4. Boiko V.M., Fedorov A.V., Fomin V.M. et al. Ignition of small particles behind shock waves // Shock Waves, Explosions and Detonations. — N.Y., 1983. — (Progress in Astronautics and Aeronautics; V. 87).
5. Русанов В.В. Разностные схемы третьего порядка точности для сквозного счета разрывных решений // ДАН СССР. — 1968. — Т. 180, № 6.
6. Гриднев Н.П., Кацнельсон С.С., Фомичев В.П. Неоднородные МГД-течения с T-слоем. — Новосибирск: Наука, 1984.

г. Новосибирск *Поступила 13/IV 1993 г.*

УДК 537.84

И.В. Краснослободцев

О ТЕРМОМАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СТАЦИОНАРНЫХ ТЕЧЕНИЯХ ПРОВОДЯЩЕГО ГАЗА В СИЛЬНЫХ МАГНИТНЫХ ПОЛЯХ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ХОЛЛА

Рассматриваются медленные стационарные течения проводящего газа в произвольной области, когда магнитные силы и градиент давления в основной части потока по порядку величины превосходят силы инерции и вязкие напряжения, а закон Ома с учетом термотоков и эффектов Холла записывается в самом общем виде. Будем предполагать, что можно пренебречь искажением магнитного поля движущейся средой. Исследуемые течения характеризуются большим значением параметра МГД-взаимодействия, большим числом Гартмана и малым значением магнитного числа Рейнольдса.

Основные уравнения, описывающие движения проводящей среды при сделанных предположениях, имеют следующий вид:
уравнение неразрывности

$$\operatorname{div}\rho\mathrm{v} = 0; \tag{1}$$

уравнение магнитной статики

$$\operatorname{grad} p = \frac{1}{c}(\mathrm{j}\times\mathrm{H}); \tag{2}$$

обобщенный закон Ома при наличии термотоков

$$\mathrm{j} = \sigma\left(\operatorname{grad}\varphi + \frac{\mathrm{v}}{c}\times\mathrm{H} - \alpha\operatorname{grad}T\right) - \gamma(\mathrm{j}\times\mathrm{H}) + \varkappa(\mathrm{j}\times\mathrm{H})\times\mathrm{H}; \tag{3}$$

закон сохранения заряда

$$\operatorname{div}\mathrm{j} = 0; \tag{4}$$

уравнение энергии

$$\rho c_v\frac{dT}{dt} = k\Delta T - p\operatorname{div}\mathrm{v} + \frac{j^2}{\sigma}; \tag{5}$$

уравнение состояния

$$p = p(\rho,T). \tag{6}$$

Здесь ρ — плотность среды; σ — проводимость; v — скорость; p — давление; c — скорость света; j — плотность тока; H — напряженность магнитного поля; φ — электрический потенциал; k — коэффициент теплопроводности; c_v — удельная теплоемкость при постоянном объеме; T — температура; α —

коэффициент термоЭДС; коэффициенты γ, $\varkappa$ определяются физическими свойствами и параметрами состояния газа. Условия, при выполнении которых можно пренебречь индуцированным магнитным полем, силами вязкости и инерции в уравнениях движения, определяются неравенствами

$$H \gg \frac{1}{c} jL,\ M = \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}}\frac{HL}{c} \gg 1,\ \rho v^2 \ll p,$$

где M — число Гартмана; μ — вязкость; H, j, L, ρ, p, v — соответственно характерные величины магнитного поля, плотности тока, линейного размера, плотности среды, давления и скорости.

Магнитное поле будем считать потенциальным и определяющимся заданными внешними источниками $H = \operatorname{grad} a$ (a — известная функция, удовлетворяющая уравнению $\Delta a = 0$). Из уравнения (2) найдем перпендикулярную к магнитному полю составляющую плотности тока [1]

$$\mathbf{j}_\perp = \frac{c\mathbf{H}}{H^2} \times \operatorname{grad} p. \tag{7}$$

Здесь давление — функция, постоянная на каждой магнитной силовой линии.

Составляющую плотности тока по направлению магнитного поля, следуя [1], определяем из уравнения (4) в виде

$$j_\parallel = H\int \frac{c}{H^2}(\mathbf{H} \times \operatorname{grad} H^{-2}) \operatorname{grad} p\, da + AH \tag{8}$$

(A — произвольная функция, не меняющаяся вдоль магнитных силовых линий).

