ЛИТЕРАТУРА

1. Г. И. Ксандопуло. Докт. дис. Алма-Ата, 1974.
2. Г. И. Ксандопуло, Б. Я. Колесников, Д. С. Однорог. ФГВ, 1974, **10**, 6, 841.
3. Г. И. Ксандопуло, Б. Я. Колесников, Д. С. Однорог. ФГВ, 1975, **11**, 1, 60.
4. Г. И. Ксандопуло, Б. Я. Колесников, Д. С. Однорог. ФГВ, 1975, **11**, 1, 131.
5. Г. И. Ксандопуло, Б. Я. Колесников и др. ФГВ, 1975, **11**, 3, 412.
6. Г. И. Ксандопуло. XI Менделевский съезд по общей и прикладной химии. Реф. докл. М., «Наука», 1975.
7. G. Sprengler, J. Kern. Brennstoff — Chemie, 1969, **50**, 11, 321.
8. Е. С. Головина, Г. Г. Федоров.— В сб.: Исследование процесса горения. М., Изд-во АН СССР, 1959.
9. Г. И. Ксандопуло, А. А. Сагиндыков и др. IV Всесоюзный симпозиум по горению и взрыву. Тез. докл. Черноголовка, 1974.

О ВЛИЯНИИ ВЯЗКОСТИ ПРОДУКТОВ СГОРАНИЯ НА УСТОЙЧИВОСТЬ ЛАМИНАРНОГО ФРОНТА ПЛАМЕНИ

П. П. Лазарев, А. С. Плешанов

Из всех явлений переноса (вязкость, теплопроводность, диффузия), влияющих на устойчивость ламинарного фронта пламени в несжимаемой среде, первым исследовано влияние именно вязкости [1, 2] (см. также [3, 4]). Результаты оказались противоречивыми: в [1] учет вязкости приводил к дестабилизации пламени, а в [2] — к стабилизации. В [3] справедливо отмечается, что эта разница объясняется различием в виде дополнительного (к постановке [5, 6]) граничного условия. Необходимость в таком условии обусловлена появлением вихревого возмущения перед разрывом из-за диффузии вихрей вследствие вязкости в свежую смесь.

В данном сообщении рассматривается частная ситуация, когда вязкость продуктов сгорания значительно превосходит вязкость свежей смеси, так что диффузией вихрей в свежую смесь можно пренебречь, и вопрос о виде дополнительного граничного условия не возникает. При горении газов, для которых коэффициент вязкости является растущей функцией температуры, меняющейся почти на порядок, такое рассмотрение представляется оправданным.

Учет только вязкости следует понимать так, что исследование ведется фактически при достаточно больших тепловом и диффузионном числах Прандтля.

Считаем течение плоским со стационарной скоростью $\bar{v}$ $(u, 0, 0)$. Наличие скорости, касательной к разрыву, привело бы лишь к переопределению частоты возмущений ω. Возмущенные уравнения непрерывности и Навье — Стокса имеют вид

$$\frac{\partial u'_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial v'_\alpha}{\partial y} = 0, \tag{1}$$

$$\rho_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha\frac{\partial}{\partial x} - \nu_\alpha\Delta\right)\begin{Bmatrix} u'_\alpha \\ v'_\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \partial/\partial x \\ \partial/\partial y \end{Bmatrix} p'_\alpha = 0, \tag{2}$$

где штрих означает возмущение, индексы $\alpha = 1,2$ относятся к средам до и после разрыва соответственно, остальные обозначения обычны.

В (2) ввиду несжимаемости среды опущен член со второй вязкостью. Беря ротор и дивергенцию от (2), получим согласно (1)

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + u_\alpha \frac{\partial}{\partial x} - \nu_\alpha \Delta\right) R'_\alpha = 0, \quad \Delta p'_\alpha = 0, \tag{3}$$

где $R'_\alpha = \partial v'_\alpha/\partial x - \partial u'_\alpha/\partial y$ — z-компонента ротора скорости. Из (3) следует, что в среде распространяются 2 типа возмущений: 1) вихревые, которые в данном случае имеются только в продуктах сгорания; 2) вырожденно-акустические.

