

УДК 539.3

## ИССЛЕДОВАНИЕ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ, НЕ ПОДЧИНЯЮЩЕЙСЯ ЗАКОНУ ФУРЬЕ, В ПЛИТЕ ИЗ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ГРАДИЕНТНОГО МАТЕРИАЛА

М. Р. Равеши

Технологический университет им. К. Н. Туси, Тегеран, Иран  
E-mail: raveshi.mr@gmail.com

С использованием метода дифференциального преобразования исследуется одномерная не подчиняющаяся закону Фурье теплопроводность в плите конечных размеров из функционально-градиентного материала, температура которой сначала однородна, а затем внезапно увеличивается на одной поверхности, в то время как другая поверхность остается теплоизолированной. Получено общее уравнение гиперболической теплопроводности. Задача решена аналитически с использованием преобразования Лапласа, результаты на конечном временном интервале получены численно с использованием обратного преобразования Лапласа. Проведено сравнение полученных результатов с точным решением и показано, что они хорошо согласуются.

**Ключевые слова:** функционально-градиентный материал, не подчиняющаяся закону Фурье теплопроводность, метод дифференциального преобразования, плита, функция, экспоненциально зависящая от расстояния.

DOI: 10.15372/PMTF20160216

**Введение.** В настоящее время известно большое количество исследований теплопроводности, не подчиняющейся закону Фурье, или гиперболической теплопроводности (ГТП), поскольку данный вид теплообмена используется в различном промышленном оборудовании, таком как лазеры, микроволновые печи, химические взрывные устройства, микроэлектронные устройства, чипы, композитные тепловые барьеры. ГТП имеет место в композиционных материалах нового поколения, так называемых функционально-градиентных материалах (ФГМ).

Вследствие непрерывного гладкого пространственного изменения характеристик материала, таких как теплопроводность, массовая плотность, удельная теплоемкость, ФГМ имеет преимущества по сравнению с гомогенными материалами. ФГМ конструируются путем постепенного изменения объемной доли двух основных материалов в одном или более направлениях. Как правило, одна поверхность пластины из ФГМ может быть выполнена из технической керамики, способной оказать сопротивление экстремальному тепловому нагружению, другая — из металла или металлического сплава для поддержания структурной жесткости. ФГМ из керамики и металла имеют различную теплоемкость, поэтому возникающей в них теплопроводностью нельзя пренебречь [1].

Большое количество работ посвящено исследованию фурье-теплообмена в ФГМ. В [2] с использованием аналитического метода решались одномерные задачи теплопроводности

в ФГМ. В работах [3, 4] сформулирован метод граничных элементов для решения задачи о стационарной теплопроводности в ФГМ. В [5, 6] трехмерный метод граничных элементов использовался для решения задачи о теплообмене в материале, свойства которого непрерывно изменялись в одном, двух или трех пространственных направлениях. В работах [7–9] метод граничных элементов развит для решения задач о нестационарном теплообмене в ФГМ. В [10] с использованием теории высокого порядка точности и локального бессеточного метода Петрова — Галеркина исследована трехмерная теплопроводность в массивной пластине из ФГМ и показано, что предполагаемое распределение температуры по толщине пластины удовлетворяет заданной температуре на главных поверхностях пластины.

ФГМ, используемые при покрытии тепловых барьеров, должны выдерживать большой градиент температуры. В этом случае параболическое уравнение теплопроводности, основанное на законе Фурье, перестает быть справедливым и возникает необходимость создания модели теплопроводности с конечной скоростью потока тепла. Такая модель, так называемая модель ГТП, предложена авторами [11, 12]. В работе [13] исследовано распространение тепловых волн в тонкой ленте, нагреваемой с помощью объемного источника тепла. В [14] предложен новый гибридный метод для исследования влияния кривизны поверхности твердого тела на ГТП в тонких поверхностных слоях. Авторами [15, 16] изучено распространение тепловых волн в тонкой пленке. В [17, 18] преобразование Лапласа и принцип суперпозиции использованы для решения одномерного уравнения ГТП в тонкой плите.

В указанных исследованиях рассматривалась гомогенная среда, однако имеется несколько работ (см., например, [19–23]), посвященных изучению ГТП в неоднородных средах. В [19] обсуждалось различие экспериментальных и расчетных значений времени релаксации, потока тепла и профилей температуры, полученных из уравнений гиперболической и параболической теплопроводности. В [20] решалась задача о ГТП в анизотропном материале в предположении, что имеют место фазовые запаздывания между вектором потока тепла и суммарным градиентом температуры. Решение уравнения ГТП в поллой сфере ФГМ предложено в работе [21]: задача аналитически решена с помощью преобразования Лапласа, затем выполнено численное обращение преобразования Лапласа на конечном интервале времени. Анализ ГТП для гетерогенных полых цилиндров и сфер из ФГМ выполнен в [22]. Все свойства материала изменялись экспоненциально по толщине, за исключением параметра тепловой релаксации, который был постоянным. Задача решена аналитически в пространстве Лапласа, полученные результаты с использованием модифицированного численного метода обращения Дурбина преобразованы для рассматриваемого интервала времени. Нестационарные характеристики температуры и потока тепла исследованы при различных значениях параметров неоднородности и температуры.

При численном решении задач ГТП возникает проблема, связанная с наличием разрыва во фронте волны. Для решения этой проблемы предложены такие схемы, как схема предиктора-корректора [24], метод трансфинитного элемента [25], метод конечных элементов Галеркина, смешанная явно-неявная схема [26] и метод характеристик [27]. Вследствие пространственного изменения тепловых свойств ФГМ рассмотренная задача становится нелинейной и трудно решается численно. В то же время не всегда можно получить точное решение задач теплопроводности для ФГМ, поэтому оптимальным решением уравнения ГТП в ФГМ является аналитическое решение.

