_0$ , электрическое поле — к  $(D/c)B_0$ , плотность тока — к  $(c/4\pi)B_0/l_0$ .

**Поля и токи в области перед скачком.** Для области перед скачком задача решается преобразованием Лапласа по времени и приводит к

$$B(t, x) = 1 + \frac{2(n-1)}{\sqrt{\pi}} \exp(x) \int_{\sqrt{x^2/4t}}^{\infty} \exp\left(-z^2\left(1 + \frac{x}{4z^2}\right)^2\right) dz. \quad (5)$$

Плотность тока и электрическое поле определяются соотношениями

$$j = -\frac{\partial B}{\partial x}, \quad \bar{E} = \bar{B} - \frac{\partial B}{\partial x},$$

и с учетом (5)

$$j(t, x) = \frac{e^x(n-1)}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x^2/4t}}^{\infty} \left(\frac{x}{2z^2} - 1\right) \exp\left(-z^2\left(1 + \frac{x}{4z^2}\right)^2\right) dz - \frac{e^{(x/2-t/4)}}{\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}; \quad (6)$$

$$E(t, x) = 1 + \frac{e^x(n-1)}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{x^2/4t}}^{\infty} \left(1 + \frac{x}{4z^2}\right) \exp\left(-z^2\left(1 + \frac{x}{4z^2}\right)^2\right) dz - \frac{e^{(x/2-t/4)}}{\sqrt{\pi t}} e^{-x^2/4t}. \quad (7)$$

Подчеркнем, что все величины перед скачком зависят только от сжимаемости  $n$ .

Асимптотики распределений полей и токов (5)–(7) для  $t \ll 1$  и  $|x| < t$  имеют вид

$$B(t, x) \simeq n + (n-1)\frac{x}{2} + (n-1)\frac{x}{\sqrt{\pi t}} + \frac{3}{4}(n-1)x\sqrt{t/\pi},$$

$$j(t, x) \simeq -\frac{n-1}{2} - \frac{n-1}{\sqrt{\pi t}} - \frac{3(n-1)}{4}\sqrt{t/\pi}, \quad (8)$$

$$E(t, x) \simeq \frac{n+1}{2} + (n-1)\frac{x}{2} + (n-1)\frac{x-1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{3}{4}(n-1)(x-1)\sqrt{t/\pi}.$$

Для больших времен и по-прежнему для  $|x| < t$  они упрощаются до

$$B(t, x) \simeq 1 + (n-1)e^x, \quad j(t, x) \simeq -(n-1)e^x, \quad E(t, x) \simeq 1 \quad (9)$$

и переходят в стационарные. Отметим, что в этих формулах  $x < 0$ .

**Поля и токи в области позади скачка.** Решение этой части задачи может быть получено из решения задачи о диффузии тока заданной величины с поверхности образца в проводящую область, создаваемую ударной волной, переводящей при сжатии материал из непроводящего в проводящее состояние [3]. После замены переменных и пересчета к новой системе отсчета можно получить для поля за скачком ( $0 < x \leq (t/n)$ )

$$B(t, x) = 1 + (n - 1) \left( 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{s(x - t/n)^2}{4t} \right) \int_0^{\infty} \exp(-z^2) \frac{\text{sh}(zx\sqrt{s}/\sqrt{t})}{\text{sh}(z\sqrt{st}/n)} dz \right). \quad (10)$$

Плотность тока и электрическое поле за скачком определяются соотношениями

$$j = -\frac{\partial B}{\partial x}, \quad E = \frac{B}{n} - \frac{1}{s} \frac{\partial B}{\partial x}$$