Пусть возмущения пропорциональны $\exp(lx + iky + \Omega t)$, где k — волновой вектор задающего возмущения ($\mathrm{Im}(k) = 0$); l — волновой вектор возмущения, распространяющегося от разрыва (для среды до разрыва необходимо $\mathrm{Re}(l) \geqslant 0$, после — $\mathrm{Re}(l) \leqslant 0$); $\Omega = -i\omega$ (для устойчивости необходимо $\mathrm{Re}(\Omega) < 0$). Дисперсионные уравнения, следующие из (3), имеют вид:

$$\Omega + l_{21} u_2 = \nu_2 \left(l_{21}^2 - k^2\right), \quad l_{\alpha 2}^2 - k^2 = 0, \tag{4}$$

где второй индекс означает тип возмущения. Введя $z_\alpha = \Omega/(k u_\alpha)$, $w_2 = l_{21}/k$ и $\lambda_2 = 2\eta_2 k/j$ ($\eta_2 = \rho_2 \nu_2$ — коэффициент вязкости, $j = \rho_\alpha u_\alpha$ — поток массы), получим из (4)

$$z_2 + w_2 = \lambda_2/2 \left(w_2^2 - 1\right). \tag{5}$$

Кроме того, из (1), (2) следуют связи

$$v'_{21} = i w_2 u'_{21}, \quad v'_{\alpha 2} = -(-1)^\alpha i u'_{\alpha 2},$$
$$p'_{\alpha 2} = \left[(-1)^\alpha z_\alpha - 1\right] j u'_{\alpha 2}.$$

Для четырех возмущений (u'_{21}, $u'_{\alpha 2}$ и ζ' — возмущение поверхности разрыва) должно быть 4 граничных условия. Три из них очевидны: непрерывность потока массы

$$\{\delta j\} \equiv \{\rho \delta u\} = 0,$$

непрерывность нормальной компоненты импульса

$$\{\delta g_{xx}\} = \{p' + 2j\delta u - \sigma'_{xx}\} = 0$$

и непрерывность его касательной компоненты

$$\{\delta g_{xy}\} \equiv \{j\delta v - \sigma'_{xy}\} = 0.$$

Здесь

$$\sigma'_{xx_2} = 2\eta_2 \frac{\partial u'_2}{\partial x}, \quad \sigma'_{xy2} = \eta_2 \left(\frac{\partial v'_2}{\partial x} + \frac{\partial u'_2}{\partial y}\right) -$$

возмущенные компоненты тензора вязких напряжений, и вариации компонент скорости содержат возмущение поверхности разрыва

$$\delta u_\alpha = u'_\alpha - \partial \zeta'/\partial t, \quad \delta v_\alpha = v'_\alpha + u_\alpha \partial \zeta/\partial y.$$

В качестве четвертого условия используется условие Ландау [6]

$$\delta u_\alpha = 0,$$

выражающее условие постоянства нормальной скорости горения как величины, определяемой внутренней структурой фронта пламени и, следовательно, не зависящей от возмущений внешней (по отношению к фронту) среды.

Следуя обычной процедуре, получим характеристическое уравнение при $\lambda_2=\lambda$, $z_2=z$, $w_2=w$

$$[-1+\lambda/2(w-1)][(1+\mu)z^2+2(1+\lambda)\mu z-\mu(1-\mu)]+ \\ +\lambda\mu[(2+\lambda)z-(1-\mu)]=0, \tag{6}$$

которое должно быть решено вместе с дисперсионным уравнением (5)

$$z+w=\lambda/2(w^2-1). \tag{7}$$

Здесь $\mu=u_1/u_2=\rho_2/\rho_1\leqslant 1$ и остальные величины отнесены к среде за разрывом. В нулевом приближении по λ имеем уравнение [6]

$$(1+\mu)z_0^2+2\mu z_0-\mu(1-\mu)=0,$$

положительный корень которого z_{0+} приводит к неустойчивости фронта пламени. В следующем приближении

$$z_1=-\frac{\lambda}{2}\frac{\mu(1-\mu)}{\mu+(1+\mu)z_{0+}}<0,$$

т. е. учет вязкости дает тенденцию к стабилизации разрыва.

На самом деле, точный анализ (6), (7) приводит к тому, что устойчивость разрыва не достигается. Доказательство этого утверждения основано на отсутствии каких бы то ни было границ устойчивости при $0<\mu<1$ и $\lambda>0$ и учете неустойчивости предельной ($\lambda\longrightarrow 0$) ситуации [6].