Метод дифференциального преобразования (МДП), предложенный в работе [28] в 1986 г., позволяет получить одно из наиболее точных аналитических решений линейных и нелинейных дифференциальных уравнений [29–33]. Данный метод можно применить для решения линейных и нелинейных задач с начальными условиями и краевых задач без линеаризации, дискретизации или возмущения; кроме того, МДП обладает большей схо-

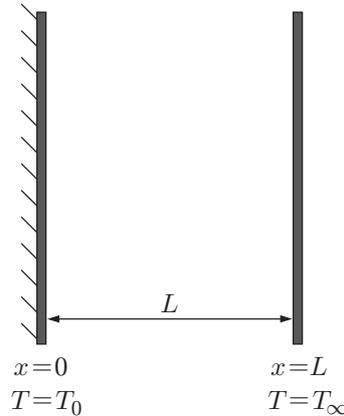


Рис. 1. Схема задачи в начальный момент времени

димостью и точностью, чем другие методы [34, 35]. По мнению авторов данной работы, МДП целесообразно использовать для решения уравнения ГТП в ФГМ.

В настоящей работе рассматривается задача ГТП для пластин из ФГМ с различными функциональными зависимостями теплопроводности, удельной теплоемкости и массовой плотности от координаты.

**1. Постановка задачи.** Рассматривается одномерная задача о ГТП в плите из ФГМ толщиной  $L$  (рис. 1). Полагается, что плита изготовлена из двухкомпонентного материала: материал одной поверхности обогащен керамикой, другой — металлом. Первоначально плита находится в состоянии теплового равновесия при температуре  $T_0$ . В результате теплового удара температура одной границы пластины при  $x = L$  резко увеличивается до значения  $T_\infty$ , в то время как на другой границе при  $x = 0$  поддерживается температура  $T_0$ .

Модифицированная модель теплового потока имеет вид [11, 12]

$$\tau \frac{\partial \mathbf{q}(x, t)}{\partial t} + \mathbf{q}(x, t) = -k(x) \frac{\partial T(x, t)}{\partial x}, \quad \tau = \frac{\alpha}{C^2}, \quad (1)$$

где  $\tau$  — время тепловой релаксации;  $\mathbf{q}$  — вектор теплового потока;  $x$  — координата;  $t$  — время;  $T$  — температура;  $\alpha$  — температуропроводность;  $k$  — теплопроводность;  $C$  — скорость распространения возмущений. В (1) предполагалось, что тепловой поток и градиент температуры возникают в разное время с задержкой по времени  $\tau$ . Особый случай  $\tau = 0$ , очевидно, соответствует закону Фурье. Исключая вектор  $\mathbf{q}$  из уравнения (1) и уравнения сохранения энергии, получаем классическое уравнение ГТП

$$\rho c \tau \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T) = \frac{\partial}{\partial x} \left( k \frac{\partial T}{\partial x} \right) = k \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial k}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial T}{\partial x} \right). \quad (2)$$

При исследовании влияния неоднородности на гиперболическую теплопроводность полагается, что свойства ФГМ меняются в пространстве по экспоненциальному закону:

$$k(x) = k_h e^{2\beta_1 x}, \quad \rho(x) = \rho_h e^{2\beta_2 x}, \quad c(x) = c_h e^{2\beta_3 x}, \quad (3)$$

в то время как тепловая релаксация внутри плиты из ФГМ является постоянной. В (3)  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — параметры неоднородности, имеющие размерность  $\text{м}^{-1}$ ;  $k_h$ ,  $\rho_h$ ,  $c_h$  — однородная теплопроводность, однородная массовая плотность и однородная удельная теплоемкость соответственно. При  $\beta_1 = \beta_2 + \beta_3$  температуропроводность является постоянной:

$$\alpha = k_h / (\rho_h c_h) = \alpha_h \quad \forall \beta_1 = \beta_2 + \beta_3.$$

Полагая, что  $\omega_i = 2\beta_i L$ , и вводя безразмерные величины

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_\infty - T_0}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{t} = \frac{\alpha t}{L^2}, \quad \bar{x} = \frac{x}{L}, \quad \bar{\tau} = \frac{\alpha \tau}{L^2},$$

уравнения (2), (3) соответственно запишем в виде

$$\bar{\tau} \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{t}^2} + \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = \omega_1 \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{x}^2},$$

$$k(x) = k_h e^{\omega_1 \bar{x}}, \quad \rho(x) = \rho_h e^{\omega_2 \bar{x}}, \quad c(x) = c_h e^{\omega_3 \bar{x}}.$$

Массовая плотность и удельная теплоемкость не оказывают влияния на нестационарную температуру внутри плиты, поскольку их безразмерная неоднородность отсутствует в безразмерном уравнении ГТП. Однако необходимо исследовать влияние теплопроводности на распределение температуры плиты из ФГМ.

