

УДК 539.3

## ДОСТАТОЧНЫЙ КРИТЕРИЙ РАЗРУШЕНИЯ В СЛУЧАЕ СЛОЖНОГО НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ ПРИ НЕПРОПОРЦИОНАЛЬНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ МАТЕРИАЛА В ЗОНЕ ПРЕДРАЗРУШЕНИЯ

В. М. Корнев, В. Д. Кургузов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск  
E-mails: kornev@hydro.nsc.ru, kurguzov@hydro.nsc.ru

Рассматривается общий случай пропорционального нагружения, когда имеет место сложное напряженное состояние материала в зоне предразрушения, что характерно для поликристаллических тел при пластическом деформировании. Предложен достаточный критерий разрушения в случае сложного напряженного состояния при непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения. С использованием модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла получены критические параметры разрушения (длина зоны предразрушения и нагрузка) для трещин, распространяющихся в квазихрупких материалах. Ширина зоны предразрушения определяется из решения задачи теории пластичности в окрестности вершины трещины. Предложенная модификация модели Леонова — Панасюка — Дагдейла позволяет оценить критическое раскрытие трещины и критическое смещение берегов трещины. Установлены неравенства, описывающие различные механизмы разрушения материала при пропорциональном нагружении: преимущественно сдвиговый механизм разрушения и механизм разрушения путем раскалывания.

Ключевые слова: разрушение, достаточный критерий, зона предразрушения.

**Введение.** В работах [1, 2] при изучении квазихрупкого разрушения в случае сложного напряженного состояния рассматривались только пропорциональное нагружение и пропорциональное деформирование материала (монокристалла) в зоне предразрушения, т. е. предполагалась соосность тензоров напряжений и деформаций. Ниже рассматривается общий случай пропорционального нагружения, когда в зоне предразрушения имеет место непропорциональное деформирование материала, что характерно для поликристаллических тел при пластическом деформировании. Схема процесса разрушения материалов со структурой приведена на рис. 3.1 в работе [3]. По сути, та же схема приведена на рис. 41 в [4]. Считается, что для таких материалов существует характерный линейный размер, в качестве которого целесообразно принять диаметр зерен материала. В окрестности вершины острой трещины, деформирующейся по смешанной моде, возникает сложное напряженное состояние, что при определенных условиях может приводить к затуплению острых трещин вследствие больших сдвиговых напряжений или деформаций. В работе [5] обнаружена возможность множественного ветвления трещин, обусловленная кратностью собственных значений при потере устойчивости системы. (Следует отметить, что в [5]

нагружение соответствовало первой моде разрушения.) Получены соотношения, описывающие угол излома траектории трещины, когда известны кривые теоретической прочности типа кривых Кулона — Мора. Трещина развивается по следующим направлениям: 1) перпендикулярно направлению максимального растяжения при отсутствии сдвиговых напряжений в окрестности ее вершины (гипотеза Эрдогана — Си), когда материал разрушается хрупко; 2) вдоль направления максимального сдвига при отсутствии нормальных напряжений в окрестности ее вершины, когда материал разрушается вязко (имеет место испускание дислокации); 3) вдоль направления, соответствующего обобщенному напряженному состоянию, когда материал разрушается квазихрупко или квазивязко. Для квазихрупких материалов предпочтительное направление развития трещины практически совпадает с направлением, перпендикулярным направлению максимальных растягивающих напряжений.

**1. Характеристики квазихрупкого материала со структурой при однократном нагружении.** Рассмотрим внутреннюю прямолинейную острую трещину в структурно-неоднородном материале на втором структурном уровне (зернистый материал). В изотропном упругом материале внутренняя трещина моделируется двусторонним разрезом длиной  $2l$ . Пусть на бесконечности заданы нормальные  $\sigma_\infty$  и касательные  $\tau_\infty$  напряжения, т. е. трещина деформируется по смешанной моде (нормальный отрыв и сдвиг). При выходе трещины на границу двух зерен возможно ветвление трещины или излом ее траектории вследствие несимметрии прочностных свойств материала относительно плоскости трещины. При постепенном нагружении образца нагрузками  $\sigma_\infty$  и  $\tau_\infty$ , приложенными на бесконечности, в окрестности вершины трещины возникает сложное напряженное состояние. Будем рассматривать пропорциональное (простое) нагружение, когда  $\tau_\infty/\sigma_\infty = c = \text{const}$ . Выбор пути ветвления и излома траектории трещины определяется прочностными характеристиками материала.

