

УДК 532.516 + 538.4

## СПОНТАННАЯ ЗАКРУТКА В МГД-ТЕЧЕНИЯХ С КРУГОВЫМИ ЛИНИЯМИ ТОКА

М. С. Котельникова, Б. А. Луговцов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mail: kotelnikova@hydro.nsc.ru

Рассматривается задача об эволюции азимутальных возмущений в осесимметричных магнитогидродинамических течениях идеально проводящей невязкой жидкости с круговыми линиями тока. Жидкость находится в тороидальном зазоре между двумя поверхностями с постоянными значениями функции тока. Выведены уравнения движения жидкости в приближении бесконечно узкого зазора. Численно определены параметры, при которых возможна спонтанная закрутка, и установлены свойства вторичных течений с закруткой, возникающих в результате потери устойчивости исходного стационарного полоидального потока.

**Ключевые слова:** осесимметричный магнитогидродинамический вихрь с замкнутыми линиями тока, устойчивость, численный расчет эволюции азимутальных возмущений, спонтанная закрутка.

**Введение.** Определим спонтанную закрутку. Пусть имеется стационарное осесимметричное (полоидальное) течение невязкой жидкости в ограниченной осесимметричной области, поддерживаемое полем массовых сил (осесимметричным, полоидальным). В цилиндрических координатах

$$\mathbf{r} = (z, r, \varphi), \quad \mathbf{v}_0(z, r) = (w_0(z, r), u_0(z, r), 0).$$

В этот поток вносятся малые осесимметричные возмущения (в общем случае произвольные) с отличной от нуля азимутальной ( $v_\varphi = v$ ) составляющей скорости. Поле массовых сил и границы не возмущаются. Если возмущения затухают или их амплитуда не увеличивается, то течение устойчиво и закрутки не возникает. В случае неустойчивости возмущения нарастают. Если в результате эволюции начальных возмущений в силу точных нелинейных уравнений появляется течение (стационарное, периодическое, нестационарное беспорядочное, турбулентное), в котором средняя азимутальная составляющая скорости конечна:

$$\langle v_\varphi \rangle = \int_0^{2\pi} v_\varphi(t, r, z, \varphi) d\varphi \neq 0,$$

а энергия вращательного движения вокруг оси симметрии сравнима с энергией исходного полоидального течения, то будем говорить о возникновении спонтанной закрутки.

Впервые проблема спонтанной закрутки сформулирована в работе [1] следующим образом: может ли возникать вращательно-симметричное течение при отсутствии явных внешних источников вращения, т. е. в условиях, когда осесимметричное движение без вращения заведомо возможно?

Простейшим примером закрутки потока может служить возникновение стокового вихря [2]. В этом случае механизм, порождающий вращательное движение, так же как при

возникновении интенсивных мезомасштабных атмосферных вихрей (пылевых столбов, смерчей, торнадо), до конца не выяснен. Не исключено, что спонтанная закрутка играет существенную роль в этом механизме. Исследованию проблемы спонтанной закрутки посвящены работы [1–10], в которых приведены результаты исследований данного явления, уточнена постановка задачи и приведены ее различные варианты. Другая трактовка проблемы спонтанной закрутки рассматривается в [3]. Отличие этой трактовки от приведенной выше обсуждается в [10].

В настоящее время большая часть исследований по данной теме проводится в линейной постановке. Вопросы о влиянии нелинейности и характере (структуре, интенсивности) возникающего из-за неустойчивости вторичного течения остаются открытыми.

В данной работе рассматривается задача об устойчивости и эволюции азимутальных возмущений в закритической области в случае осесимметричных магнитогидродинамических (МГД) течений идеально проводящей невязкой жидкости в нелинейной постановке. Тороидальная область течения ограничена круговыми линиями тока. Исследование проводится в приближении бесконечно узкого зазора. Полученные в результате предельного перехода уравнения решаются численно. Определяются значения параметров, при которых возможна спонтанная закрутка, и характеристики вторичных течений с закруткой, возникающих в результате потери устойчивости исходного полоидального потока.