Зададим безразмерные начальные условия

$$\theta(\bar{x}, 0) = 0, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}}(\bar{x}, 0, 0) = 0$$

и безразмерные граничные условия

$$\theta(1, \bar{t}) = 1, \quad \frac{\partial \theta}{\partial \bar{x}}(0, \bar{t}) = 0.$$

Введем преобразование Лапласа для безразмерной температуры:

$$L[\theta(\bar{x}, \bar{t})] = \bar{\theta}(\bar{x}, s) = \int_0^{\infty} \theta(\bar{x}, \bar{t}) e^{-s\bar{t}} d\bar{t},$$

где  $s, \bar{\theta}$  — параметр преобразования Лапласа и преобразование Лапласа  $\theta$  соответственно. Применяя преобразование Лапласа к управляющим уравнениям и граничным условиям в безразмерной форме, получаем

$$\bar{\tau} s^2 \bar{\theta} + s \bar{\theta} = \omega_1 \frac{d\bar{\theta}}{dx} + \frac{d^2 \bar{\theta}}{dx^2}; \tag{4}$$

$$\frac{d\bar{\theta}}{d\bar{x}}(0, s) = 0; \tag{5}$$

$$\bar{\theta}(1, s) = \frac{1}{s}. \tag{6}$$

**2. Анализ методом дифференциального преобразования.** Метод дифференциального преобразования основан на разложении в ряд Тейлора. В этом методе управляющие дифференциальные уравнения и граничные условия системы преобразуются в систему алгебраических уравнений для образов дифференциального преобразования исходных функций.

Пусть функция  $x(t)$  является аналитической в области  $D$  и  $t = t_0$  в некоторой точке  $D$ . Тогда функцию  $x(t)$  можно представить в виде степенного ряда с центром в точке  $t_0$ . Проведем дифференциальное преобразование функции  $x(t)$ :

$$X(k) = \frac{1}{k!} \left( \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right) \Big|_{t=t_0} \quad \forall t \in D, \tag{7}$$

где  $x(t)$  — функция-оригинал;  $X(k)$  — образ функции. В результате обратного преобразования имеем

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (t - t_0)^k X(k) \quad \forall t \in D. \tag{8}$$

Таблица 1

Функции-оригиналы и образы функций, используемые в МДП

Оригинал	Образ
$x(t) = \alpha f(x) \pm \beta g(t)$	$X(k) = \alpha F(k) \pm \beta G(k)$
$x(t) = \frac{df(t)}{dt}$	$X(k) = (k+1)F(k+1)$
$x(t) = \frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$X(k) = (k+1)(k+2)F(k+2)$
$x(t) = e^t$	$X(k) = \frac{k}{k!}$
$x(t) = f(t)g(t)$	$X(k) = \sum_{l=0}^k F(l)G(k-l)$
$x(t) = t^m$	$X(k) = \delta(k-m) = \begin{cases} 1, & k = m \\ 0, & k \neq m \end{cases}$
$x(t) = f(t)^m$	$X(k) = \sum_{l=0}^k F(l)^{m-1} F(k-l)$

Из уравнений (7), (8) получаем

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \left( \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right) \Big|_{t=t_i} \quad \forall t \in D. \quad (9)$$

МДП, основанный на разложении в ряд Тейлора, не позволяет вычислить производные символически. Фактически в приложениях функция  $x(t)$  выражается конечным рядом, и уравнение (9) можно записать следующим образом:

$$x(t) = \sum_{k=0}^n \frac{(t-t_0)^k}{k!} \left( \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right) \Big|_{t=t_i} \quad \forall t \in D. \quad (10)$$

Это означает, что остаточный член

$$x(t) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(t-t_0)^k}{k!} \left( \frac{d^k x(t)}{dt^k} \right) \Big|_{t=t_i} \quad \forall t \in D$$

пренебрежимо мал. (Значение  $n$  зависит от скорости сходимости ряда.) Некоторые функции-оригиналы и образы функции, используемые в методе дифференциального преобразования [33], приведены в табл. 1.

**3. Решение уравнения ГТП с использованием МДП.** Проведя дифференциальное преобразование уравнения (4) относительно  $\bar{x}$ , получаем

$$(k+1)(k+2)\bar{\theta}(k+2) + \omega_1(k+1)\bar{\theta}(k+1) = (\bar{\tau}s^2 + s)\bar{\theta}(k).$$

В результате дифференциального преобразования безразмерных граничных условий в (5), (6) имеем

$$\bar{\theta}(1) = 0, \quad \bar{\theta}(0) = a,$$

где  $a$  — постоянная. Другие члены ряда можно представить в следующем виде:

$$\bar{\theta}(2) = \frac{1}{2} S(\bar{\tau} + 1)a, \quad \bar{\theta}(3) = -\frac{1}{6} \omega_1 S(\bar{\tau} + 1)a,$$

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(4) &= \frac{1}{24} S(\omega_1^2 S\bar{\tau} + \omega_1^2 + S^3\bar{\tau}^2 + 2S^2\bar{\tau} + S)a, \\ \bar{\theta}(5) &= -\frac{1}{120} \omega_1(\omega_1^2 S\bar{\tau} + \omega_1^2 + 2S^3\bar{\tau}^2 + 4S^2 + 2S)a.\end{aligned}$$

Подставляя эти члены в (10), получаем решение в замкнутой форме:

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(\bar{x}) &= a + \frac{1}{2} S(\bar{\tau}S + 1) a\bar{x}^2 - \frac{1}{6} \omega_1 S(\bar{\tau}S + 1) a\bar{x}^3 + \frac{1}{24} \omega_1 S(\omega_1^2 S\bar{\tau} + \omega_1^2 + S^3\bar{\tau}^2 + 2S^2\bar{\tau} + S) a\bar{x}^4 - \\ &\quad - \frac{1}{120} \omega_1 S(\omega_1^2 S\bar{\tau} + \omega_1^2 + 2S^3\bar{\tau}^2 + 4S^2 + 2S) a\bar{x}^5 + \dots\end{aligned}\quad (11)$$

В результате подстановки граничных условий из уравнения (6) в уравнение (11) имеем

$$\begin{aligned}\bar{\theta}(1) &= a + \frac{1}{2} S(\bar{\tau}S + 1)a - \frac{1}{6} \omega_1 S(\bar{\tau}S + 1)a + \frac{1}{24} Sa(\omega_1^2 S\bar{\tau} + \omega_1^2 + S^3\bar{\tau}^2 + 2S^2\bar{\tau} + S) - \\ &\quad - \frac{1}{120} \omega_1 S(\omega_1^2 S\bar{\tau} + \omega_1^2 + 2S^3\bar{\tau}^2 + 4S^2 + 2S)a + \dots = \frac{1}{S}.\end{aligned}\quad (12)$$

Решая уравнение (12), находим значение  $a$ , подставляя которое в уравнение (11) в области Лапласа можно получить распределение температуры в плите. Наконец, выполним численное обращение преобразования Лапласа, чтобы найти поле температуры в ФГМ на рассматриваемом временном интервале.