Из уравнения (3) получим

$$\sigma(\varphi - \alpha T) = c\int\int H^{-2}(\mathbf{H} \times \operatorname{grad} H^{-2}) \operatorname{grad} p\, da + Aa + B \tag{9}$$

(B — произвольная функция, постоянная на каждой из магнитных силовых линий).

Перпендикулярную к магнитному полю составляющую скорости найдем из уравнения (3) с учетом (7):

$$\mathbf{v}_\perp = \left(-\frac{c^2}{\sigma H^2} - \frac{c^2}{\sigma}\varkappa\right) \operatorname{grad} p - \frac{cH}{H^2} \times \operatorname{grad}\left(\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p\right). \tag{10}$$

Из уравнения (1) вычислим составляющую скорости по направлению магнитного поля:

$$v_\parallel = \frac{H}{\rho}\int \frac{c^2}{H^2} \operatorname{rot}\left(\frac{\rho\mathbf{H}}{H^2}\right) \times \operatorname{grad}\left(\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p\right) da + \tag{11}$$
$$+ \frac{H}{\rho}\int\left(\frac{c^2}{\sigma H^4} + \frac{c^2}{\sigma H^2}\varkappa\right)\rho\Delta p\, da + \frac{H}{\rho}\int\left(\frac{\rho c^2}{\sigma H^2} + \frac{\rho c^2}{\sigma}\varkappa\right) \operatorname{grad} p \operatorname{grad} H^{-2} da +$$
$$+ \frac{H}{\rho}\int\left(\frac{c^2}{\sigma H^4} + \frac{c^2}{\sigma H^2}\varkappa\right) \operatorname{grad}\rho \operatorname{grad} p\, da + \frac{H}{\rho}C$$

(C — произвольная функция, постоянная на каждой магнитной силовой линии).

Выведем теперь уравнения движения в пограничном слое с учетом эффектов Холла и термотоков. В пристеночном пограничном слое кроме электромагнитных сил, термоэффектов, анизотропии проводимости и градиента давления будем учитывать вязкость, а силами инерции по-прежнему пренебрегаем. Пограничный слой данного вида классифицируем как гартмановский.

Уравнения, описывающие течение в пограничном слое, примут вид

$$(12)\qquad \mu\frac{\partial^2 \mathbf{v}}{\partial n^2} = \operatorname{grad}(p + \varkappa H^2 p) + \frac{\sigma}{c}\mathbf{H}\times\operatorname{grad}(\varphi - \alpha T - \frac{c}{\sigma}p\gamma) +$$

$$+\frac{\sigma \mathbf{H}^2}{c^2}\mathbf{v} - \frac{\sigma}{c^2}\mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{v}),\quad \frac{\partial^2}{\partial n^2}(\varphi - \alpha T - \frac{c}{\sigma}p\gamma) - \frac{1}{c}\left(\mathbf{H}\times\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial n}\right) = 0$$

(n — расстояние, отсчитываемое по нормали к стенке).

Первое уравнение системы (12) получили подстановкой закона Ома в уравнение импульсов, а второе есть уравнение неразрывности электрического тока. Считаем, что в пограничном слое нормальная к поверхности компонента скорости равна нулю, а касательные составляющие градиентов потенциала, температуры и давления совпадают с их значениями в ядре потока.

Введем обозначения:

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{v}_0,\ \Phi = \varphi - \varphi_0,\ Q = T - T_0,\ P = p - p_0,$$

где $\mathbf{v}_0$, φ_0, T_0, p_0 — скорость, потенциал, температура и давление в ядре потока. Проинтегрировав второе уравнение (12) по толщине пограничного слоя, найдем

$$(13)\qquad \frac{\partial}{\partial n}(\Phi - \alpha Q - \frac{c}{\sigma}\gamma P) = \frac{1}{c}(\mathbf{H}\times\mathbf{u})_n.$$

Учитывая соотношения (12) и (13), для u получим уравнение

$$(14)\qquad \mu\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial n^2} = \operatorname{grad}(1 + \varkappa H^2)P + \frac{\sigma}{c^2}H_n^2\mathbf{u} - \frac{\sigma}{c^2}\mathbf{H}(\mathbf{H}\mathbf{u})\mathbf{n},$$

где n —вектор нормали к поверхности.