**1. Постановка задачи.** В общепринятых обозначениях течения идеально проводящей невязкой несжимаемой жидкости в магнитном поле описываются следующей системой уравнений (плотность жидкости  $\rho = 1$ ):

$$\mathbf{v}_t - \mathbf{v} \times \operatorname{rot} \mathbf{v} + \mathbf{h} \times \operatorname{rot} \mathbf{h} = \mathbf{F} - \nabla(p + \mathbf{v}^2/2); \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0; \quad (1.2)$$

$$\mathbf{h}_t = \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}); \quad (1.3)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0. \quad (1.4)$$

Здесь  $\mathbf{h} = \mathbf{H}/\sqrt{4\pi}$ ;  $\mathbf{F} = (F_z, F_r, 0)$  — полоидальное поле внешних массовых сил.

Полоидальные компоненты скорости и магнитного поля  $\mathbf{v} = (u, v, w)$ ,  $\mathbf{h} = (h_1, h, h_3)$  стационарных вращательно-симметричных течений жидкости рассматриваемого типа в цилиндрической системе координат  $\mathbf{r} = (r, \varphi, z)$  в общем случае, используя (1.2), (1.4), можно описать соотношениями

$$u = -\frac{\gamma(\psi)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad w = \frac{\gamma(\psi)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad h_1 = -\frac{\varepsilon(\psi)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad h_3 = \frac{\varepsilon(\psi)}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r},$$

где  $\gamma(\psi)$ ,  $\varepsilon(\psi)$  — произвольные зависимости от функции тока  $\psi$ . Далее рассматриваются течения, в которых функции  $\gamma(\psi)$ ,  $\varepsilon(\psi)$  постоянны, поэтому одну из них без ограничения общности можно положить равной единице. Пусть  $\gamma = 1$ . Тогда  $\varepsilon$  приобретает смысл коэффициента пропорциональности полоидальных компонент магнитного поля и скорости  $\mathbf{h}_p = \varepsilon \mathbf{v}_p$  в исходном полоидальном течении. Величину  $\varepsilon$  далее будем называть замагниченностью.

В задаче о спонтанной закрутке источник основного (исходного) полоидального течения не очень важен, поэтому для описания исходного осесимметричного потока в качестве функции тока можно использовать любую достаточно регулярную функцию  $\psi(r, z)$ , принимающую постоянные значения на замкнутых линиях в меридиональной плоскости  $(r, z)$ . Любая такая линия может быть выбрана в качестве границы торообразной области. При наличии соответствующих массовых сил и движения границ любое определенное таким образом течение можно рассматривать как точное стационарное осесимметричное решение МГД-уравнений.

Изучение устойчивости таких течений как аналитическими, так и численными методами является трудной задачей. Поэтому для выяснения основных закономерностей в задаче о возникновении закрутки в течениях с замкнутыми линиями тока наряду с исследованием задачи для вихря Хилла — Шафранова в точной (линейной) постановке для невязкой и вязкой жидкостей проведены также исследования устойчивости для течений, являющихся точными стационарными решениями в указанном выше смысле, в приближенной постановке (узкий зазор в течении с круговыми линиями тока) [9, 10].

**2. МГД-течения с круговыми линиями тока.** Пусть функция тока имеет вид  $\psi(z, r) = \psi(R)$ , где  $R = \sqrt{(r - r_0)^2 + z^2}$  — расстояние от круговой оси тора ( $R < r_0$ );  $r_0$  — расстояние от оси  $z$  до общей круговой оси торов малого радиуса  $R$ . Такое течение можно рассматривать как точное стационарное решение МГД-уравнений в указанном выше смысле.

Введем “азимутальную” и “радиальную” полоидальные составляющие вектора скорости. В исходном течении компоненты скорости

$$q(R, \theta) = w \cos \theta + u \sin \theta = -\frac{1}{r_0 - R \cos \theta} \frac{d\psi(R)}{dR}, \quad p(R, \theta) = w \sin \theta - u \cos \theta = 0,$$