На рис. 1 приведены кривые теоретической прочности типа кривых Кулона — Мора для двух изотропных материалов. Кривая 1 описывает поведение квазивязкого материала, кривая 2 — поведение квазихрупкого материала. Путь пропорционального нагружения ( $\tau/\sigma = c = \text{const}$ ) показан лучом, направление которого определяется углом  $\varphi$  на плоскости  $\sigma$ – $\tau$  ( $\sigma$ ,  $\tau$  — нормальные и сдвиговые напряжения соответственно;  $\sigma_{m1}$ ,  $\sigma_{m2}$  — теоретические (идеальные) прочности материалов на растяжение;  $\tau_{m1}$ ,  $\tau_{m2}$  — теоретические (идеальные) прочности материалов на сдвиг;  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$  — критические значения напряжений на заданном пути деформирования; индекс “\*” соответствует критическому состоянию).

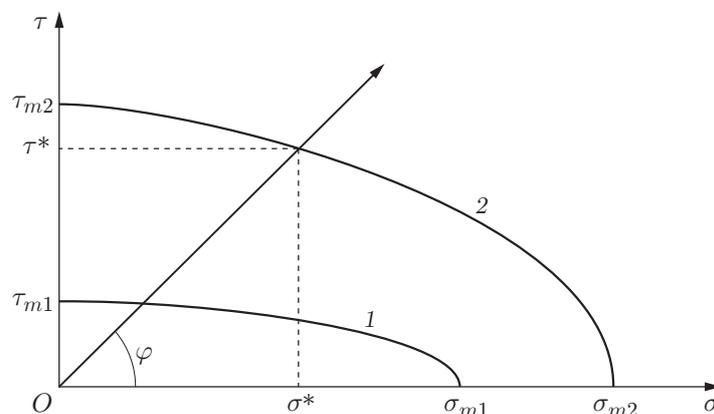


Рис. 1. Кривые теоретической прочности типа кривых Кулона — Мора для двух изотропных материалов:

1 — квазивязкий материал, 2 — квазихрупкий материал

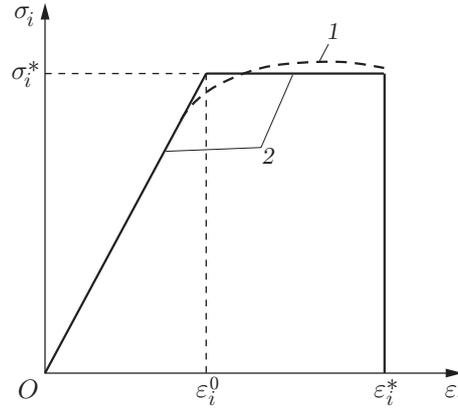


Рис. 2. Диаграмма  $\sigma_i$ - $\varepsilon_i$  деформирования квазихрупкого материала (1) и ее аппроксимация (2)

Из относительных оценок теоретических прочностей на растяжение  $\sigma_m$  и сдвиг  $\tau_m$  в предельных случаях следует: 1) для материалов, склонных к раскалыванию (хрупкий и квазихрупкий материалы),  $\sigma_m \approx \tau_m$  (кривая 2 на рис. 1); 2) для материалов, слабо сопротивляющихся испусканию дислокаций (квазивязкий материал),  $\sigma_m \gg \tau_m$  (кривая 1 на рис. 1).