**4. Модель для проверки правильности метода.** Для проверки предложенного подхода сначала рассмотрим частный случай однородного материала  $\omega_1 = 0$ . В этом случае, используя метод разделения переменных, можно получить точное решение

$$\begin{aligned}\theta &= 1 - \sum_{n=0}^{\infty} \cos(\lambda_n \bar{x}) \frac{4(-1)^n}{(2n+1)\pi} e^{-\bar{t}/(2\bar{\tau})} \left[ \frac{1}{\sqrt{4\bar{\tau}\lambda_n^2 - 1}} \sin\left(\frac{\sqrt{4\bar{\tau}\lambda_n^2 - 1}}{2\bar{\tau}} \bar{t}\right) + \right. \\ &\quad \left. + \cos\left(\frac{\sqrt{4\bar{\tau}\lambda_n^2 - 1}}{2\bar{\tau}} \bar{t}\right) \right],\end{aligned}$$

где  $\lambda_n = n\pi + \pi/2$  ( $n = 0, 1, \dots, \infty$ ) — собственное значение.

Результаты, полученные с использованием МДП и метода разделения переменных для гомогенной плиты, приведены в табл. 2. В среднем величина различия результатов  $\Delta$  имеет порядок  $10^{-7}$ .

**5. Результаты исследования и их обсуждение.** Для исследования влияния различных параметров ГТП в плите из ФГМ будем полагать их постоянными величинами, за исключением одного. На рис. 2 приведена зависимость безразмерной температуры  $\theta$  от координаты  $\bar{x}$  при фиксированном времени тепловой релаксации  $\bar{\tau}$ . Согласно (1) вследствие обратного соотношения между временем тепловой релаксации и скоростью распространения возмущений при уменьшении безразмерного времени тепловой релаксации  $\bar{\tau}$  скорость распространения тепловой волны увеличивается, что приводит к увеличению температуры в плите. При увеличении безразмерного времени тепловой релаксации профиль температуры изменяется в меньшей степени, а при очень больших значениях безразмерного времени тепловой релаксации профиль температуры не зависит от него.

На рис. 3 показана эволюция температуры теплоизолированной границы плиты из ФГМ при различных значениях времени релаксации. Видно, что с уменьшением времени тепловой релаксации температура быстро достигает постоянного значения. При больших значениях безразмерного времени тепловой релаксации вследствие наложения тепловых волн в ГТП наблюдаются температурные колебания на теплоизолированной границе плиты.

Таблица 2

Значения температуры, полученные с помощью МДП  
и точного решения при  $\omega_i = 0$ ,  $\bar{t} = 1$ ,  $\bar{\tau} = 10^{-3}$

$\bar{x}$	$\theta$		$\Delta$
	МДП	Точное решение	
0	0,892 414 800 5	0,892 414 801 2	0,000 000 000 7
0,05	0,892 746 449 7	0,892 746 455 1	0,000 000 005 4
0,10	0,893 739 352 8	0,893 739 371 7	0,000 000 018 9
0,15	0,895 387 388 1	0,895 387 427 9	0,000 000 039 8
0,20	0,897 680 394 9	0,897 680 460 2	0,000 000 065 3
0,25	0,900 604 236 1	0,900 604 327 0	0,000 000 090 9
0,30	0,904 140 885 3	0,904 140 995 0	0,000 000 109 8
0,35	0,908 268 537 7	0,908 268 650 8	0,000 000 113 0
0,40	0,912 961 745 2	0,912 961 834 6	0,000 000 089 4
0,45	0,918 191 572 4	0,918 191 598 8	0,000 000 026 4
0,50	0,923 925 775 8	0,923 925 687 7	0,000 000 088 1
0,55	0,930 129 002 0	0,930 128 739 4	0,000 000 262 7
0,60	0,936 763 006 3	0,936 762 507 7	0,000 000 498 6
0,65	0,943 786 887 6	0,943 786 103 3	0,000 000 784 3
0,70	0,951 157 341 4	0,951 156 251 1	0,000 001 090 3
0,75	0,958 828 926 5	0,958 827 561 3	0,000 001 365 2
0,80	0,966 754 344 9	0,966 752 808 6	0,000 001 536 3
0,85	0,974 884 733 9	0,974 883 215 8	0,000 001 518 1
0,90	0,983 169 966 8	0,983 168 729 5	0,000 001 237 4
0,95	0,991 558 962 5	0,991 558 278 8	0,000 000 683 7
1,00	1,000 000 000 0	1,000 000 000 0	0,000 000 000 0