и зависят от сжатия материала  $n$  и скачка электропроводности  $s$ :

$$j(t, x) = \frac{2(n - 1)}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{s(x - t/n)^2}{4t} \right) \left( \sqrt{s/t} \int_0^{\infty} z \exp(-z^2) \frac{\text{ch}(zx\sqrt{s/t})}{\text{sh}(z\sqrt{st}/n)} dz - \right. \\ \left. - \frac{s}{2} \left( \frac{x}{t} - \frac{1}{n} \right) \int_0^{\infty} \exp(-z^2) \frac{\text{sh}(zx\sqrt{s/t})}{\text{sh}(z\sqrt{st}/n)} dz \right); \quad (11)$$

$$E(t, x) = 1 + \frac{2(n - 1)}{\sqrt{\pi}} \exp \left( -\frac{s(x - t/n)^2}{4t} \right) \left( \frac{1}{\sqrt{st}} \int_0^{\infty} z \exp(-z^2) \frac{\text{ch}(zx\sqrt{s/t})}{\text{sh}(z\sqrt{st}/n)} dz - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \left( \frac{x}{t} + \frac{1}{n} \right) \int_0^{\infty} \exp(-z^2) \frac{\text{sh}(zx\sqrt{s/t})}{\text{sh}(z\sqrt{st}/n)} dz \right). \quad (12)$$

Асимптотики распределений (10)–(12) для  $t \ll 1$  вблизи поверхности образца ( $x < t/n$ ,  $x \simeq t/n$ ), где плотность тока и электрическое поле максимальны, имеют вид

$$B(t, x) \simeq n - (n - 1) \frac{x}{t/n}, \quad j(t, x) \simeq \frac{n - 1}{t/n}, \quad E(t, x) \simeq 1 - (n - 1) \frac{x}{t/n} + (n - 1) \frac{1}{st/n}. \quad (13)$$

Для больших времен они переходят в

$$B(t, x) \simeq 1 - (n - 1) \left( x - \frac{t}{n} \right) \sqrt{\frac{s}{\pi t}}, \quad j(t, x) \simeq (n - 1) \sqrt{\frac{s}{\pi t}}, \\ E(t, x) \simeq \frac{1}{n} + (n - 1) \sqrt{\frac{s}{\pi t}} - \frac{n - 1}{n} \left( x - \frac{t}{n} \right) \sqrt{\frac{s}{\pi t}}. \quad (14)$$

**Анализ и обсуждение полученных результатов.** Прежде всего надо отметить, что распределение полей и токов перед фронтом ударной волны абсолютно не зависит от проводимости материала за скачком. Это понятно: проводящий материал хорошо экранирует все, происходящее за фронтом волны. Лишь величина тока определяется сжатием магнитного поля и материала. Диффузия тока в набегающий поток вначале происходит довольно быстро —  $\propto 1/t$ . Асимптотики (8) и (9) показывают, что распределение полей и токов перед волной монотонно эволюционирует во времени к стационарному. Замечательно, что решение (5) выходит на стационарное распределение магнитного поля, приведенное в [1], и, как можно показать, происходит это довольно быстро — за время прохождения волной всего нескольких толщин диффузионного токового слоя.

