

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕЧЕНИЯ
В ОТКРЫТОМ СУХОМ РУСЛЕ

В. И. Квон (Новосибирск)

Рассматривается плоское течение при изливе воды в сухое русло. Выполнен ряд работ по этой задаче [1-7]; в них или не учитывается сопротивление дна, или использован закон сопротивления в форме Шеви, относящийся, строго говоря, к установившемуся равномерному движению жидкости. Указанный закон сопротивления считается справедливым и при неустановившемся медленно изменяющемся движении. В данной задаче течение имеет существенно нестационарный характер.

Ниже даны постановка и численное решение этой задачи с учетом нестационарных эффектов, рассмотренных в [8].

§ 1. Приближенное представление напряжения трения на дне в окрестности фронта волны. Будем исходить из уравнений для плоского открытого потока [8]

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u^2}{\partial x} + \frac{\partial uv}{\partial y} = g \left(\sin \alpha_0 - \frac{\partial h}{\partial x} \cos \alpha_0 \right) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (1.1)$$

с условиями

$$\tau = 0, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} = v \quad \text{при } y = h(t, x), \quad u = 0, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0 \quad (1.2)$$

Здесь приняты обычные обозначения: t — время; (x, y) — декартова система координат, ось x направлена по неподвижному прямолинейному контуру; u, v — компоненты скорости соответственно по x и y ; p — давление; ρ и ν — плотность и кинематический коэффициент вязкости жидкости соответственно [8].

Функция τ находится из дополнительных соображений, в частности, в § 1 величина τ — известная функция t, x, y .

Отметим, что условия (1.2) приводятся для интегрирования (1.1) по y от 0 до h .

В этом параграфе допускаем возможность разрыва функций $h(t, x)$ и $u(t, x, y)$. Рассмотрение задачи в классе разрывных (обобщенных) решений связано с заменой дифференциальных уравнений интегральными; совершим такую замену.

Пусть $x = \xi(t)$ есть некоторая линия плоскости (x, t) . Выполним следующее преобразование независимых переменных: $\vartheta_1 = x - \xi(t)$, $\vartheta_2 = t$, $\vartheta_3 = y$. Тогда первое уравнение (1.1) с (1.2) можно записать в следующей интегральной форме:

$$\int_{\gamma} A_1 d\vartheta_1 + A_2 d\vartheta_2 = \int_0^{\vartheta_2} \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_1} \left(gh \sin \alpha_0 - \frac{\tau_0}{\rho} \right) d\vartheta_1 d\vartheta_2 \quad (1.3)$$

$$A_1 = - \int_0^h u d\vartheta_3, \quad A_2 = - \xi' \int_0^h u d\vartheta_3 + \int_0^h u^2 d\vartheta_3 + g \frac{h^2}{2} \cos \alpha_0, \quad \xi' = \frac{d\xi(\vartheta_2)}{d\vartheta_2}$$

Здесь τ_0 — напряжение трения на дне, γ — контур области, $0 \leq \vartheta_{2*} \leq \vartheta_2$, $-\vartheta_1 \leq \vartheta_{1*} \leq \vartheta_1$. Пусть функции u, h достаточно гладкие везде, кроме линии $\vartheta_1 = 0$ плоскости $\vartheta_1 \vartheta_2$, а на линии $\vartheta_1 = 0$ эти функции имеют разрыв первого рода.

Тогда дифференцированием соотношения (1.3) по ϑ_2 получим

$$A_2 \Big|_{-\vartheta_1}^{\vartheta_1} = \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_1} \left(gh \sin \alpha_0 - \frac{\tau_0}{\rho} \right) d\vartheta_1 + \vartheta_1 \frac{\partial M_1}{\partial \vartheta_2} \quad (1.4)$$

Здесь M_1 — сумма средних значений интеграла $A_1(\vartheta_{1*}, \vartheta_2)$ на интервалах $-\vartheta_1 \leq \vartheta_{1*} \leq 0$, $0 \leq \vartheta_{1*} \leq \vartheta_1$. Примем ограничения

$$|u| < \infty \quad (0 \leq h < \infty), \quad \left| \frac{\partial M_1}{\partial \vartheta_2} \right| < \infty \quad (0 \leq \xi' < \infty)$$

и введем обозначение

$$\lim_{\vartheta_1 \rightarrow 0} \int_{-\vartheta_1}^{\vartheta_1} - \frac{\tau_0}{\rho} d\vartheta_1 = C(\vartheta_2) \quad (1.5)$$

Тогда из (1.4) при $\vartheta_1 \rightarrow 0$ имеем

$$\int_0^{h-} u_-^2 d\vartheta_3 - \xi' \int_0^{h-} u_- d\vartheta_3 + g \frac{h_-^2}{2} \cos \alpha_0 = \int_0^{h+} u_+^2 d\vartheta_3 - \xi' \int_0^{h+} u_+ d\vartheta_3 + g \frac{h_+^2}{2} \cos \alpha_0 + C \quad (1.6)$$

Здесь u_+ , h_+ и u_- , h_- — предельные значения u , h при стремлении ϑ_1 соответственно слева и справа к нулю.