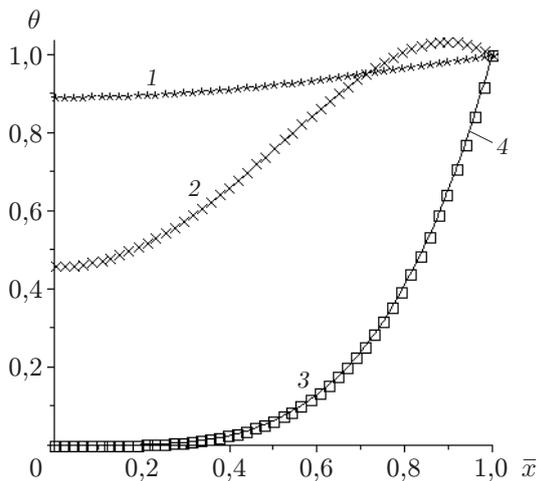


Рис. 2

Рис. 2. Зависимость безразмерной температуры плиты из ФГМ от координаты  $\bar{x}$  при  $\bar{t} = 1$ ,  $\omega_1 = 0$  и различных значениях  $\bar{\tau}$ :

1 —  $\bar{\tau} = 10^{-3}$ , 2 —  $\bar{\tau} = 1$ , 3 —  $\bar{\tau} = 10^3$ , 4 —  $\bar{\tau} = 10^4$

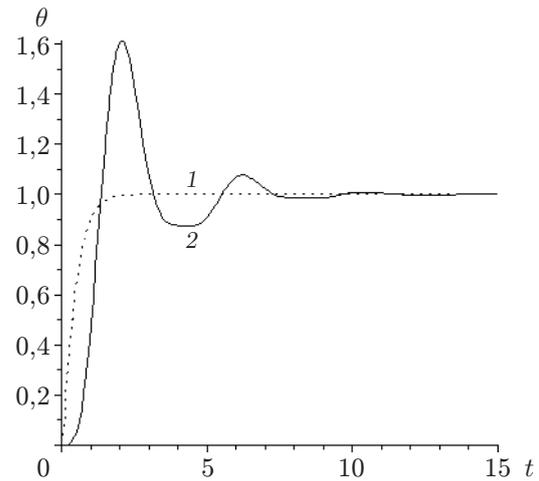


Рис. 3

Рис. 3. Зависимость безразмерной температуры плиты из ФГМ от времени при  $\bar{x} = 0$ ,  $\omega_1 = 0$  и различных значениях  $\bar{\tau}$ :

1 —  $\bar{\tau} = 10^{-3}$ , 2 —  $\bar{\tau} = 1$

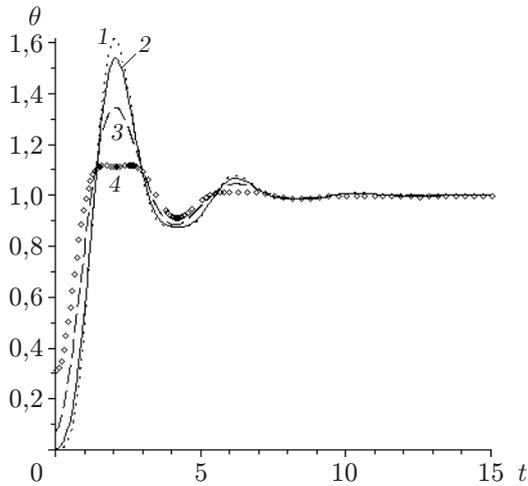


Рис. 4

Рис. 4. Зависимость безразмерной температуры плиты из ФГМ от времени при  $\bar{\tau} = 1, \omega_1 = 0$  и различных значениях  $\bar{x}$ :  
 1 —  $\bar{x} = 0, 2 — \bar{x} = 0,25, 3 — \bar{x} = 0,5, 4 — \bar{x} = 0,75$

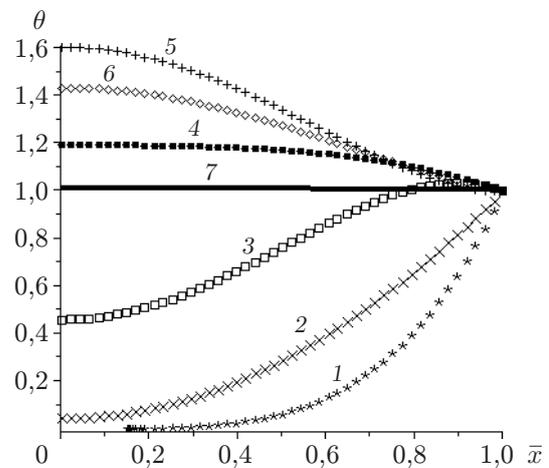


Рис. 5

Рис. 5. Зависимость безразмерной температуры плиты из ФГМ от координаты  $\bar{x}$  при  $\bar{\tau} = 1, \omega_1 = 0$  и различных значениях  $\bar{t}$ :  
 1 —  $\bar{t} = 10^{-3}, 2 — \bar{t} = 0,5, 3 — \bar{t} = 1,0, 4 — \bar{t} = 1,5, 5 — \bar{t} = 2,0, 6 — \bar{t} = 2,5, 7 — \bar{t} = 10,0$

На рис. 4 видно, что температурные колебания наблюдаются во всех частях плиты из ФГМ, при этом максимальные колебания имеют место на изолированной части плиты.

На рис. 5 приведена зависимость температуры в пластине из ФГМ от безразмерной координаты при различных значениях безразмерного времени. При малых значениях безразмерного времени только часть пластины из ФГМ вблизи ее края  $\bar{x} = 1$  находилась при повышенной температуре. При увеличении безразмерного времени безразмерная температура на другой поверхности пластины  $\bar{x} = 0$  увеличивается до тех пор, пока не достигнет максимума вследствие отражения и взаимодействия тепловых волн. После этого температура постепенно уменьшается до значения  $\theta = 1$ , соответствующего стационарной безразмерной температуре.