компоненты магнитного поля

$$g(r, \theta) = h_3 \cos \theta + h_1 \sin \theta = -\frac{\varepsilon}{r_0 - R \cos \theta} \frac{d\psi(R)}{dR},$$

$$f(R, \theta) = h_3 \sin \theta - h_1 \cos \theta = 0.$$

В новых переменных  $(R, \theta)$  система (1.1)–(1.4) имеет вид

$$q_t + pq_R + \frac{q}{R} q_\theta + \frac{pq}{R} - s(R, \theta)v^2 = -\frac{1}{R} \Pi_\theta + fg_R + \frac{g}{R} g_\theta + \frac{fg}{R} - s(R, \theta)h^2 + F_z \cos \theta + F_r \sin \theta; \quad (2.1)$$

$$p_t + pp_R + \frac{q}{R} p_\theta - \frac{q^2}{R} + c(R, \theta)v^2 = -\Pi_R + ff_R + \frac{g}{R} f_\theta - \frac{g^2}{R} + c(R, \theta)h^2 - F_r \cos \theta + F_z \sin \theta; \quad (2.2)$$

$$v_t + pv_R + \frac{q}{R} v_\theta + (s(R, \theta)q - c(R, \theta)p)v = fh_R + \frac{g}{R} h_\theta + (s(R, \theta)g - c(R, \theta)f)h; \quad (2.3)$$

$$g_t + pg_R + \frac{q}{R} g_\theta + \frac{pg}{R} = fq_R + \frac{g}{R} q_\theta + \frac{fq}{R}; \quad (2.4)$$

$$f_t + pf_R + \frac{q}{R} f_\theta = fp_R + \frac{g}{R} p_\theta; \quad (2.5)$$

$$h_t + ph_R + \frac{q}{R} h_\theta - (s(R, \theta)q - c(R, \theta)p)h = fv_R + \frac{g}{R} v_\theta - (s(R, \theta)g - c(R, \theta)f)v; \quad (2.6)$$

$$(Rp)_R + q_\theta + (s(R, \theta)q - c(R, \theta)p)R = 0; \quad (2.7)$$

$$(Rf)_R + g_\theta + (s(R, \theta)g - c(R, \theta)f)R = 0, \quad (2.8)$$

где

$$s(R, \theta) = \frac{\sin \theta}{r_0 - R \cos \theta}, \quad c(R, \theta) = \frac{\cos \theta}{r_0 - R \cos \theta}.$$

Рассматриваемое течение заключено между двумя линиями тока, соответствующими значениям  $R = R_0$  и  $R = R_0 + d$ . На решение системы (2.1)–(2.8) накладываются граничные условия: периодичность всех искомых функций  $\bar{F}(R, \theta)$  на линиях тока:

$\tilde{F}(R, 0) = \tilde{F}(R, 2\pi)$  и условие обращения в нуль “радиальных” составляющих  $p, f$  на границах рассматриваемой области:  $p(R_0, \theta) = f(R_0, \theta) = 0, p(R_0 + d, \theta) = f(R_0 + d, \theta) = 0$ .

При выборе соответствующего полоидального поля массовых сил система (2.1)–(2.8) имеет точные стационарные решения (в указанном выше смысле), в которых  $\psi(z, r) = \psi(R)$  — произвольная функция переменной  $R$ . Возникает вопрос: что произойдет при внесении в поток малых осесимметричных возмущений? Ответ на этот вопрос дает решение задачи Коши для системы (2.1)–(2.8). Эта задача может быть решена численно, однако она является очень сложной и требует использования достаточно мощных вычислительных ресурсов. В данной работе предлагается упрощенная математическая модель, которая получается из точной модели с помощью предельного перехода к бесконечно узкому зазору между граничными линиями тока.

**3. Приближение бесконечно узкого зазора между граничными линиями тока.** Пусть течение заключено в области  $R_0 < R < R_0 + d$ . Рассмотрим предельный переход, такой что  $d \rightarrow 0, \rho \rightarrow \infty$ , а величина  $\rho d \rightarrow \rho_*$ . Здесь  $\rho_*$  — конечная величина (масса на единицу площади). Далее будем считать  $\rho_* = 1$ . При этом  $|\mathbf{H}| \rightarrow \infty, \Pi \rightarrow \infty$ , а  $|\mathbf{h}| = |\mathbf{H}|/\sqrt{4\pi\rho} \rightarrow |\mathbf{h}|_*$  и  $\Pi d \rightarrow \Pi_*$  — конечные величины ( $\Pi_*$  — отрицательное поверхностное натяжение). Разность  $\Pi(R_0 + d) - \Pi(R_0) \rightarrow \Delta\Pi$  также конечная величина (перепад давления, обеспечивающий центростремительное ускорение). Составляющие скорости и магнитного поля  $p \rightarrow 0, f \rightarrow 0$ .