Из второго уравнения (1.1) и (1.2) аналогично можно получить

$$\int_0^{h_-} u_- d\vartheta_3 - \xi' h_- = \int_0^{h_+} u_+ d\vartheta_3 - \xi' h_+ \quad (1.7)$$

При этом накладывалось ограничение $|\partial M_2 / \partial \vartheta_2| < \infty$. Здесь M_2 — сумма средних значений функции h (ϑ_{1*} , ϑ_2) на интервалах $-\vartheta_1 \leq \vartheta_{1*} \leq 0$, $0 \leq \vartheta_{1*} \leq \vartheta_1$. Для того чтобы получить движение воды по сухому руслу, в соотношениях (1.6) и (1.7) положим $h_+ = 0$. Тогда

$$\int_0^{h_-} u_-^2 d\vartheta_3 - \frac{1}{h_-} \left(\int_0^{h_-} u_- d\vartheta_3 \right)^2 = -g \frac{h_-^2}{2} \cos \alpha_0 + C \quad (1.8)$$

Так как, в силу неравенства Гельдера,

$$\frac{1}{h_-} \left(\int_0^{h_-} u_- d\vartheta_3 \right)^2 \leq \int_0^{h_-} u_-^2 d\vartheta_3$$

то из (1.8) имеем

$$C \geq 1/2 g h_-^2 \cos \alpha_0 \quad (\cos \alpha_0 \equiv \text{const} > 0) \quad (1.9)$$

Пусть известная функция τ_0 такова, что $C \equiv 0$. Тогда из (1.9) следует, что $h_- \equiv 0$.

Пусть функция h такова, что $h_- \equiv 0$. Тогда из (1.8) следует, что τ_0 должна обладать свойством $C \equiv 0$. Таким образом, для того чтобы $h_- \equiv 0$, необходимо и достаточно, чтобы $C \equiv 0$. Если $C > 0$, то $h_- > 0$. Действительно, пусть $h_- = 0$ при некотором значении $\vartheta_2 = \vartheta_{20}$, тогда, согласно (1.8), имеем $C(\vartheta_{20}) = 0$, что противоречит условию $C > 0$. Значит, $h_- > 0$.

Соотношение (1.5) при $C \equiv 0$ накладывает некоторое ограничение на τ_0 . Например, это ограничение выполнится, если

$$\frac{\tau_0}{\rho} = K(\vartheta_2) \vartheta_{10}^{-\sigma} \quad (\vartheta_{10} \geq 0), \quad \frac{\tau_0}{\rho} \equiv 0 \quad (\vartheta_{10} \leq 0) \quad (1.10)$$

в окрестности значения $\vartheta_1 = 0$.

Здесь вещественное число $\sigma < 1$, функция $K(\vartheta_2)$ ограничена, $\vartheta_{10} = -\vartheta_1$.

Напряжение на дне $\tau_0 = 0$ при $\sigma < 0$ и $\vartheta_{10} = +0$. Исключение этого случая происходит, когда $0 \leq \sigma < 1$.

Таким образом, в малой окрестности значения $\vartheta_1 = 0$ получено некоторое представление напряжения трения на дне открытого потока.

§ 2. О коэффициенте сопротивления трения. При выводе коэффициента сопротивления λ в работе [8] предполагалось, что глубина жидкости $h \gg k$, где k — средняя высота влияния выступов шероховатости. Ниже делается попытка распространить эту формулу для λ и на случаи, когда глубина h близка к нулю или в отдельных точках $h = 0$. Такие значения глубина h принимает, например, в окрестности фронта волны, движущейся по сухому руслу. В случае равномерного движения λ имеет вид [8]

$$\lambda_p = \left[\alpha / \left(\ln \frac{h}{k} + \alpha\beta - 1 \right) \right]^2 \quad (2.1)$$

Здесь α и β — универсальные константы турбулентности. Формула (2.1) показывает, что монотонное возрастание функции λ_p от глубины h нарушается при значениях h порядка величины k и меньше.