Как указывалось выше, на распределение температуры не оказывает влияния массовая плотность или удельная теплоемкость. Таким образом, можно исследовать зависимость температуры только от теплопроводности. Согласно рис. 6, чтобы ограничить колебания температуры и избежать повреждений внутренней и молекулярной структуры композиционных материалов, целесообразно использовать ФГМ с отрицательным значением безразмерного параметра неоднородности. В то же время, чтобы увеличить температурные колебания и достичь большего значения температуры, целесообразно использовать ФГМ с положительным безразмерным параметром неоднородности.

Зависимость максимальной температуры от безразмерного времени релаксации на теплоизолированном крае плиты из ФГМ при различных значениях безразмерного параметра неоднородности показаны на рис. 7. В настоящем исследовании рассматривается диапазон  $|\omega| \leq 1$ , который наиболее часто используется в работах (см., например, [36]). На рис. 7 видно, что  $\theta_{\max}$  увеличивается при увеличении безразмерного параметра неоднородности и безразмерного времени релаксации.

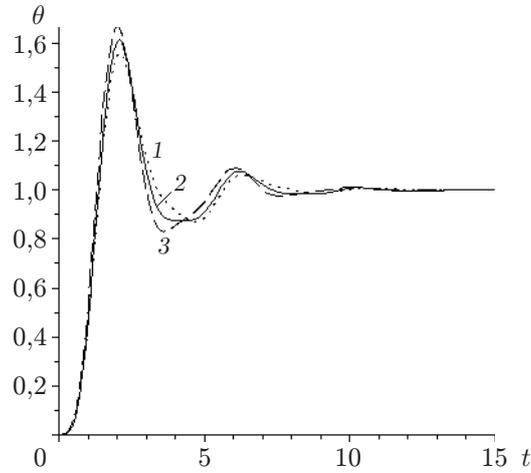


Рис. 6. Зависимость безразмерной температуры плиты из ФГМ от времени при  $\bar{x} = 0$ ,  $\bar{\tau} = 1$  и различных значениях  $\omega$ :  
 1 —  $\omega = -0,2$ , 2 —  $\omega = 0$ , 3 —  $\omega = 0,2$

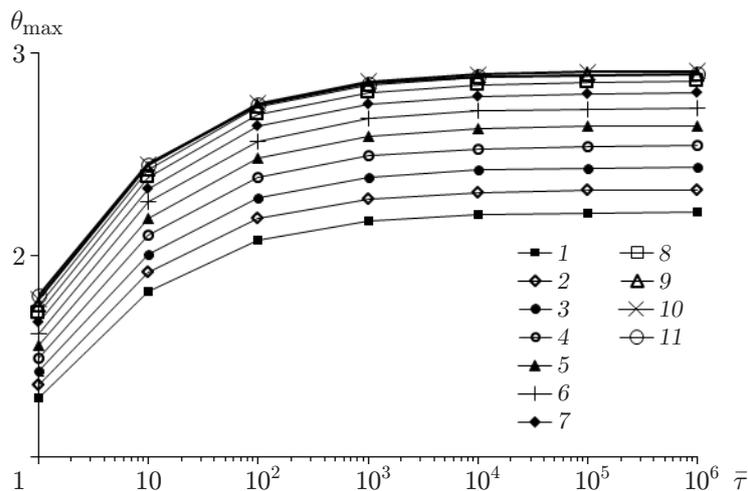


Рис. 7. Зависимость максимальной безразмерной температуры плиты из ФГМ от  $\bar{\tau}$  при  $\bar{x} = 0$  и различных значениях  $\omega$ :  
 1 —  $\omega = -1,0$ , 2 —  $\omega = -0,8$ , 3 —  $\omega = -0,6$ , 4 —  $\omega = -0,4$ , 5 —  $\omega = -0,2$ , 6 —  $\omega = 0$ ,  
 7 —  $\omega = 0,2$ , 8 —  $\omega = 0,4$ , 9 —  $\omega = 0,6$ , 10 —  $\omega = 0,8$ , 11 —  $\omega = 1,0$

На рис. 8 видно, что при увеличении безразмерного времени релаксации максимальная безразмерная температура уменьшается менее существенно, а при очень больших значениях безразмерного времени релаксации  $\theta_{\max}$  зависит только от безразмерного параметра неоднородности.

На рис. 9 приведена зависимость безразмерного времени  $t_{\max}$ , за которое температура достигает максимального значения, от безразмерного параметра неоднородности. Видно, что безразмерная неоднородность оказывает незначительное влияние на время достижения температурного максимума, которое зависит только от безразмерного времени тепловой релаксации.

**Заключение.** В работе приведено решение задачи о ГТП в плите из ФГМ. При этом полагалось, что свойства плиты меняются экспоненциально, за исключением параметра