Из уравнений неразрывности (2.7), (2.8) следует, что в пределе

$$\begin{aligned} q(t, \theta) &= \frac{Q(t)}{1 - k \cos \theta}, & Q(0) &= Q_0, \\ g(t, \theta) &= \frac{G(t)}{1 - k \cos \theta}, & G(0) &= \varepsilon Q_0, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где  $k = R_0/r_0$ .

Из уравнения (2.4) следует, что в пределе

$$g_t + \frac{q}{R_0} g_\theta = \frac{g}{R_0} q_\theta$$

и с учетом (3.1)

$$g(t, \theta) = \frac{\varepsilon Q_0}{1 - k \cos \theta}.$$

В результате предельного перехода получаем

$$-\frac{q^2}{R_0} + c(R_0, \theta)v^2 = -\Delta\Pi - \frac{g^2}{R_0} + c(R_0, \theta)h^2; \quad (3.2)$$

$$q_t + \frac{q}{R_0} q_\theta - s(R_0, \theta)v^2 = -\frac{1}{R_0} \Pi_* \theta + \frac{g}{R_0} g_\theta - s(R_0, \theta)h^2; \quad (3.3)$$

$$v_t + \frac{q}{R_0} v_\theta + s(R_0, \theta)qv = \frac{g}{R_0} h_\theta + s(R_0, \theta)gh,$$

$$h_t + \frac{q}{R_0} h_\theta - s(R_0, \theta)qh = \frac{g}{R_0} v_\theta - s(R_0, \theta)gv.$$

Уравнение (3.2) определяет перепад давления  $\Delta\Pi$ , обеспечивающий центростремительное ускорение.

Интегрируя (3.3) по периоду, получаем интегральное уравнение, определяющее зависимость величины  $Q(t)$  от времени, и дифференциальные уравнения для азимутальных

компонент поля скорости и магнитного поля в безразмерных переменных (время нормировано на величину  $R_0/q_0$ , а компоненты скорости и магнитного поля  $v, h$  — на величину  $q_0$ ):

$$Q'(t) = \frac{k\sqrt{1-k^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{1-k \cos \theta} (v^2 - h^2) d\theta, \quad Q(0) = 1(Q_0), \quad (3.4)$$

$$v_t + \frac{Q(t)}{1-k \cos \theta} v_\theta + \frac{Q(t)k \sin \theta}{(1-k \cos \theta)^2} v = \frac{\varepsilon}{1-k \cos \theta} h_\theta + \frac{\varepsilon k \sin \theta}{(1-k \cos \theta)^2} h; \quad (3.5)$$

$$h_t + \frac{Q(t)}{1-k \cos \theta} h_\theta - \frac{Q(t)k \sin \theta}{(1-k \cos \theta)^2} h = \frac{\varepsilon}{1-k \cos \theta} v_\theta - \frac{\varepsilon k \sin \theta}{(1-k \cos \theta)^2} v.$$

Полученная в результате предельного перехода интегродифференциальная система (3.4) значительно проще исходной системы (2.1)–(2.8).

**4. Законы сохранения.** Для интегродифференциальной системы (3.4), (3.5) справедливы следующие законы сохранения: закон сохранения энергии

$$\int_0^{2\pi} \frac{1-k \cos \theta}{2} (v^2 + h^2 + q^2) d\theta = \text{const},$$

закон сохранения момента импульса

$$\int_0^{2\pi} (1-k \cos \theta)^2 v d\theta = \text{const},$$

закон сохранения магнитного потока

$$\int_0^{2\pi} h d\theta = \text{const}.$$

Кроме того, имеет место соотношение

$$\int_0^{2\pi} (1-k \cos \theta)^2 v h d\theta + \frac{2\pi\varepsilon}{\sqrt{1-k^2}} Q(t) = \text{const}.$$

При выполнении численных расчетов эти соотношения использовались для контроля точности вычислений.