Так как $u_n = 0$, то, проектируя уравнение (14) на нормаль к поверхности, находим равенство

$$(15)\qquad (1 + \varkappa H^2)\frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\sigma}{c^2}H_n(\mathbf{H}\mathbf{u}).$$

Проекция уравнения (14) на касательную к стенке плоскость дает соотношение

$$(16)\qquad \mu\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial n^2} = \frac{\sigma}{c^2}H_n^2\mathbf{u}.$$

Выражение (16) полностью совпадает с уравнением для гартмановского слоя без учета термотоков и эффектов Холла, полученным в [1], поэтому, используя эти результаты, выпишем граничные условия для ядра потока: на непроводящей стенке

$$(17)\qquad \operatorname{sign}H_n\sqrt{\sigma\mu}\,(\operatorname{rot}\mathbf{v})_n + j_n = 0;$$

для электрода

$$(18)\qquad \varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p = \varphi^* - \alpha T^* - \gamma\frac{c}{\sigma}p^*.$$

Здесь φ^*, T^* и p^* — потенциал, температура и давление на поверхности электрода.

В качестве простейшего примера рассмотрим течение газа в круглой трубе постоянного сечения с прямолинейными линиями тока при больших числах Гартмана.

В плоскости yz, перпендикулярной направлению течения вдоль оси Ox, зададим постоянное внешнее магнитное поле $H = H_0 e_z$, $H_0 = \text{const}$. Общее решение (9)—(11) в этом случае запишем в виде

$$(19)\qquad \sigma(\varphi - \alpha T) = A(y)z + B(y),$$

$$v_x = -\left(\frac{c^2}{\sigma H^2} + \varkappa\frac{c}{\sigma}\right)\frac{\partial p}{\partial x} - \frac{c}{H}\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p\right),$$

$$v_y = 0,\ v_z = 0,\ Q^0 = \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}.$$

Будем предполагать, что процесс изотермический, так как $T = T^* = \text{const}$, а границы трубы, задаваемые уравнениями $z = \pm\sqrt{R^2 - y^2}$, являются электродами с потенциалами $\varphi_1^* = \text{const}$, $\varphi_2^* = \text{const}$ соответственно. Из условия $v_y = 0$ получаем, что распределение давления в данном случае удовлетворяет соотношению

$$p = Q^0x + \frac{Q^0H\gamma}{1 + H^2\gamma\varkappa}y + p^0,\ p^0 = \text{const}.$$

Из системы уравнений (19) найдем распределение потенциала

$$\sigma\varphi = \frac{\sigma(\varphi_1^* - \varphi_2^*)}{2\sqrt{R^2 - y^2}} + \frac{\sigma(\varphi_1^* + \varphi_2^*)}{2}.$$

Зная потенциал, температуру, давление, определяем скорость течения в трубе v_x. Аналогичным образом решается данная задача в случае, если стенки трубы непроводящие, а также, когда одна из стенок — электрод, а другая — изолятор.

Рассмотрим течение проводящей среды, когда $\mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_z$, где $H_0 = \text{const}$, а $\mathbf{e}_z$ — единичный вектор оси z декартовой системы координат. Пусть границы области задаются уравнениями $z = \pm f(x,y)$. Учитывая симметрию задачи относительно плоскости $z = 0$ и рассматривая процессы, для которых $\rho = \rho(x,y)$, $\varphi = \varphi(x,y)$, $p = p(x,y)$, $T = T(x,y)$, из уравнений (7), (8), (10), (11) получим систему

$$(20)\qquad j_x = -\frac{c}{H}p_y,\ j_y = \frac{c}{H}p_x,\ j_z = 0,$$

$$v_x = \left(-\frac{c^2}{\sigma H^2} - \frac{c^2}{\sigma}\varkappa\right)p_x + \frac{c}{H}\left(\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p\right)_y,\ v_y = \left(-\frac{c^2}{\sigma H^2} - \frac{c^2}{\sigma}\varkappa\right)\times$$

$$\times\, p_y - \frac{c}{H}\left(\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p\right)_x,\ v_z = \frac{c^2}{\sigma H^2}\Delta pz + \frac{c^2}{\sigma}\varkappa\Delta pz +$$

$$+ \frac{c}{\rho H}\left(\left(\varphi_x - \alpha T_x - \gamma\frac{c}{\sigma}p_x\right)\rho_y - \left(\varphi_y - \alpha T_y - \gamma\frac{c}{\sigma}p_y\right)\rho_x\right) +$$

$$+ \frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\rho\operatorname{grad}\left(\frac{c^2}{\sigma H^2} + \frac{c^2\varkappa}{\sigma}\right)z.$$