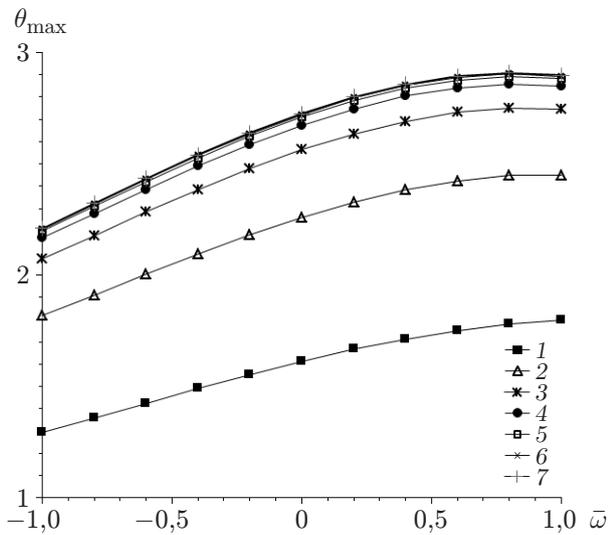


Рис. 8

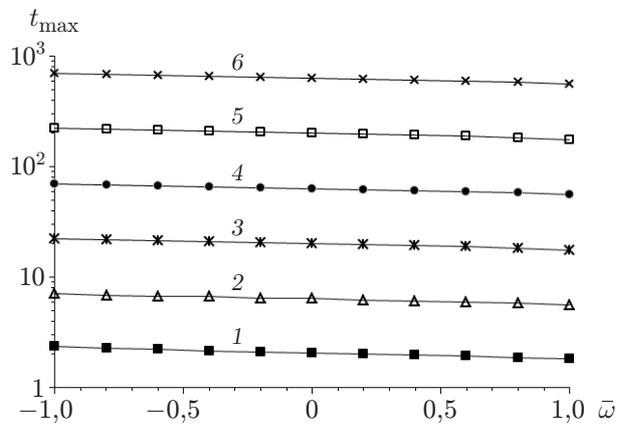


Рис. 9

Рис. 8. Зависимость максимальной безразмерной температуры плиты из ФГМ от безразмерного параметра неоднородности  $\bar{\omega}$  при  $\bar{x} = 0$  и различных значениях  $\bar{\tau}$ :

1 —  $\bar{\tau} = 1$ , 2 —  $\bar{\tau} = 10$ , 3 —  $\bar{\tau} = 10^2$ , 4 —  $\bar{\tau} = 10^3$ , 5 —  $\bar{\tau} = 10^4$ , 6 —  $\bar{\tau} = 10^5$ , 7 —  $\bar{\tau} = 10^6$

Рис. 9. Зависимость времени, за которое безразмерная температура плиты из ФГМ достигает максимального значения, от безразмерного параметра неоднородности  $\bar{\omega}$  при  $\bar{x} = 0$  и различных значениях  $\bar{\tau}$ :

1 —  $\bar{\tau} = 1$ , 2 —  $\bar{\tau} = 10$ , 3 —  $\bar{\tau} = 10^2$ , 4 —  $\bar{\tau} = 10^3$ , 5 —  $\bar{\tau} = 10^4$ , 6 —  $\bar{\tau} = 10^5$

тепловой релаксации, который полагался постоянным. Задача решена аналитически в области преобразования Лапласа с помощью метода дифференциального преобразования и выполнено численное обращение преобразования Лапласа, чтобы найти решение на рассматриваемом временном интервале. Сравнение полученных результатов и результатов точного решения для гомогенного случая показало справедливость решения и позволило сделать следующие выводы.

На распределение температуры и скорость теплового распространения волны существенное влияние оказывает теплопроводность ФГМ и не оказывают влияния удельная теплоемкость и массовая плотность.

Вследствие отражения и взаимодействия тепловых волн в плите наблюдаются тепловые колебания ГТП.

При постоянном значении безразмерного параметра неоднородности максимальная температура на теплоизолированном крае плиты увеличивается при увеличении безразмерного времени релаксации, однако начиная с некоторого значения влияние времени релаксации на максимальную температуру становится несущественным.

Для уменьшения колебаний тепловых волн целесообразно использовать ФГМ с отрицательной безразмерной неоднородностью, для увеличения — с положительной безразмерной неоднородностью.

Безразмерный параметр неоднородности не оказывает значительного влияния на время, в течение которого безразмерная температура достигает максимального значения.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Suresh S.** Fundamentals of functionally graded materials / S. Suresh, S. A. Mortensen. L.: Inst. Materials, IOM Comm. Ltd, 1998.
2. **Jin Z-H., Batra R. C.** Stress intensity relaxation at the tip of an edge crack in a functionally graded material subjected to a thermal shock // *J. Thermal Stresses*, 1996. V. 19. P. 317–339.
3. **Tanaka M., Matsumoto T., Suda Y.** A dual reciprocity boundary element method applied to the steady-state heat conduction problem of functionally gradient materials // *Proc. of Japan national symp. on boundary element method*. S. l., 2000. V. 17. P. 11–16.
4. **Gray L. J., Kaplan T., Richardson J. D., Paulino G. H.** Green's functions and boundary integral analysis for exponentially graded materials: heat conduction // *J. Appl. Mech.* 2003. V. 70. P. 543–549.
5. **Sutradhar A., Paulino G. H., Gray L. J.** Transient heat conduction in homogeneous and nonhomogeneous materials by the Laplace transform Galerkin boundary element method // *Engng Anal. Boundary Elements*. 2002. V. 26. P. 119–132.
6. **Sutradhar A., Paulino G. H.** A simple boundary element method for problems of potential in non-homogeneous media // *Intern. J. Numer. Methods Engng.* 2004. V. 60. P. 2203–2230.
7. **Sladek J., Sladek V., Zhang Ch.** Heat transient heat conduction analysis in functionally graded materials by the meshless local boundary integral equation method // *Comput. Mater. Sci.* 2003. V. 28. P. 494–504.
8. **Sladek J., Sladek V., Krivacek J., Zhang Ch.** Local BIEM for transient heat conduction analysis in 3-D axisymmetric functionally graded solids // *Comput. Mech.* 2003. V. 32. P. 169–176.
9. **Sladek J., Sladek V., Zhang Ch.** A local BIEM for analysis of transient heat conduction with nonlinear source terms in FGMS // *Engng Anal. Boundary Elements*. 2004. V. 28. P. 1–11.
10. **Qian L. F., Batra R. C.** Three-dimensional transient heat conduction in a functionally graded thick plate with a higher-order plate theory and a meshless local Petrov — Galerkin method // *Comput. Mech.* 2005. V. 35. P. 214–226.
11. **Cattaneo C.** A form of heat conduction which eliminates the paradox of instantaneous propagation // *Compte Rendus*. 1958. V. 247. P. 431–433.
12. **Vernotte P.** Some possible complications in the phenomena of thermal conduction // *Compte Rendus*. 1961. V. 252. P. 2190–2191.
13. **Ozisk M. N., Tzou D. Y.** On the wave theory in heat conduction // *J. Heat Transfer*. 1986. V. 116. P. 526–535.
14. **Chen T. M.** Numerical solution of hyperbolic heat conduction in thin surface layers // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 2007. V. 50. P. 4424–4429.
15. **Tan Z. M., Yang W. J.** Propagation of thermal waves in transient heat conduction in a thin film // *J. Franklin Inst.* 1999. V. 336. P. 185–197.
16. **Tan Z. M., Yang W. J.** Heat transfer during asymmetrical collision of thermal waves in a thin film // *Intern. J. Heat Mass Transfer*. 1997. V. 40. P. 3999–4006.
17. **Lewandowska M., Malinowski L.** An analytical solution of the hyperbolic heat conduction equation for the case of a finite medium symmetrically heated on both sides // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 2006. V. 33. P. 61–69.
18. **Moosaie A.** Non-Fourier heat conduction in a finite medium subjected to arbitrary periodic surface disturbance // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 2007. V. 34. P. 996–1002.
19. **Kaminski W.** Hyperbolic heat conduction equation for material with a non-homogeneous inner structure // *J. Heat Transfer*. 1990. V. 112. P. 555–560.
20. **Al-Nimr M. A., Naji M.** The hyperbolic heat conduction equation in an anisotropic material // *Intern. J. Thermophys.* 2000. V. 21. P. 281–287.