**5. Стационарные течения.** Рассматриваемая система имеет стационарное решение

$$q(t, \theta) = \frac{Q_0}{1-k \cos \theta}, \quad g(t, \theta) = \frac{\varepsilon Q_0}{1-k \cos \theta},$$

$$v = \frac{a}{1-k \cos \theta} + \varepsilon b(1-k \cos \theta), \quad h = \frac{\varepsilon a}{1-k \cos \theta} + b(1-k \cos \theta),$$

где  $a, b$  — произвольные постоянные. При соответствующем выборе значений произвольных констант это решение описывает аналоги известных стационарных решений в точной постановке: вихрь Хилла, вихрь Хиггса (вихрь Хилла с закруткой), МГД-вихрь Хилла — Шафранова и МГД-вихрь Хиггса (МГД-вихрь с закруткой). Для последнего случая точное аналитическое решение получено в работе [11].

В рамках модели идеально проводящей невязкой жидкости полученное решение является изолированным от множества нестационарных решений.

**6. Линейная устойчивость.** Линейная устойчивость стационарных осесимметричных МГД-течений с замкнутыми линиями тока исследовалась в работе [9]. Из результатов этой работы следует, что в рассматриваемом случае при выполнении условия

$$1 > \varepsilon > \frac{1}{\sqrt{c}}, \quad c = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} (1 - k \cos \theta)^3 d\theta \int_0^{2\pi} (1 - k \cos \theta)^{-1} d\theta = \frac{1 + (3/2)k^2}{\sqrt{1 - k^2}}$$

исходное течение монотонно-неустойчиво. Это условие является достаточным, но не необходимым. Немонотонная неустойчивость может иметь место и при меньших значениях  $k$  (при заданном  $\varepsilon$ ), при которых справедливо указанное неравенство. Определение точной границы в плоскости  $(\varepsilon, k)$  требует проведения большого объема вычислений. Однако, для того чтобы сделать достаточно обоснованный вывод о возможности возникновения спонтанной закрутки, необходимо рассматривать начальные возмущения, удовлетворяющие начальному условию  $h = 0$  [8]. В отсутствие доказательства полноты собственных функций использование спектрального метода не позволяет сделать такой вывод. При указанном выше дополнительном условии область неустойчивости может существенно измениться (или даже исчезнуть), поэтому необходимы численные расчеты задачи с начальными условиями в закритической области, подтверждающие существование неустойчивости при превышении критического значения  $k$ .

**7. Численный расчет.** Для исследования эволюции начальных возмущений полученную систему удобно преобразовать к следующему виду. Положим

$$A = v + h, \quad B = v - h.$$

Тогда для  $A$  и  $B$  получаем

$$Q'(t) = \frac{k\sqrt{1-k^2}}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\sin \theta}{1 - k \cos \theta} AB d\theta, \quad Q(0) = 1; \quad (7.1)$$

$$A_t + \frac{Q(t) - \varepsilon}{1 - k \cos \theta} A_\theta + \frac{(Q(t) + \varepsilon)k \sin \theta}{(1 - k \cos \theta)^2} B = 0,$$

$$B_t + \frac{Q(t) + \varepsilon}{1 - k \cos \theta} B_\theta + \frac{(Q(t) - \varepsilon)k \sin \theta}{(1 - k \cos \theta)^2} A = 0.$$

Начальное возмущение скорости, вносимое в исходное стационарное течение, задавалось в виде

$$A(0, \theta) = B(0, \theta) = A_0 + A_1 \sin f\theta,$$

что соответствует возмущению

$$v(0, \theta) = A_0 + A_1 \sin f\theta, \quad h(0, \theta) = 0$$

( $A_0, A_1$  — некоторые константы, малые по сравнению с единицей;  $f$  — целое число).

Решения системы (7.1) находились численно по начальным данным и условию периодичности  $A(0) = A(2\pi)$ ,  $B(0) = B(2\pi)$ . В расчетах использовалась явная четырехточечная разностная схема второго порядка аппроксимации  $O(\tau^2 + \delta^2)$  [12].

Численные расчеты в закритической области показали, что в результате развития возмущений возникает спонтанная закрутка (в указанном выше смысле), т. е. течение, в котором интенсивность (энергия) вращательного движения сравнима с интенсивностью (энергией) исходного полоидального течения.