Частные производные обозначаем $p_x = \partial p/\partial x$ и т.п. Гидродинамическое граничное условие, выражающее непроницаемость границ $v_n = 0$, в данном случае запишем в виде

$$(v_z - v_xf_x - v_yf_y)\big|_{z = f(x,y)} = 0.$$

Обозначим $\theta = \varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p$. Тогда, подставив уравнения системы (20) в граничное условие, получим соотношение

$$(21)\qquad \left(\frac{c^2}{\sigma H^2} + \frac{c^2}{\sigma}\varkappa\right)f\Delta p + \left(\left(\frac{c^2}{\sigma H^2} + \frac{c^2}{\sigma}\varkappa\right)p_x - \frac{c}{H}\theta_y\right)f_x +$$

$$+\left(\left(\frac{c^2}{\sigma H^2}+\frac{c^2}{\sigma}\varkappa\right)p_y+\frac{c}{H}\theta_x\right)f_y+\frac{cf}{\rho H}(\theta_x\rho_y-\theta_y\rho_x)+$$

$$+\left(\frac{c^2}{\sigma H^2}+\frac{c^2}{\sigma}\varkappa\right)f\operatorname{grad}\rho\operatorname{grad}p=0.$$

Если границы области $z=\pm f(x,y)$ являются изоляторами, то, подставив в (17) выражения (20), получим

$$\Delta\theta+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}(\theta_x\rho_y-\theta_y\rho_x)ff_x+\left(\frac{c}{\sigma H}+\frac{c}{\sigma}H\varkappa\right)\Delta pff_x+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\rho\operatorname{grad}p\left(\frac{c}{\sigma H}+\frac{cH\varkappa}{\sigma}\right)f\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}(\theta_x\rho_y-\theta_y\rho_x)ff_y+\right.$$
$$\left.+\left(\frac{c}{\sigma H}+\frac{cH\varkappa}{\sigma}\right)\Delta pff_y+\frac{1}{\rho}\operatorname{grad}\rho\operatorname{grad}p\left(\frac{c}{\sigma H}+\frac{cH\varkappa}{\sigma}\right)f\right)=\frac{(p_yf_x-p_xf_y)}{\sqrt{\sigma\mu}}.\tag{22}$$

Будем предполагать, что параметр $\varkappa\lesssim 1/H^2$. Тогда, отбрасывая в уравнениях (21) и (22) слагаемые порядка $1/M$ по отношению к оставленным, имеем

$$\frac{1}{\rho}(\theta_x\rho_y-\theta_y\rho_x)+\frac{1}{f}(\varphi_xf_y-\varphi_yf_x)=0,\ \theta=\theta(\rho f),\tag{23}$$

$$\Delta\theta+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{\rho}(\theta_x\rho_y-\theta_y\rho_x)ff_x\right)-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\rho}(\theta_x\rho_y-\theta_y\rho_x)ff_y\right)=\frac{(p_yf_x-p_xf_y)}{\sqrt{\sigma\mu}}.$$

Оценки, сделанные при построении системы (23), соответствуют отбрасыванию в выражениях для компонент скорости слагаемых, содержащих давление. При этом выражения для компонент скорости примут вид

$$v_x=\frac{c}{H}\theta_y,\ v_y=-\frac{c}{H}\theta_x,\ v_z=\frac{c}{\rho H}(\theta_x\rho_y-\theta_y\rho_x).\tag{24}$$

Из полученных результатов следует, что условия, когда можно пренебречь эффектами Холла при любых граничных условиях для течений газа в сильных магнитных полях, выглядят как

$$\varkappa\ll\frac{1}{H^2},\ p\ll\frac{\sigma}{\gamma c}(\varphi-\alpha T).$$

Рассмотрим течение проводящего газа $p=p(\rho,T)$ в области, ограниченной непроводящими стенками $z=\pm f(r)$ $(r=\sqrt{x^2+y^2})$, где, кроме того, имеются электроды с заданными постоянными потенциалами φ_1^* и φ_2^* $(\varphi_1^*\neq\varphi_2^*)$, постоянной температурой T_1^* и T_2^* $(T_1^*\neq T_2^*)$ и постоянным давлением p_1^* и p_2^* $(p_1^*=p_2^*)$ на поверхности электродов, которые представляют собой цилиндрические конфигурации внутри области с образующими, параллельными оси z и направляющими $f_1=\text{const}$, $f_2=\text{const}$, $f_1\neq f_2$.