Рассмотрим  $(\sigma_i$ - $\varepsilon_i)$ -диаграммы деформирования материалов ( $\sigma_i = \sqrt{\sigma^2 + \tau^2}$  — интенсивность напряжений;  $\varepsilon_i = \sqrt{\varepsilon^2 + \gamma^2}$  — интенсивность деформаций) в случае пропорционального нагружения. Эти диаграммы могут быть получены, например, в экспериментах на растяжение с кручением тонкостенных трубчатых образцов [6]. На рис. 2 приведена простейшая аппроксимация  $(\sigma_i$ - $\varepsilon_i)$ -диаграммы деформирования квазихрупкого материала ( $\sigma_i^*$  — критические значения напряжений;  $\varepsilon_i^0$  — предельные деформации в зоне упругого деформирования;  $\varepsilon_i^*$  — деформации, соответствующие началу процесса разрушения). Отметим, что диаграммы деформирования  $\sigma_i$ - $\varepsilon_i$  (см. рис. 2) становятся классическими диаграммами  $\sigma$ - $\varepsilon$  и  $\tau$ - $\gamma$  в тех случаях, когда пути пропорционального нагружения соответствуют первой или второй моде разрушения.

**2. Достаточный критерий разрушения при обобщенном напряженном состоянии.** Для описания напряженно-деформированного состояния в окрестности вершины трещины используем модель Леонова — Панасюка — Дагдейла [7, 8]. Введем декартову прямоугольную систему координат  $Oxy$ , начало которой находится в вершине трещины, а ось  $Ox$  направлена вдоль оси трещины. Если в континуальной модели использовать представления решений для напряжений на продолжении острой трещины  $y = 0$  через коэффициенты интенсивности напряжений  $K_I, K_{II}$ , то с точностью до величин высшего порядка малости в окрестности вершины трещины для линейной задачи можно записать

$$\sigma_y(x, 0) \approx K_I/\sqrt{2\pi x} + \sigma_\infty, \quad \tau_{xy}(x, 0) \approx K_{II}/\sqrt{2\pi x} + \tau_\infty. \quad (1)$$

Здесь  $\sigma_\infty, \tau_\infty$  — характерные напряжения, заданные на бесконечности либо на контуре ограниченного тела;  $K_I, K_{II}$  — суммарные коэффициенты интенсивности напряжений (КИН). Суммарные КИН можно представить в виде

$$\begin{aligned} K_I &= K_{I\infty} + K_{I\Delta}, & K_{I\infty} &> 0, & K_{I\Delta} &< 0, \\ K_{II} &= K_{II\infty} + K_{II\Delta}, & K_{II\infty} &> 0, & K_{II\Delta} &< 0, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $K_{I\infty}, K_{II\infty}$  — КИН, обусловленные напряжениями  $\sigma_\infty, \tau_\infty$ ;  $K_{I\Delta}, K_{II\Delta}$  — КИН, обусловленные напряжениями  $\sigma^*, \tau^*$ , действующими в окрестности носика фиктивной трещины в зоне предразрушения.

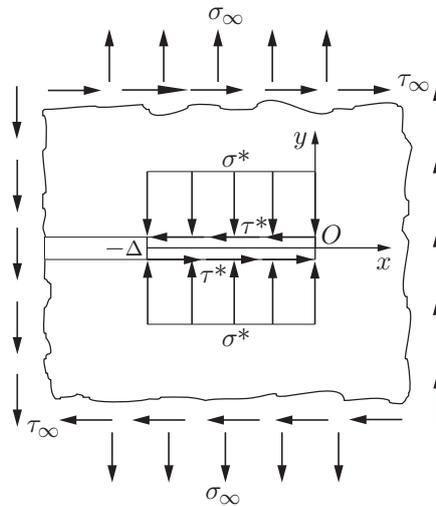


Рис. 3. Схема силового нагружения правого носика фиктивной трещины в обобщенной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла

В классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла исходная внутренняя прямолинейная трещина длиной  $2l_0$  заменяется фиктивной трещиной-разрезом длиной  $2l = 2l_0 + 2\Delta$  ( $\Delta$  — длина нагруженного участка или зоны предразрушения). Схема силового нагружения правого носика фиктивной трещины в обобщенной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла представлена на рис. 3 (начало системы координат  $Oxy$  находится в вершине фиктивной трещины, зона предразрушения занимает отрезок  $[-\Delta, 0]$  оси  $Ox$ ). Ниже рассматривается случай квазихрупкого разрушения, когда  $\Delta/l_0 \ll 1$ . В классической модели в зоне предразрушения действуют только нормальные напряжения  $\sigma^*$ , сдвиговые напряжения  $\tau_\infty$  и  $\tau^*$  отсутствуют. Напряжения  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$  совпадают с напряжениями критических состояний (см. рис. 2). Суммарный КИН  $K_I$  не может быть отрицательным, так как при  $K_I < 0$  берега трещины накладываются друг на друга, что с физической точки зрения невозможно.

В отличие от классической модели Леонова — Панасюка — Дагдейла в предлагаемой обобщенной модели помимо общей схемы нагружения зоны предразрушения рассматривается параметр, характеризующий ширину зоны предразрушения. Этот дополнительный параметр для первой моды разрушения использовался в [9, 10]. В п. 3 приведена оценка размеров пластической зоны, используемая при выводе соотношений, определяющих критическое раскрытие трещины и критическое смещение ее берегов.

Достаточный дискретно-интегральный критерий квазихрупкого разрушения [1, 2] для острой трещины имеет вид

$$\frac{1}{r_d} \int_0^{r_d} \sigma_y(x, 0) dx = \sigma^*, \quad \frac{1}{r_d} \int_0^{r_d} \tau_{xy}(x, 0) dx = \tau^*, \quad x \geq 0; \quad (3)$$

$$2v(-\Delta) = \frac{\varkappa + 1}{G} K_I \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = 2v^*, \quad 2u(-\Delta) = \frac{\varkappa + 1}{G} K_{II} \sqrt{\frac{\Delta}{2\pi}} = 2u^*, \quad -\Delta \leq x \leq 0. \quad (4)$$

Здесь  $\sigma_y(x, 0)$ ,  $\tau_{xy}(x, 0)$  — нормальные и касательные напряжения на продолжении трещины, имеющие интегрируемую особенность;  $r_d$  — характерный линейный размер структуры материала (диаметр зерна);  $2v = 2v(x)$ ,  $2u = 2u(x)$  — раскрытие трещины и смещение ее берегов соответственно;  $2v^*$ ,  $2u^*$  — критическое раскрытие трещины и критическое смещение ее берегов соответственно;  $\varkappa = 3 - 4\nu$  в случае плоской деформации,

$\kappa = (3 - \nu)/(1 + \nu)$  в случае плоского напряженного состояния;  $\nu$  — коэффициент Пуассона;  $G$  — модуль сдвига;  $K_I, K_{II}$  — суммарные коэффициенты интенсивности напряжений в обобщенной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла.

Напряжения  $\sigma_y, \tau_{xy}$  для континуальной модели после осреднения сравниваются с теоретическими прочностями поликристаллов  $\sigma^*, \tau^*$  на заданном пути пропорционального нагружения в дискретной модели. Взаимодействие берегов фиктивной трещины имеет место только на нагруженном участке разреза (см. рис. 3). В необходимом критерии [1, 2] соответствующие осредненные напряжения (3) не превышают теоретических прочностей на разрыв или сдвиг. При выполнении необходимого критерия ближайшая к вершине структура материала находится в критическом состоянии. Однако после исчерпания несущей способности ближайшей к вершине структуры возможно дополнительное нагружение тела с трещиной за счет закритического деформирования этой структуры и докритического деформирования следующей структуры, когда в окрестности вершины трещины отсутствуют повреждения. При выполнении достаточного критерия имеет место катастрофическое разрушение исходной системы.