В рамках условия $k \ll h$, принятого при выводе λ_p и λ , видоизменим формулу для λ_p так, чтобы она монотонно возрастала при уменьшении h . При этом изменится и λ . Полученные таким образом λ_p , λ будем считать справедливыми для всех значений глубины h (оказалось, что результаты расчетов находятся в хорошем соответствии с экспериментом). Так как

$$\ln \frac{h}{k} + \alpha\beta - 1 = \ln \left[1 + e^{\alpha\beta-1} \frac{h - ke^{1-\alpha\beta}}{k} \right]$$

и $k \ll h$, то можно написать

$$\ln \frac{h}{k} + \alpha\beta - 1 = \ln \left[1 + \frac{h}{k} e^{\alpha\beta-1} \right]$$

пренебрегая величиной $k \exp(1 - \alpha\beta)$, малой по отношению к глубине h . Теперь видно, что в случае равномерного движения жидкости имеет место формула

$$\lambda_p = [\alpha / \ln(1 + h/D)]^2$$

При этом коэффициент сопротивления λ при нестационарном течении примет вид

$$\lambda = \left[\alpha \frac{1 + \sqrt{1 + \omega}}{2\omega_1} \right]^2 \quad \left(\omega_1 = \ln \left(1 + \frac{h}{D} \right) + 0.5, \quad D = ke^{1-\alpha\beta} \right) \quad (2.2)$$

$$\omega = 2g\omega_1 h \frac{\sin \alpha_0 - \cos \alpha_0 \frac{\partial h}{\partial x}}{\alpha^2 |w| w}, \quad w = \frac{1}{h} \int_0^h u dy$$

Здесь w — скорость воды. В дальнейшем будем пользоваться формулой (2.2) и полагать ее справедливой и при малых значениях глубины жидкости.

§ 3. Постановка задачи об изливе воды в сухой канал. Пусть горизонтальный канал постоянного прямоугольного сечения, простирающийся до бесконечности в обе стороны, имеет тонкую перегородку — щит в сечении $x = 0$. Первоначально для $x < 0$ вода имеет глубину $H = \text{const}$ и находится в покое, а за щитом вода отсутствует. В момент времени $t = 0$ щит мгновенно убирается. Задача состоит в том, чтобы определить последующее движение воды для всех x и t . Такую схему иногда называют разрушением плотины [1]. Пусть $\alpha_1 > 1$ такое, что

$$\alpha_1 w^2 = \frac{1}{h} \int_0^h u^2 dy$$

Для неустановившихся движений в открытых руслах обычно второй корректив скорости α_1 принимается равным единице. Тогда интегрирование дифференциальных уравнений (1.1) с условиями (1.2), $\sigma_0 = 0$ по y в пределах от 0 до h дает

$$\frac{\partial w h}{\partial t} + \frac{\partial w^2 h}{\partial x} + g h \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\tau_0}{\rho}, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial w h}{\partial x} = 0 \quad (3.1)$$

Отсюда, заменив τ_0 / ρ выражением $\lambda |w| w$, (см. [8]), выполнив преобразование

$$w = w^* \sqrt{gH}, \quad h = h^* H, \quad t = t^* \sqrt{H/g}, \quad x = x^* H$$

и опустив индекс *, получим систему уравнений

$$\frac{\partial w}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial h}{\partial x} = - \frac{\lambda}{h} |w| w, \quad \frac{\partial h}{\partial t} + w \frac{\partial h}{\partial x} + h \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad (3.2)$$

Характеристиками системы уравнений (3.2) являются

$$\frac{dx}{dt} = w \pm \sqrt{(1 - \mu) h} \quad \left(\mu = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\lambda}{1 + \omega} \right) 0.5 \right)$$

Опишем математически указанную схему излива жидкости при удалении преграды так. Дана нелинейная система дифференциальных уравнений (3.2). В плоскости $x t$ выделим область Γ , ограниченную линиями

$$\frac{dx}{dt} = - \sqrt{1 - \mu_*} = -c, \quad x(0) = 0 \quad \left(\mu_* = \frac{1}{2 \ln(1 + HD^{-1}) + 1} \right) \quad (3.3)$$

$$dx/dt = w_*, \quad x(0) = \delta \quad (3.4)$$

Здесь w_* — скорость воды в точке пересечения свободной поверхности с дном потока. Ее называют еще скоростью фронта волны.

Область Γ для значений $t \geq 0$ обозначим Γ_+ . На границах области Γ_+ зададим следующие краевые условия: $w = 0$ на (3.3), $h = 0$ на (3.4), $w = 0$ и $h = h(x)$ на отрезке $0 \leq x \leq \delta$, причем $h(\delta) = 0$.