На рис. 1–3 приведены результаты вычислений при различных значениях параметров  $\varepsilon$  и  $k$ . На рис. 1 показаны зависимости азимутальной  $E_v$ , полоидальной  $E_q$  и полной  $E$

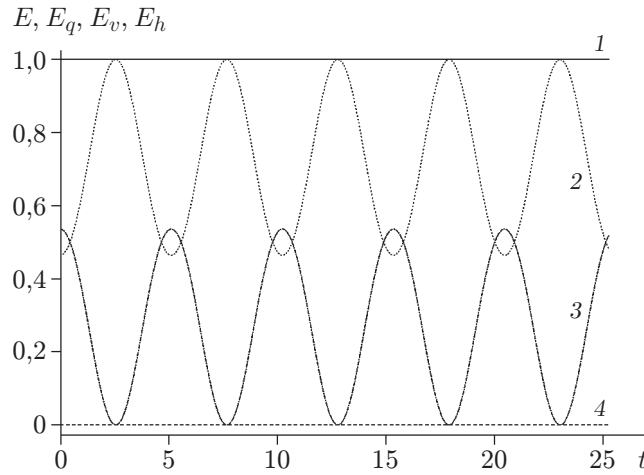


Рис. 1. Зависимости энергии от времени при  $\varepsilon = 0, k = 0,5, A_0 = 1$ :  
 1 — полная энергия  $E$ ; 2 — азимутальная энергия  $E_v$ ; 3 — полоидальная энергия  $E_q$ ;  
 4 — энергия магнитного поля  $E_h$

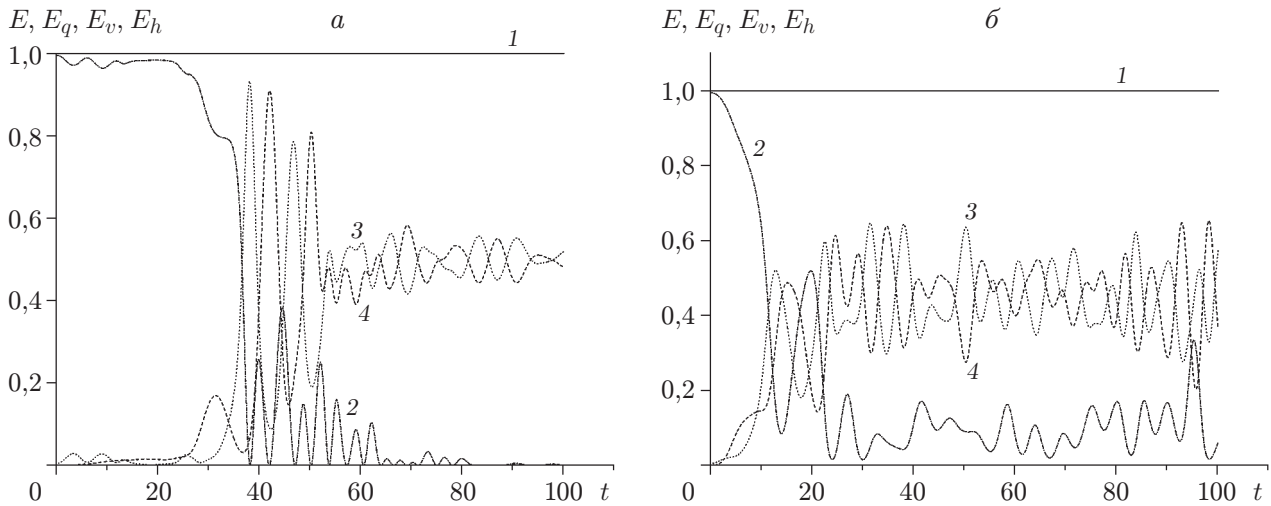


Рис. 2. Зависимости энергии от времени при  $k = 0,5, A_1 = 0,1, f = 1$ :  
 а —  $\varepsilon = 0,05$ ; б —  $\varepsilon = 0,5$ ; остальные обозначения те же, что на рис. 1

энергий (отнесенных к полной начальной энергии) от времени при  $\varepsilon = 0, k = 0,5$ . В этом случае магнитное поле отсутствует (энергия магнитного поля  $E_h = 0$ ), закон сохранения полной энергии выполняется достаточно точно ( $E = 1$ ). При  $\varepsilon = 0$  исходное полоидальное течение устойчиво, а возникающее течение при любых начальных условиях периодически. С увеличением начальной энергии азимутального возмущения период увеличивается.