Поясним достаточный критерий (3), (4). Пусть задана острая внутренняя трещина длиной  $2l_0$ , перед вершиной которой материал находится в исходном состоянии. Тогда зона предразрушения отсутствует, т. е. ее длина равна нулю ( $\Delta = 0$ ). При пропорциональном нагружении  $\tau_\infty/\sigma_\infty = c = \text{const}$  подрастания трещины не происходит, если  $\sigma_\infty < \sigma_\infty^0$  ( $\sigma_\infty^0$  — критические напряжения для острых трещин, полученные с использованием необходимого критерия разрушения [1, 2]). В случае когда нагрузка превышает критические напряжения в необходимом критерии:  $\sigma_\infty > \sigma_\infty^0$ , происходит страгивание вершины трещины и начинается неупругое деформирование материала зоны предразрушения, причем  $\Delta = \Delta(\sigma_\infty)$ . В простейшем случае, когда зона предразрушения расположена на продолжении трещины, длина модельной трещины вычисляется следующим образом:  $2l = 2l_0 + 2\Delta$ . Соотношения (3) представляют собой условия страгивания вершины модельной трещины. Одновременно с возникновением зоны предразрушения в окрестности вершины модельной трещины согласно обобщенной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла формируются силовые связи (см. рис. 3). Вследствие действия в вершине трещины силовых связей имеет место устойчивый рост трещины ( $2l_0 < 2l < 2l^*$ ), до тех пор пока напряжение  $\sigma_\infty$  не достигнет значения  $\sigma_\infty^*$  ( $\sigma_\infty^* > \sigma_\infty^0$  — критические напряжения для острых трещин, полученные с помощью достаточного критерия разрушения (3), (4);  $2l^* = 2l_0 + 2\Delta^*$  — критическая длина модельной внутренней трещины;  $\Delta^* = \Delta(\sigma_\infty^*)$  — критическая длина зоны предразрушения). Соотношения (4) представляют собой условия разрушения силовых связей, действующих в зоне предразрушения, расположенной перед вершиной реальной трещины. Если длина зоны предразрушения  $\Delta$  равна критической величине  $\Delta^*$ , устойчивый рост трещины сменяется неустойчивым. Заметим, что  $\sigma_\infty^0$  является оценкой снизу, а  $\sigma_\infty^*$  — оценкой сверху критических напряжений в случае совместного нагружения по первой и второй модам.

**3. Оценка размеров пластической зоны.** Для получения оценок раскрытия трещин и смещения их берегов необходимо знать ширину пластической зоны в вершине реальной трещины в случае обобщенного напряженного состояния. В приближенной постановке задачи оценим форму и размеры пластической зоны в окрестности вершины трещины при смешанном нагружении. Точное аналитическое решение данной задачи в упругопластической постановке в настоящее время отсутствует.

Используем критерий пластичности Мизеса, который в главных осях имеет вид

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_T^2, \quad (5)$$

где  $\sigma_T$  — предел текучести. Главные напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  определяются по формулам

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_x + \sigma_y)/2 \pm \sqrt{[(\sigma_x - \sigma_y)/2]^2 + \tau_{xy}^2}. \quad (6)$$

Третье главное напряжение  $\sigma_3$  для случая плоской деформации можно представить в виде  $\sigma_3 = \sigma_z = \nu(\sigma_x + \sigma_y)$ . Асимптотика поля напряжений в окрестности вершины трещины, деформирующейся по смешанной моде, имеет вид (гладкие части решений опущены)

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{K_{I\infty}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) - \frac{K_{II\infty}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \left(2 + \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}\right), \\ \sigma_y &= \frac{K_{I\infty}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 + \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right) + \frac{K_{II\infty}}{\sqrt{2\pi r}} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2}, \\ \tau_{xy} &= \frac{K_{I\infty}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \cos \frac{3\theta}{2} + \frac{K_{II\infty}}{\sqrt{2\pi r}} \cos \frac{\theta}{2} \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} \sin \frac{3\theta}{2}\right). \end{aligned} \quad (7)$$