В [7] было указано на возможность существования двух дополнительных границ области устойчивости (помимо нейтральной кривой, где по определению $\mathrm{Re}(\Omega)=0$). На одной границе либо появляются возмущения, растущие по мере удаления от разрыва, либо сам разрыв становится неэволюционным, что означает, согласно [8], превышение числа возмущений над числом граничных условий. Другая граница при выполнении первых условий определяется соотношением $\mathrm{Im}(\Omega)=0$.

Далее кратко излагается ход исследования существования перечисленных границ.

При

$$z=x+iy,\quad w=u+iv$$

дисперсионное уравнение (7) записывается в виде системы

$$x+u=\lambda/2(u^2-v^2-1),\quad y+v=\lambda uv,$$

откуда следует

$$u=(1-\nu)/\lambda,\quad v=-y/\nu, \tag{8}$$

где

$\nu=\sqrt{p+\sqrt{p^2+q}}$; $p=1/2(1+\lambda^2+2\lambda x)$, $q=(\lambda y)^2$. Знак перед ν в (8) выбран так, чтобы при $x=0$ имело место $u\leqslant 0$, т. е. $\nu\geqslant 1$, что необходимо для невозрастания возмущения по мере удаления его от разрыва. Очевидно и при $x<0$ должно соблюдаться условие $u\leqslant 0$, т. е. всегда $\nu\geqslant 1$.

При $x=0$ имеет место $\nu>\lambda$ и действительная часть (6) такова

$$[(1+\mu)\nu(1+\lambda+\nu)+2\lambda(1+\lambda)\mu]y^2+$$
$$+\mu(1-\mu)\nu(1-\lambda+\nu)=0,$$

что невозможно, так как все слагаемые здесь положительны. Таким образом, нейтральная кривая при выполнении перечисленных выше неравенств отсутствует.

При $\nu=1$ имеет место

$$y^2=1-2x/\lambda, \tag{9}$$

и (6) после разделения действительной и мнимой частей имеет вид системы

$$A_1x^2+B_1x+C_1=0,\quad A_2x^2+B_2x+C_2=0, \tag{10}$$

где коэффициенты являются функциями λ и μ. Условие совместности этой системы, имеющее вид

$$\begin{vmatrix} A_1 B_1 \\ A_2 B_2 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} B_1 C_1 \\ B_2 C_2 \end{vmatrix}-\begin{vmatrix} A_1 C_1 \\ A_2 C_2 \end{vmatrix}^2=0, \tag{11}$$

дает искомую связь между параметрами задачи λ и μ на границе, где $\nu=1$. Можно показать, что уравнение (11) имеет единственное положительное решение $\lambda=\lambda(\mu)$. Однако параболы (10) при заданном $0<\mu<$ <1 и полученном λ имеют такие совпадающие корни, для которых значение y^2, согласно (9), оказывается отрицательным, что и доказывает отсутствие границы, где $\nu=1$.

При $y=0$ имеет место

$$x=1/2\lambda[\nu^2-(\lambda^2+1)] \tag{12}$$

и (6) переходит в систему типа (10), где вместо x стоит μ. Коэффициенты системы уже являются функциями λ и ν. Условие (11) дает связь между параметром $\nu>1$ и λ на границе, где $y=0$. Однако параболы типа (10) при заданном $\nu>1$ и полученном λ имеют такие совпадающие корни, для которых или μ оказывается вне интервала [0, 1], либо x, согласно (17), оказывается положительным, что и доказывает отсутствие границы, где $y=0$.

Таким образом, учет вязкости продуктов сгорания оставляет ламинарный фронт пламени абсолютно неустойчивым по отношению к малым возмущениям его поверхности.

Государственный научно-исследовательский энергетический институт им. Г. М. Кржижановского, Москва

Поступила в редакцию 23/II 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Г. Эйбиндер. Вопросы ракетной техники, 1954, 2, 109.
2. В. И. Ягодкин. Изв. АН СССР, ОТН, 1955, 7, 101.
3. Нестационарное распространение пламени. Под. ред. Д. Г. Маркштейна. М., «Мир», 1968.
4. А. Г. Истратов, В. Б. Либрович. Устойчивость пламени ИАН, «Итоги Науки», 1966.
5. G. Darrieus. La Mechanique des fluides. Paris, Dunod, 1941.
6. Л. Д. Ландау. ЖЭТФ, 1944, **14**, 240.
7. П. П. Лазарев, А. С. Плешанов. ФГВ, 1976, **12**, 4.
8. И. М. Гельфанд. УМН, 1959, **14**, 87.