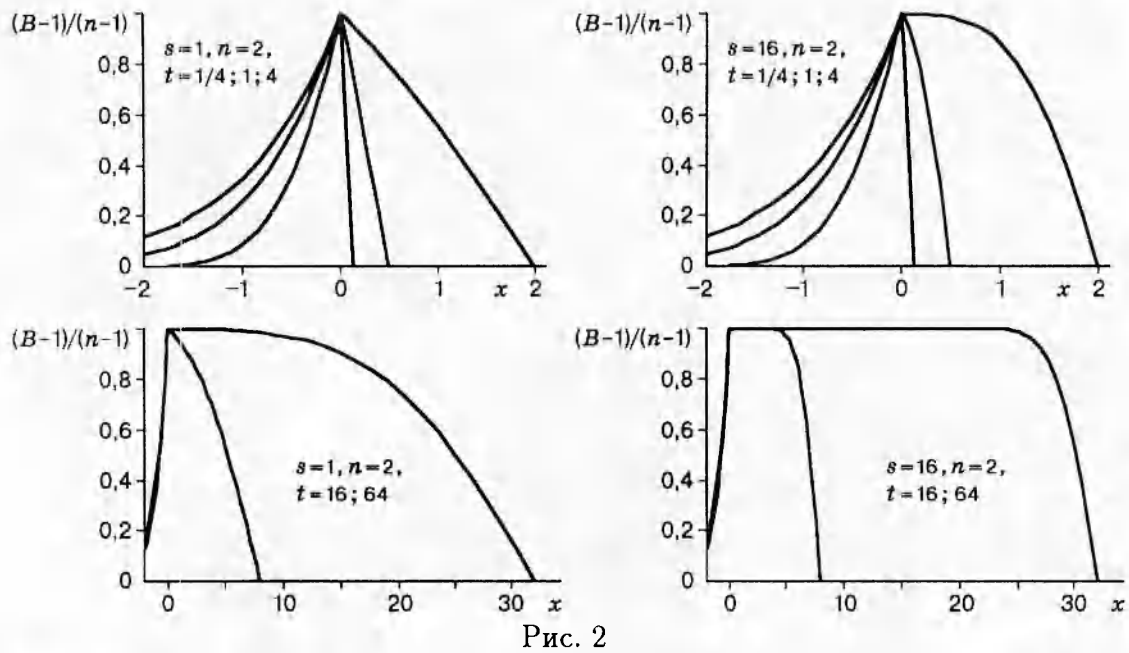


Рис. 2

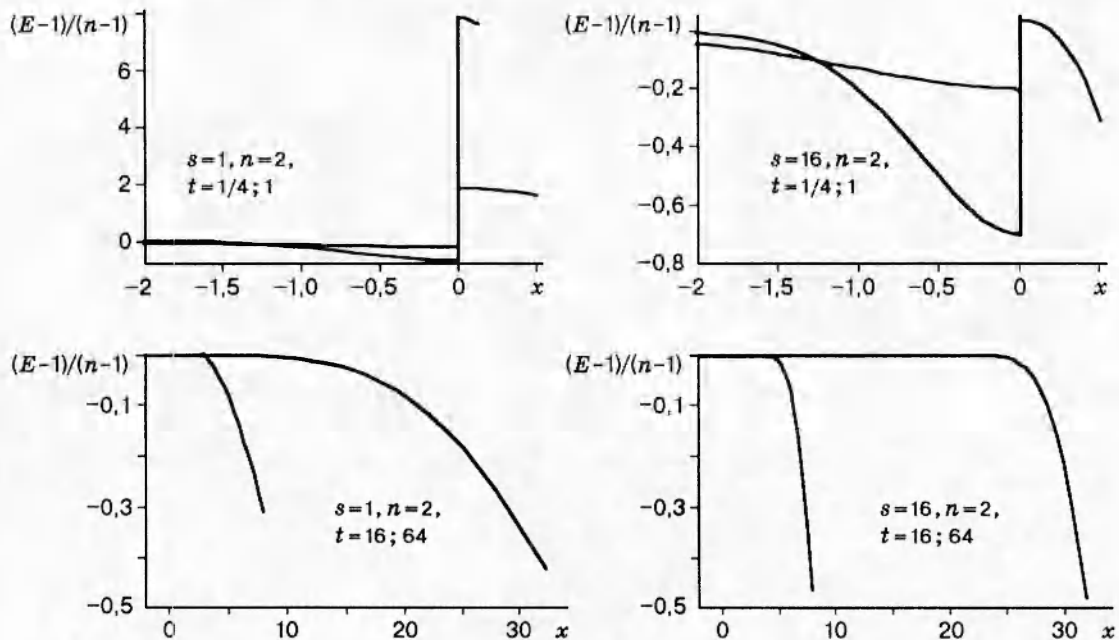


Рис. 3

Из асимптотик (13) и (14) видно, что распределение полей и токов за волной радикально меняется со временем. Вначале ток почти однороден и просто заполняет весь проводящий материал за волной. Магнитное поле при этом практически линейно спадает от своего «вмороженного» значения  $n$  до 1 на поверхности образца. Наиболее резко изменяется электрическое поле — его величина  $\propto 1/t$ . Изменение электропроводности практически никак не влияет на распределение тока и магнитного поля в начальный момент времени. Но для электрического поля ее значение оказывается определяющим —  $E \propto 1/s$  и с ростом проводимости электрическое поле за волной сильно падает. Со временем распределение полей и токов за волной трансформируется к классическому распределению этих величин в обычном скин-слое — все величины оказываются  $\propto \sqrt{s/t}$ .