Здесь  $\theta$  — полярный угол;  $K_{I\infty} = \sigma_\infty \sqrt{\pi l}$ ,  $K_{II\infty} = \tau_\infty \sqrt{\pi l}$  — КИН, обусловленные напряжениями  $\sigma_\infty$  и  $\tau_\infty$  соответственно (ширина зоны пластичности зависит от КИН  $K_{I\infty}$  и  $K_{II\infty}$ ) [11]. Подставляя соотношения (7) в (6), находим главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ . После подстановки главных напряжений в критерий пластичности (5) получаем оценку размера пластической зоны, которая в случае плоской деформации определяется радиус-вектором  $r_p$ , зависящим от полярного угла  $\theta$ :

$$\begin{aligned} r_p(\theta) &= \frac{(K_{I\infty})^2}{4\pi\sigma_T^2} \left(\frac{3}{2} \sin^2 \theta + (1 - 2\nu)^2(1 + \cos \theta)\right) + \frac{2K_{I\infty}K_{II\infty}}{4\pi\sigma_T^2} [3 \cos \theta - (1 - 2\nu)^2] + \\ &+ \frac{(K_{II\infty})^2}{4\pi\sigma_T^2} \left(\frac{3}{2} + \frac{9}{2} \cos^2 \theta + (1 - 2\nu)^2(1 - \cos \theta)\right). \end{aligned} \quad (8)$$

Оценку размера пластической зоны в случае плоского напряженного состояния легко получить из оценки (8), полагая  $\nu = 0$ .

На рис. 4 представлены формы пластической зоны, определяемой выражением (8), при  $K_{I\infty}/K_{II\infty} = 5,0; 1,0; 0,5$  (сплошные кривые); штриховыми кривыми на рис. 4, *a, в* показаны

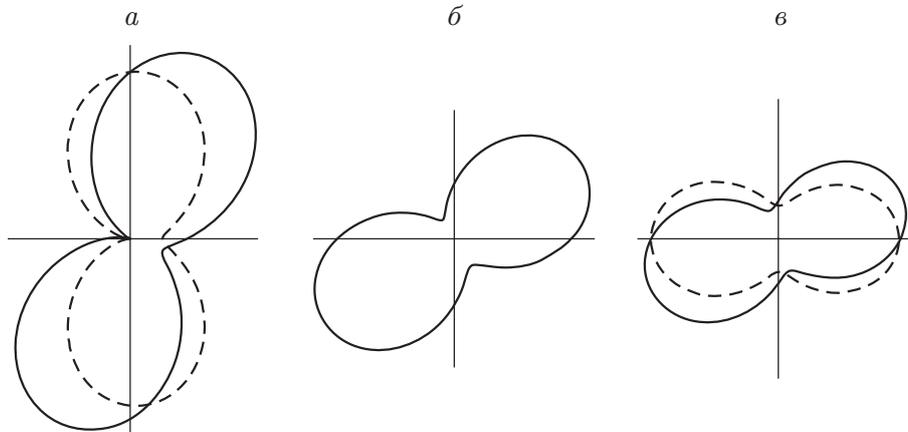


Рис. 4. Формы зон пластичности в случае плоской деформации:

*a* —  $K_{I\infty}/K_{II\infty} = 5,0$ , *б* —  $K_{I\infty}/K_{II\infty} = 1,0$ , *в* —  $K_{I\infty}/K_{II\infty} = 0,5$ ; сплошные линии — совместное нагружение по первой и второй модам, штриховые — нагружение по первой (*a*) и второй (*в*) модам разрушения

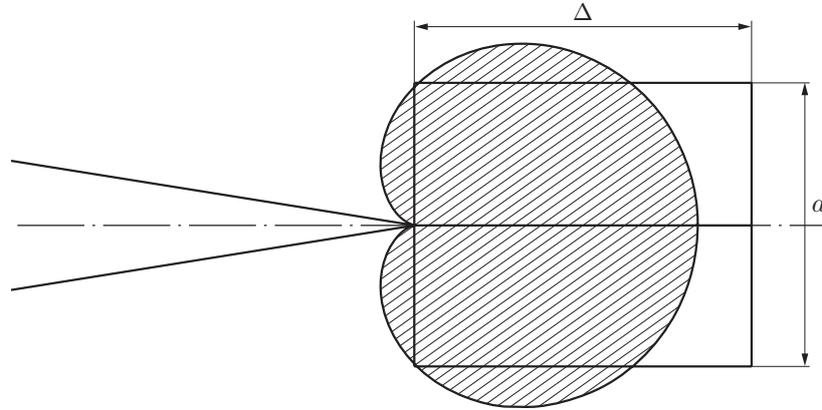


Рис. 5. Аппроксимация пластической зоны в окрестности вершины трещины зоной предразрушения (плоское напряженное состояние)

формы пластических зон для первой и второй мод разрушения соответственно. Кривые построены в полярных координатах с использованием безразмерного радиус-вектора  $\rho = r_p / [K_{I\infty} K_{II\infty} / (4\pi\sigma_T^2)]$ .