Будем считать, что в областях между электродами и изоляторами поддерживаются постоянные температура и давление. Кроме того, как было показано в [2], здесь имеют место равенства

$$\varphi'(f)=0,\ \varphi(f)=\text{const},$$

откуда получаем, что и $\theta'(f)=0$, $\theta(f)=\text{const}$, т.е. скорость газа в этой области равна нулю. Следовательно, движение газа будет происходить только в области между двумя электродами, т.е. геометрическая структура течения плоская и соответственно $v_z=\frac{cz}{\rho H}(\theta_x\rho_y-\theta_y\rho_x)=0$:

$$\theta_x \rho_y - \theta_y \rho_x = 0,\ \theta = \theta(\rho). \tag{25}$$

Условие (25) эквивалентно равенству

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{c}{H}(\rho_x\theta_y - \rho_y\theta_x) = 0.$$

С учетом выражений (23) имеем

$$\theta = \theta(f),\ \rho = \rho(f).$$

Рассмотрим баротропные процессы $p = p(\rho) = p(f)$.

Система (23) тогда приводится к виду

$$\theta = \theta(f),\ f = f(r),\ \Delta\theta = 0,$$

откуда получаем

$$\theta = R_1 \ln \frac{1}{\sqrt{1 - f^2}} + R_2,$$

где постоянные R_1 и R_2 находим из граничных условий

$$\theta(f_1) = \varphi_1^* - \alpha T_1^* - \gamma\frac{c}{\sigma}p_1^* = \text{const},$$

$$\theta(f_2) = \varphi_2^* - \alpha T_2^* - \gamma\frac{c}{\sigma}p_2^* = \text{const}.$$

Так как $\rho = \rho(f)$, $T = T(f)$, $\varphi = \varphi(f)$, $p = p(f)$, то линии тока $f = \text{const}$ являются одновременно изохорами, изотермами, линиями равного потенциала и изобарами. Зная функцию $\theta = \theta(f)$, из уравнения (24) найдем скорость газа.

Обобщая полученные результаты, можно сформулировать следующие утверждения о термомагнитогидродинамических течениях газа в сильных магнитных полях с учетом эффектов Холла, ограниченных непроводящими стенками $z = \pm f(x,y)$.

1. Плоские течения проводящего газа для параметров $\varkappa \lesssim 1/H^2$ происходят вдоль линий $f = \text{const}$ и определяются функцией тока

$$\theta = \theta(f) = \varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p.$$

2. Плотность газа постоянна вдоль линий

$$f = \text{const, т.е. } \rho = \rho(f).$$

3. Распределение плотности удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\rho}{dt} = 0.$$

Исследуем случай переменного потенциального магнитного поля $\mathbf{H} = \operatorname{grad} a$ и произвольной формы стенок. Следуя результатам [2], введем криволинейную систему координат x, y, a с базисными векторами $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ такую, чтобы координатные линии x и y были ортогональны линиям a, которые совпадают с магнитными силовыми линиями.

Метрика определяется компонентами g_{ij} метрического тензора

$$\begin{gathered} ds^2 = g_{11}dx^2 + 2g_{12}dxdy + g_{22}dy^2 + \frac{D}{H_0^2}da^2, \\ D = g_{11}g_{22} - g_{12}^2,\ H_0 = \text{const}. \end{gathered} \tag{26}$$

Из последнего равенства (26) и потенциальности магнитного поля $\mathbf{H} = \operatorname{grad} a$ получаем, что $H\sqrt{D} = H_0$. Уравнения непроводящих стенок зададим в виде $a = H_0 f^+(x,y)$, $a = H_0 f^-(x,y)$. Аналогично с рассмотренным выше случаем $H = \text{const}$ пренебрегаем в выражениях для компонент скорости слагаемыми, содержащими давление. В дальнейшем будем рассматривать случай, когда $\varphi = \varphi(x,y)$, $\rho = \rho(x,y)$, $T = T(x,y)$. Выражение для скорости примет вид

$$\mathrm{v} = \frac{c}{H_0}\theta_y \mathrm{e}_1 - \frac{c}{H_0}\theta_x \mathrm{e}_2 +$$
$$+ \frac{c\mathrm{H}}{H_0^2}\left(\theta_x F_y - \theta_y F_x + \frac{F}{\rho}(\theta_x \rho_y - \theta_y \rho_x)\right).$$