Требуется найти решение этой краевой задачи для системы (3.2) в области Γ_+ . Нетрудно показать, что (3.3) и (3.4) являются характеристиками системы (3.2) для решения, удовлетворяющего условиям:

1) на (3.3)

$$\partial h / \partial x < 0$$

2) на (3.4)

$$|w| < \infty, \quad |\partial w / \partial t| < \infty, \quad |\partial w / \partial x| < \infty$$

§ 4. Метод численного расчета и результат. В системе уравнений (3.2) совершим преобразование независимых переменных $x^* = x + ct$, $t^* = t$ и опустим индекс *. Ниже под (3.2) будет пониматься эта преобразующая система, описывающая движение воды в подвижной системе координат. Отметим, что в новой системе координат (3.3) переходит в $x = 0$, а (3.4) — в $dx/dt = w_* + c$, $x(0) = \delta$.

1. Остановимся на некоторых особенностях, встречающихся при решении данной задачи предлагаемым методом.

Прежде всего отметим, что расчеты были проведены для $0 < \delta \ll 1$ (физически это означает, что форма щита близка к вертикальной).

Были рассмотрены следующие начальные формы свободной поверхности

$$(a) h(x) = 1 - \frac{x}{\delta} \quad (0 \leq x \leq \delta), \quad (b) h(x) = \left(1 - \frac{x}{\delta}\right)^{(1-\sigma)/2} \quad \begin{matrix} (0 \leq x \leq \delta) \\ (0 \leq \sigma < 1) \end{matrix}$$

В случае (b) начальная глубина учитывает особенность решения (3.1) с (1.10) в окрестности фронта сплошной волны [4].

Расчеты показали, что между случаями (a) и (b) нет существенного различия.

Для любого момента времени t число точек по x -оси $N = \text{const}$, т. е. шаг Δx_i изменяется со временем. Элементы подвижной разностной сетки в плоскости xt и граничная кривая $dx/dt = w_* + c$, $x(0) = \delta$ изображены на фиг. 1.

Аппроксимация системы (3.2) производится так: производные

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \frac{\psi_n^{i+1} - \psi_n^i}{\Delta t_{i+1}} - \frac{x_n^{i+1} - x_n^i}{\Delta t_{i+1}} \frac{\psi_{n+1}^{i+1} - \psi_{n-1}^{i+1}}{2\Delta x_{i+1}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{\psi_{n+1}^{i+1} - \psi_{n-1}^{i+1}}{2\Delta x_{i+1}}$$

коэффициенты при производных в левой части берутся на предыдущем слое; правая часть первого уравнения системы

$$\lambda \frac{\text{sign}(w)}{h} w^2 \approx \lambda_n^i \frac{\text{sign}(w_n^i)}{h_n^i} [2w_n^i w_n^{i+1} - (w_n^i)^2]$$

Такая аппроксимация правой части первого уравнения системы принята для получения устойчивой разностной схемы.

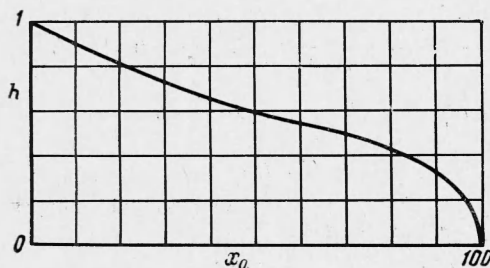
Система дифференциальных уравнений (3.2) имеет особенность на граничной линии $dx/dt = w_* + c$, $x(0) = \delta$, так как $h = 0$. При вычислении $w_{N-1}^{i+1} = w_{N-1}^{i+1}$ в системе (3.2) коэффициенты при производных и выражение λ/h берутся в точке $x_{N-1}^i = (N-1)\Delta x_i$, а производные аппроксимируются так:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} \approx \frac{\psi_N^{i+1} - \psi_N^i}{\Delta t_{i+1}} - \frac{x_N^{i+1} - x_N^i}{\Delta t_{i+1}} \frac{\psi_N^{i+1} - \psi_{N-1}^{i+1}}{\Delta x_{i+1}}, \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} \approx \frac{\psi_N^{i+1} - \psi_{N-1}^{i+1}}{\Delta x_{i+1}}$$

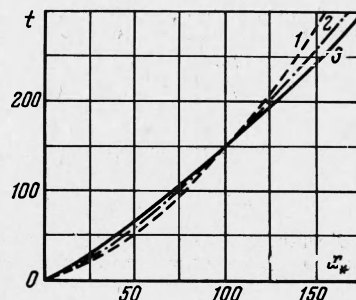
Полученные таким образом системы разностных уравнений решаются методом матричной прогонки. Исследование устойчивости разностной схемы не производилось. Однако счет показал, что схема устойчива.