Длина зоны предразрушения  $\Delta$  определяется при решении задачи о разрушении (3), (4), а ширина этой зоны  $a$  — при решении упругопластической задачи (5)–(8). Аппроксимируем пластическую зону в окрестности вершины трещины прямоугольной зоной предразрушения шириной  $a$  и длиной  $\Delta$  (рис. 5). Пусть ширина зоны предразрушения  $a$  равна ширине зоны пластичности  $2r_p(\theta)|_{\theta=0}$  в вершине реальной трещины, т. е.  $a = 2r_p(0)$ . При пропорциональном нагружении  $\tau_\infty/\sigma_\infty = c = \text{const}$  имеем  $K_{II\infty} = cK_{I\infty}$ , следовательно,

$$r_p(0) = \frac{P(c)}{2\pi} \left( \frac{K_{I\infty}}{\sigma_T} \right)^2,$$

где  $P(c) = (1 - 2\nu)^2 + [3 - (1 - 2\nu)^2]c + 3c^2$ . Критические параметры  $2v^*$  и  $2u^*$  находим из соотношений

$$2v^* = a^*(\varepsilon^* - \varepsilon_0), \quad 2u^* = a^*(\gamma^* - \gamma_0), \quad (9)$$

где  $\varepsilon_i^0 = \sqrt{(\varepsilon_0)^2 + (\gamma_0)^2}$ ,  $\varepsilon_i^* = \sqrt{(\varepsilon^*)^2 + (\gamma^*)^2}$  определяются по диаграмме  $\sigma_i - \varepsilon_i$  (см. рис. 2). Подставляя  $r_p(0)$  в (9), получаем

$$v^* = \frac{P(c)}{2\pi} \left( \frac{K_{I\infty}^*}{\sigma_T} \right)^2 (\varepsilon^* - \varepsilon_0), \quad u^* = \frac{P(c)}{2\pi} \left( \frac{K_{I\infty}^*}{\sigma_T} \right)^2 (\gamma^* - \gamma_0). \quad (10)$$

Система первых соотношений критерия (3), (4) эквивалентна системе вторых соотношений критерия (3), (4), если имеет место пропорциональное нагружение, а тензоры напряжений и деформаций соосны [1, 2]. В отличие от классических критериев разрушения [7, 8, 11–13] в критерии (3), (4) используются ограничения

$$K_I > 0, \quad K_{II} \neq 0, \quad (11)$$

а ширина зоны предразрушения отождествляется с диаметром зоны пластичности в вершине реальной трещины. Ниже ограничения (11) используются при получении критических параметров разрушения.

**4. Критические параметры разрушения.** Получим соотношения, связывающие критические параметры  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$  и  $\Delta^*$ , для острой трещины, распространяющейся прямолинейно в квазихрупком материале. Для критических значений  $K_I^*$ ,  $K_{II}^*$ ,  $\Delta^*$  соотношения (3), (4) превращаются в равенства. Для КИН  $K_I^*$  и длины зоны предразрушения  $\Delta^*$

используются первые соотношения в (3), (4), а для КИН  $K_{II}^*$  и длины зоны предразрушения  $\Delta^*$  используются вторые соотношения в (3), (4). Выполняя интегрирование в (3) с учетом (1), (2), после ряда преобразований получаем

$$K_I^* = \sqrt{\pi r_d/2} (\sigma^* - \sigma_\infty^*), \quad K_{II}^* = \sqrt{\pi r_d/2} (\tau^* - \tau_\infty^*); \quad (12)$$

$$\Delta^* = 8\pi \left( \frac{G}{\varkappa + 1} \frac{v^*}{K_I^*} \right)^2, \quad \Delta^* = 8\pi \left( \frac{G}{\varkappa + 1} \frac{u^*}{K_{II}^*} \right)^2. \quad (13)$$