Условие непротекания $v_n = 0$ на стенках дает

$$(27)\qquad Df_x^{\pm}\theta_y - Df_y^{\pm}\theta_x - (\theta_x F_y^{\pm} - \theta_y F_x^{\pm} + \frac{F}{\rho}(\theta_x \rho_y - \theta_y \rho_x) + \frac{1}{\rho}C(x,y)) = 0,$$

$$F^{\pm} = F^{\pm}(x,y,H_0 f^{\pm}),\ F = \frac{1}{H_0}\int D(x,y,a)da.$$

Вычитая из уравнения (27) с индексами плюс это же уравнение с индексами минус, получим

$$(28)\qquad 2(\theta_x\psi_y - \theta_y\psi_x) + \frac{\psi}{\rho}(\theta_x\rho_y - \theta_y\rho_x) = 0,$$

$$\psi = F^+ - F^- = \frac{1}{H_0}\int Dda.$$

Из соотношения (28) находим

$$\theta = \theta(\rho\psi^2).$$

Если течение газа происходит в направлении, перпендикулярном магнитному полю, то $\theta = \theta(\psi)$ и $\rho = \rho(\psi)$, а движение будет происходить вдоль поверхностей $\psi(x,y) = \text{const}$, которые в этом случае являются изохорами. Распределение давления можно найти методом, изложенным в [2].

Полученные результаты справедливы также и для жидкостей, но закон Ома будет иметь вид

$$\mathrm{j} = \sigma\left[\left(\operatorname{grad}\varphi + \frac{\mathrm{v}}{c}\times \mathrm{H}\right) - \alpha \operatorname{grad} T\right] - \gamma(\mathrm{j}\times\mathrm{H}).$$

В качестве примера рассмотрим случай плоских течений неоднородной жидкости при произвольной проводимости стенок.

Для плоских течений неоднородной жидкости при $\dfrac{d\rho}{dt} = 0$ в постоянном магнитном поле $\mathrm{H} = H_0\mathrm{e}_z$, перпендикулярном плоскости течения (x,y), где $\varphi = \varphi(x,y)$, $\rho = \rho(x,y)$, $T = T(x,y)$, $p = p(x,y)$, из уравнения (10) при $\varkappa = 0$ получаем

$$v_z = \frac{c^2 z}{\sigma H^2}\Delta p = 0,$$

откуда находим, что распределение давления удовлетворяет уравнению Лапласа

$$(29)\qquad p_{xx} + p_{yy} = \Delta p = 0,$$

т.е. будем предполагать, что давление p можно найти из уравнения (29) и считать p известной функцией.

Введем функцию тока β для градиента давления такую, что

$$p_x = -\frac{\sigma H}{c}\beta_y,\ p_y = \frac{\sigma H}{c}\beta_x.$$

Следовательно, компоненты скорости примут вид

(30)
$$v_x = \frac{c}{H}\left(\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p + \beta\right)_y,$$
$$v_y = -\frac{c}{H}(\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p + \beta)_x.$$

Обозначим $\varepsilon = \varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p + \beta$. Из условия непротекания границ $v_n = v_x f_x + v_y f_y$ находим, что $\varepsilon = \varepsilon(f)$, т.е. вектор скорости всегда совпадает по направлению с касательной к кривой $f(x,y) = \mathrm{const}$. Из уравнения $\frac{d\rho}{dt} = 0$ получаем, что плотность постоянна вдоль линий $f = \mathrm{const}$, т.е. $\rho = \rho(f)$. Значит, произвольные плоские течения проводящей неоднородной жидкости в сильных магнитных полях обладают следующими свойствами:

1) распределение давления удовлетворяет уравнению Лапласа $\Delta p = 0$;

2) течение неоднородной жидкости всегда происходит вдоль линий $f = \mathrm{const}$ и определяется функцией тока
$$\varepsilon = \varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p + \beta;$$

3) плотность неоднородной жидкости постоянна вдоль линий $f = \mathrm{const}$, т.е. $\rho = \rho(f)$.