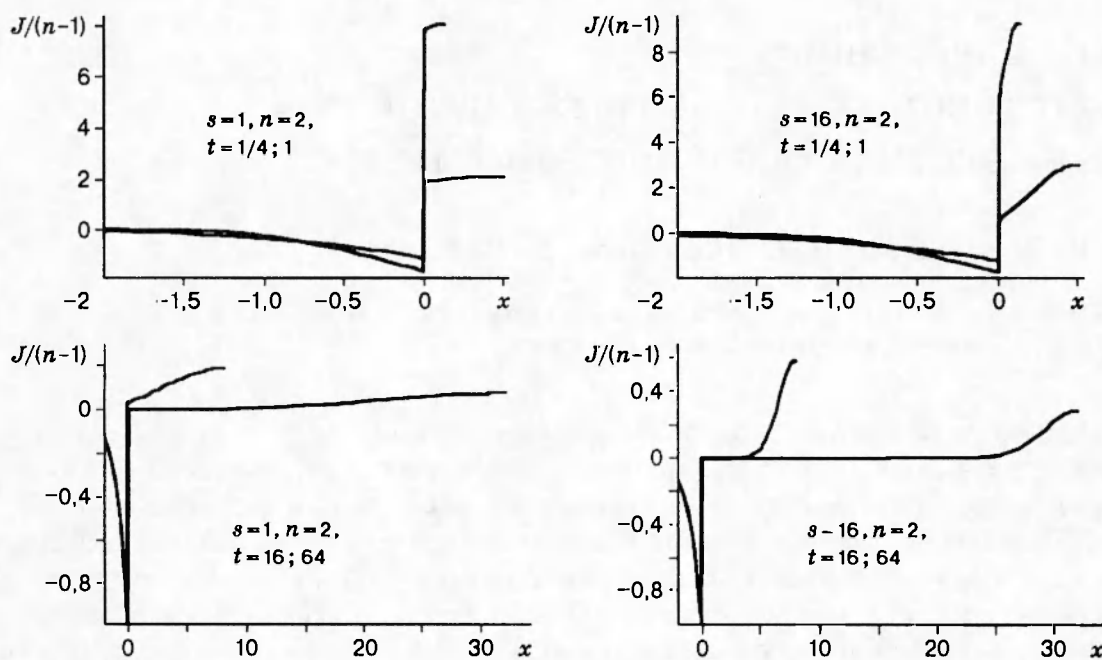


Рис. 4

Детальное представление о динамике изменения полей и токов при распространении ударной волны в образце из проводящего материала можно получить из графиков рис. 2–4, где приведены результаты расчетов полученных в настоящей работе распределений электромагнитного поля и плотности тока. Расчеты были сделаны для материала со сжимаемостью  $n = 2$  для моментов времени  $t = 1/4; 1; 16; 64$ . Для иллюстрации зависимости от изменения электропроводности в ударной волне были рассмотрены два случая: электропроводность не меняется ( $s = 1$ ) и возрастает за скачком в 16 раз ( $s = 16$ ). Вертикальный масштаб для электрического поля и плотности тока на разных графиках рис. 3, 4 различный. Чтобы сравнить результаты с различными электропроводностями, следует иметь в виду, что в одинаковые моменты времени картина перед ударной волной одинакова и не зависит от скачка электропроводности в волне.

Из приведенных графиков видно, что результаты численных расчетов целиком соответствуют качественным выводам, полученным из анализа асимптотик. Формирование стационарной электромагнитной картины перед идеальным гидродинамическим скачком практически происходит всего на четырех диффузионных размерах.

Работа выполнена при поддержке ISF и Российского фонда фундаментальных исследований (совместный грант RVO 300).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Биченков Е. И. Структура стационарной токовой волны, создаваемой ударной волной в проводящем материале с поперечным магнитным полем // Физика горения и взрыва. 1997 (в печати).
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. М.: Наука, 1982.
3. Гилев С. Д., Михайлова Т. Ю. Токовая волна при ударном сжатии вещества в магнитном поле // ЖТФ. 1996. Т. 66, вып. 5. С. 1–9.

Поступила в редакцию 20/XII 1995 г.