На рис. 2 те же зависимости приведены для  $\varepsilon = 0,05; 0,50, k = 0,5, v(0, \theta) = 0,1 \sin \theta$ . На рис. 3 представлены зависимости  $v(\theta)$  и  $h(\theta)$  при  $t = 100$ . В этих случаях пространственный период  $2\pi$  по  $\theta$  разбивался на  $N = 800$  ячеек. Из рис. 2, 3 следует, что закон сохранения энергии выполняется с достаточной точностью ( $E = 1$ ). Законы сохранения момента импульса и азимутального потока магнитного поля также выполняются достаточно точно. При выбранном начальном условии эти потоки равны нулю и в процессе расчета отклоняются от нуля не более чем на 0,001.

Полученные результаты показывают, что при  $\varepsilon \neq 0$  вследствие потери устойчивости энергия азимутальных компонент скорости и магнитного поля увеличивается, а энергия

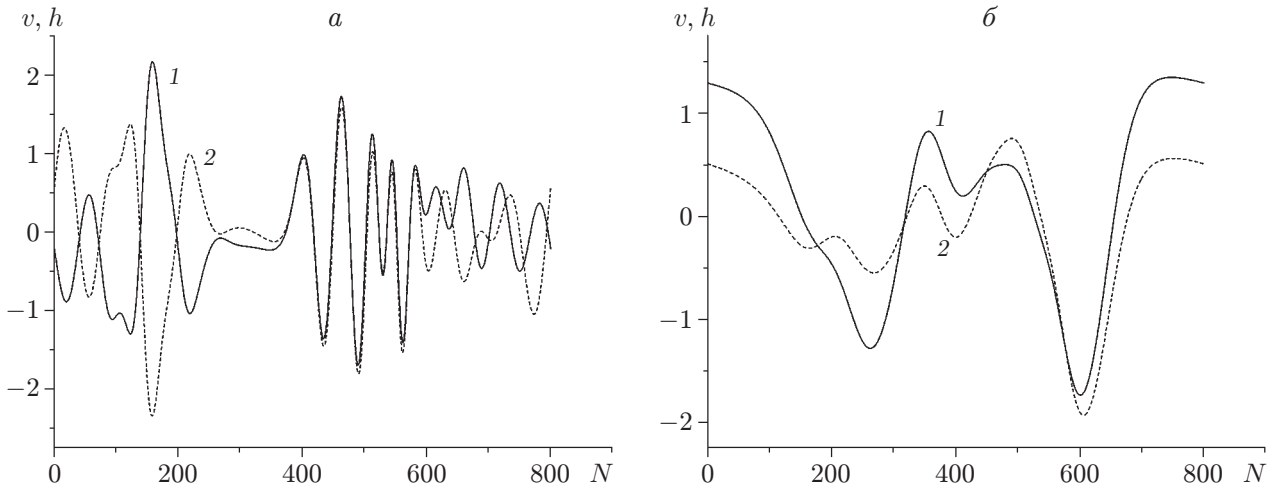


Рис. 3. Зависимости  $v(N)$  (1) и  $h(N)$  (2) при  $k = 0,5$ ,  $A_1 = 0,1$ ,  $f = 1$ :  
 а —  $\varepsilon = 0,05$ ; б —  $\varepsilon = 0,5$

полоидального потока уменьшается практически до нуля (при  $\varepsilon = 0,05$ ). Усредненные по времени энергии магнитного поля и вращательного движения жидкости при больших значениях  $t$  становятся сравнимыми по величине с начальной энергией исходного полоидального потока. Таким образом, возникает спонтанная закрутка (в соответствии с принятым выше определением).

Возникающее в результате потери устойчивости течение имеет нерегулярный (хаотический) характер и во времени, и в пространстве. С увеличением времени растут амплитуды коротковолновых гармоник.