Фиг. 1



Фиг. 2



Фиг. 3

2. Приведем некоторые результаты численного решения задачи на ЭВМ. Параметры задачи были приняты следующие:

$$H = 0.11 \text{ м}, \quad T = 300 \quad (0 \leq t \leq T); \quad k = 0.0028 \text{ м}$$

Выбор параметров согласован с экспериментальным материалом работы [4]. Напомним, что решение задачи получено в безразмерном виде. На фиг. 2 изображена кривая зависимости глубины воды h от x_0 в момент времени $t = T$; x_0 опреде-

ляется из $x = 4.64 x_0$. На фиг. 3 — кривые

$$x_* = \int_0^t w_* dt$$

характеризующие закон движения фронта волны, причем кривые теории и эксперимента, обозначенные соответственно цифрами 1 и 2, приведены из работы [4] Р. Дресслера, а кривая 3 — из предлагаемого численного решения.

Автор благодарит О. Ф. Васильева за руководство и внимание к работе.

Институт гидродинамики
СО АН СССР

Поступила 5 II 1966

ЛИТЕРАТУРА

1. Стокер Д. Д. Волны на воде. Изд. иностр. лит., 1959.
2. Dressler R. F. Hydraulic resistance effect upon the dam-break functions. J. Res. Nat. Bur. Standards, 1952, vol. 49, No 3.
3. Whitham G. B. The effects of hydraulic resistance in the dam-break problem. Proc. Roy. Soc., 1955, No 1170.
4. Dressler R. F. Comparison of the theories and experiments for the hydraulic dam-break wave. Internat. Assoc. Scien. Hydrology, Generale di Roma, 1954, Publ., vol. 111. No. 38.
5. Faure J., Nahas N. Etude numerique et experimentale d'untumescences a forte courbure du front. La Houille blanche, 1961, No. 5.
6. Montuori C. Immissione di una portata costante in un canale vuoto. Estratto da «Atti Fondazione Politecnica del Mezzogiorno d'Italia», 1960, vol. 5.
7. Montuori C. L'onda di riempimento di un canale vuoto. L'Energia Elektrica. 1964, vol. 41. No 12.
8. Васильев О. Ф., Квон В. И. О влиянии нестационарности при движении открытого потока жидкости. ПМТФ, 1966, № 1.

РАСТЕКАНИЕ ВЯЗКОЙ КАПЛИ ПРИ УДАРЕ

Э. И. Андрианкин (Москва)

Решение задачи о безынерционном растекании капли при ударном сжатии в предположении о постоянстве коэффициента вязкости было получено Рейнольдсом и применено в работе [1] к анализу чувствительности жидких взрывчатых веществ. Представляет интерес учесть силы инерции и зависимость коэффициента вязкости μ от температуры, так как от этих факторов зависят разогрев жидкости и закон торможения ударника. Рассмотрен также характер выхода решения на стационарный режим.

Предположим, что радиус основания ударника R совпадает с начальным радиусом тонкого цилиндрического слоя вязкого вещества толщиной δ_0 . Масса ударника m , начальная скорость V_0 . После упрощений, следующих из малости отношения δ_0/R , уравнения гидродинамики запишутся так:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial r} + v \frac{\partial u}{\partial z} = - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial z} \mu \frac{\partial u}{\partial z}, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial ur}{\partial r} + \frac{\partial v}{\partial z} = 0, \quad u(r, 0, t) = 0, \quad u(r, \delta, t) = 0$$

$$v(r, 0, t) = 0, \quad v(r, \delta, t) = w, \quad p(R, t) = 0$$

Жидкость будем считать негеплопроводной. Тогда диссипированная энергия в лагранжевой частице с координатами r_0 и z_0 сохраняется

$$\left(\frac{dT}{dt} \right)_{r_0, z_0} = \frac{\mu}{\rho_0 c_p} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{r, t}^2, \quad \left(\frac{\partial r}{\partial t} \right)_{r_0, z_0} = u, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{r_0, z_0} = v \quad (2)$$

$$T(r_0, z_0, 0) = 0, \quad r(r_0, z_0, 0) = r_0, \quad z(r_0, z_0, 0) = z_0$$

Если $R/c \ll \tau_1$ (c — скорость звука в ударнике, $\tau_1 = \delta_0/v_0$ — характерное время удара), то закон торможения груза запишется так:

$$m \frac{dw}{dt} = 2\pi \int_0^R p r dr, \quad \delta = \delta_0 + \int_0^t w dt, \quad w(0) = -v_0 \quad (3)$$