Зная распределение давления, можно найти плотность тока. Из условия $v_n = 0$ имеем
$$(\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p)_x f_y - (\varphi - \alpha T - \gamma\frac{c}{\sigma}p)_y f_x =$$
$$= \theta_x f_y - \theta_y f_x = \frac{c}{\sigma H}(p_x f_x + p_y f_y).$$

Используя равенство $\frac{d\theta}{dl} = (\theta_y f_x - \theta_x f_y)\frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}$, где l — длина, отсчитываемая вдоль кривой $f = \mathrm{const}$, получим
$$\theta = \frac{c}{\sigma H}\int(p_x f_x + p_y f_y)\frac{1}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2}}dl.$$

Таким образом из системы (30) определяется скорость жидкости.

В рассмотренных ранее примерах имеем явную зависимость геометрической структуры течения от формы ограничивающей поверхности $z = \pm f(x,y)$, т.е. получаем сформированную управляемую устойчивую организационную структуру течения в виде стационарного вихря с линиями тока $f = \mathrm{const}$. Следовательно, можно сказать, имеем новое направление в механике сплошных сред — это управляемая организация структур при воздействии внешних полей и специально подобранных ограничивающих поверхностей.

Вместо статического удержания частично ионизованного газа в сильных магнитных полях с учетом эффектов Холла и термотоков можно рассматривать задачу построения медленных управляемых стационарных движений плазмы по замкнутому объему, т.е. придать газу целенаправленный механизм вращения вдоль заданных линий $f = \mathrm{const}$ и в этом случае исключить его разлет.

Для течений жидкометаллических сред полученные результаты могут найти приложение в системах теплосъема энергии термоядерной реакции, а также в одновременном производстве трития под воздействием нейтронного облучения в различных реакторах управляемого термоядерного синтеза, где существенны термотоки и эффект Холла (например, бланкет реактора Марк-IIA Калэмской лаборатории).

ЛИТЕРАТУРА

1. Куликовский А.Г. О медленных стационарных течениях проводящей жидкости при больших числах Гартмана // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1968. — № 2. — С. 3—8.
2. Куликовский А.Г. О течениях проводящей несжимаемой жидкости в произвольной области при наличии сильного магнитного поля // Изв. АН СССР. МЖГ. — 1973. — № 3. — С. 147—150.

г. Москва *Поступила 29/III 1993 г.*

УДК 541.18.04

Е.В. Семенов

К РАСЧЕТУ ЭВОЛЮЦИИ КОАГУЛИРУЮЩИХ СИСТЕМ

В работе обосновывается количественный анализ дисперсного состава коагулирующих частиц.

Столкновение и последующее слияние (слипание) в потоке частиц с образованием агрегатов обусловливаются самыми разнообразными эффектами — случайным (тепловым или броуновским) блужданием, сближением под действием электрических, гравитационных, гидродинамических и других сил. При этом исследование эволюции гранулометрического состава коагулирующих в потоке частиц, строго говоря, необходимо проводить на основе математического анализа законов сохранения массы и импульса по каждой из фаз смеси, а также исходя из балансового соотношения по счетной плотности коагулирующих частиц в форме, например, кинетического уравнения Смолуховского [1]. Причем возникающие на этом пути трудности настолько велики, что имеется, как правило, возможность получить результаты по количественному моделированию кинетики коагулирующих частиц лишь для задач простейшего типа.

В предположении, что по условиям протекания процесса взаимодействия частиц выполняются все допущения, полагаемые в основу вывода уравнения Смолуховского, имеем [2]

$$\partial n(m)/\partial t = 0{,}5\int_0^m \beta_1(m-\mu,\mu)n(m-\mu)n(\mu)d\mu - n(m)\int_0^\infty \beta_1(m,\mu)n(\mu)d\mu, \tag{1}$$

где $n(m)$ — счетная плотность распределения (СПР) частиц по массе; t — время; $\beta_1(m,\mu)$ — ядро интегродифференциального уравнения (1), по своему физическому смыслу являющееся симметричной неотрицательной функцией своих аргументов. С помощью введения импульсной функции δ Дирака уравнение (1) примет вид [2, 3]

$$\partial n/\partial t = \int_0^\infty\int_0^\infty K(m, m', m'')n(m')n(m'')dm'dm''. \tag{2}$$

Здесь

$$K(m, m', m'') = 0{,}5\beta_1(m', m'')\Delta(m, m', m'');$$

$$\Delta(m, m', m'') = \delta(m - m' - m'') - \delta(m - m') - \delta(m - m'').$$

В качестве начального условия для СПР принимаем