**Заключение.** Результаты проведенного исследования позволяют сделать вывод о возможности возникновения спонтанной закрутки в ограниченной области в жесткой (гарантированное отсутствие втекающего потока осевого момента импульса), но достаточно естественной постановке.

Показано, что при определенных значениях параметров исходного полоидального потока (степени замагниченности  $\varepsilon$  и геометрической характеристики  $k$ ) энергия исходного потока почти полностью переходит в энергию возникающих азимутального (вращательного) поля скорости и магнитного поля. При этом в широком диапазоне значений параметров исходного течения средние (по времени) энергии вращательного движения и магнитного поля при больших  $t$  принимают одинаковые значения.

Отметим, что даже при малой степени замагниченности  $\varepsilon = 0,05$  в результате потери устойчивости появляется значительное по величине магнитное поле, что можно трактовать как спонтанное возникновение магнитного поля за счет растяжения силовых линий слабого начального полоидального магнитного поля. Не исключено, что подобный механизм играет существенную роль в явлении геомагнитного динамо.

В результате численных исследований определены некоторые другие свойства возникающего вторичного течения: при  $\varepsilon = 0$  исходное течение устойчиво, а возникающее течение при любых начальных условиях (не малых) периодически; в случае большой степени надкритичности при  $0 < \varepsilon < 1$  течение имеет нерегулярный (хаотический) во времени характер, а его пространственная структура достаточно сложна: наличие дифференциального вращения, которое является следствием закона сохранения момента импульса и азимутального магнитного потока; увеличение числа максимумов в пространственном распределении амплитуд  $v$  и  $h$  с увеличением времени (по-видимому, неограниченное).



Таким образом, в данной работе показана возможность возникновения спонтанной закрутки с учетом нелинейности. В рассмотренной постановке (модели) не учитывается вязкость жидкости. Результаты исследования линейной устойчивости МГД-вихря Хилла — Шафранова и МГД-течения в узком (но конечном) зазоре между двумя круговыми линиями тока для вязкой жидкости, проведенного в [10], показали возможность возникновения закрутки. Однако вопрос о возможности возникновения спонтанной закрутки с учетом нелинейности и вязкости в ограниченной области остается открытым.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Гольдштик М. А., Жданова Е. М., Штерн В. Н.** Спонтанная закрутка затопленной струи // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 4. С. 815–818.
2. **Лаврентьев М. А.** Проблемы гидродинамики и их математические модели / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.: Наука, 1973.
3. **Гольдштик М. А.** Вязкие течения с парадоксальными свойствами / М. А. Гольдштик, В. Н. Штерн, Н. И. Яворский. Новосибирск: Наука. Сиб. отд-ние, 1989.
4. **Сагалаков А. М., Юдинцев А. Ю.** Трехмерные автоколебательные магнитогидродинамические течения жидкости конечной проводимости в канале кольцевого сечения при наличии продольного магнитного поля // Магнит. гидродинамика. 1993. № 1. С. 41–48.
5. **Луговцов Б. А.** Возможна ли спонтанная закрутка осесимметричного течения? // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 2. С. 50–54.
6. **Губарев Ю. Г., Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях // ПМТФ. 1995. Т. 36, № 4. С. 52–59.
7. **Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных течениях проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ. 1996. Т. 37, № 6. С. 35–43.
8. **Луговцов Б. А.** Осесимметричная спонтанная закрутка в идеально проводящей жидкости в магнитном поле // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 6. С. 29–31.
9. **Луговцов Б. А.** О вращательно-симметричной спонтанной закрутке в МГД-течениях // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 5. С. 120–129.
10. **Котельникова М. С., Луговцов Б. А.** О спонтанной закрутке в осесимметричных МГД-течениях с замкнутыми линиями тока идеально проводящей жидкости // ПМТФ. 2007. Т. 48, № 3. С. 40–50.
11. **Котельникова М. С.** МГД-вихрь Хиггса: Диплом. Новосибирск, 2000.
12. **Самарский А. А.** Устойчивость разностных схем / А. А. Самарский, А. В. Гулин. М.: Наука, 1973.

*Поступила в редакцию 5/XII 2008 г.*