21. **Babaei M. H., Chen Z. T.** Hyperbolic heat conduction in a functionally graded hollow sphere // Intern. J. Thermophys. 2008. V. 29. P. 1457–1469.
22. **Keles I., Conker C.** Transient hyperbolic heat conduction in thick-walled FGM cylinders and spheres with exponentially-varying properties // Europ. J. Mech. A. Solids. 2011. V. 30. P. 449–455.
23. **Raveshi M. R., Amiri S., Keshavarz A.** Analysis of one-dimensional hyperbolic heat conduction in a functionally graded thin plate // Proc. ASME/JSME of the 8th thermal engineering joint conf., Honolulu, Hawaii (USA), 13–17 Mar. 2011. S. 1., 2011. P. T10035-T10035-7.
24. **Glass D. E., Ozisik N., McRae D. S., Vick B.** On the numerical solution of hyperbolic heat conduction // Numer. Heat Transfer. 1985. V. 8. P. 497–504.
25. **Tamma K. K., Railkar S. B.** Specially tailored transfinite-element formulations for hyperbolic heat conduction involving non-Fourier effects // Numer. Heat Transfer. Pt B. Fundamentals: Intern. J. Comput. Methodology. 1989. V. 15. P. 211–226.
26. **Tamma K. K., D'Costa J. F.** Transient modeling analysis of hyperbolic heat conduction problems employing mixed implicit explicit method // Numer. Heat Transfer. Pt B. Fundamentals: Intern. J. Comput. Methodology. 1991. V. 19. P. 49–68.
27. **Yang H. Q.** Characteristics-based, high-order accurate and non oscillatory numerical method for hyperbolic heat conduction // Numer. Heat Transfer. Pt B. Fundamentals: Intern. J. Comput. Methodology. 1990. V. 18. P. 221–241.
28. **Zhou J. K.** Differential transformation method and its application for electrical circuits. Wuhan: Huazhong Univ. Press, 1986.
29. **Joneidi A. A., Ganji D. D., Babaelahi M.** Differential transformation method to determine fin efficiency of convective straight fins with temperature dependent thermal conductivity // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2009. V. 36, N 7. P. 757–762.
30. **Yaghoobi H., Torabi M.** The application of differential transformation method to nonlinear equations arising in heat transfer // Intern. Comm. Heat Mass Transfer. 2011. V. 38. P. 815–820.
31. **Sadri S., Babaelahi M.** Analysis of a laminar boundary layer flow over a flat plate with injection or suction // J. Appl. Mech. Tech. Phys. 2013. V. 54, N 1. P. 59–67.
32. **Rashidi M. M., Erfani E.** New analytical method for solving Burgers' and nonlinear heat transfer equations and comparison with HAM // Comput. Phys. Comm. 2009. V. 180, N 9. P. 1539–1544.
33. **Sadri S., Raveshi M. R., Amiri S.** Efficiency analysis of straight fin with variable heat transfer coefficient and thermal conductivity // J. Mech. Sci. Technol. 2012. V. 26. P. 1283–1290.
34. **Babaelahi M., Raveshi M. R.** Analytical efficiency analysis of aerospace radiating fin // J. Mech. Engng Sci. 2014. V. 228, iss. 17. P. 3133–3140. DOI: 10.1177/0954406214526963.
35. **Idrees M., Haq S.** Optimal homotopy asymptotic method: OHAM verses HAM, HPM, LAP. S. l.: LAMBERT Acad. Publ., 2012.
36. **Tutuncu N., Ozturk M.** Exact solutions for stresses in functionally graded pressure vessels // Composites. Pt B. Engineering. 2001. V. 32. P. 683–686.

*Поступила в редакцию 9/XII 2013 г.,  
в окончательном варианте — 24/III 2014 г.*