Для суммарных коэффициентов интенсивности напряжений  $K_I$ ,  $K_{II}$ , обусловленных напряжениями  $\sigma_\infty$ ,  $\tau_\infty$ , действующими на бесконечности, и напряжениями  $\sigma^*$ ,  $\tau^*$ , действующими на отрезке  $[-\Delta; 0]$ , справедливо представление [14]

$$\begin{aligned} K_I &= \sigma_\infty \sqrt{\pi l} - \sigma^* \sqrt{\pi l} [1 - (2/\pi) \arcsin(1 - \Delta/l)], \\ K_{II} &= \tau_\infty \sqrt{\pi l} - \tau^* \sqrt{\pi l} [1 - (2/\pi) \arcsin(1 - \Delta/l)]. \end{aligned} \quad (14)$$

Получим оценки для длины зоны предразрушения  $\Delta$ . Соотношения (14) можно существенно упростить, если длина нагруженного участка значительно меньше полудлины трещины, т. е.  $\Delta/l \ll 1$ , что соответствует квазихрупким материалам. Так как

$$\arcsin(1 - \Delta/l) \approx \pi/2 - \sqrt{2\Delta/l},$$

то первое соотношение в (14), записанное для критических параметров, преобразуется к виду

$$K_I^* = \sigma_\infty^* \sqrt{\pi l^*} - \sigma^* \sqrt{\pi l^*} (2\sqrt{2}/\pi) \sqrt{\Delta^*/l^*}, \quad (15)$$

где  $l^* = l_0 + \Delta^*$ . Из первого соотношения в (13) и (15) с учетом первого соотношения в (10) после ряда преобразований получаем квадратное уравнение для безразмерного параметра  $\sqrt{\Delta^*/l^*}$

$$\left( \sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} \right)^2 - \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{\sigma_\infty^*}{\sigma^*} \sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} + \frac{\pi}{2(\varkappa + 1)} \frac{G}{\sigma^*} \left( \frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_T} \right)^2 P(c)(\varepsilon^* - \varepsilon_0) = 0.$$

Пренебрегая величинами высшего порядка малости, получаем выражение для меньшего корня квадратного уравнения

$$\sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} \approx \frac{\sqrt{2}}{\varkappa + 1} \frac{G\sigma_\infty^*}{\sigma_T^2} P(c)(\varepsilon^* - \varepsilon_0). \quad (16)$$

Если ограничение  $\Delta^*/l^* \ll 1$  не выполняется, из соотношений (13), (14) получается трансцендентное уравнение для определения  $\Delta^*/l^*$ . Это уравнение нетрудно решить, если оно имеет положительный корень, меньший единицы.

Критический КИН  $K_I^*$  для острой внутренней трещины (15) представим в виде

$$K_I^* = \sigma_\infty^* \sqrt{\pi l^*} \left( 1 - \frac{2\sqrt{2}}{\pi} \frac{\sigma^*}{\sigma_\infty^*} \sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} \right). \quad (17)$$

С учетом первого соотношения в (12) и уравнения (17), в которое можно подставить  $\sqrt{\Delta^*/l^*}$  из (16), уравнение кривой разрушения в соответствии с достаточным критерием для острой внутренней трещины записывается в виде

$$\frac{\sigma_\infty^*}{\sigma^*} = \left[ 1 + \sqrt{\frac{2l^*}{r_d}} \left( 1 - \frac{4}{\pi(\varkappa + 1)} \frac{G\sigma^*}{\sigma_T^2} P(c)(\varepsilon^* - \varepsilon_0) \right) \right]^{-1}. \quad (18)$$

Таким образом, при пропорциональном нагружении и непропорциональном деформировании материала в зоне предразрушения в случае пластического течения получена система двух нелинейных уравнений (16), (18) относительно критических параметров  $\Delta^*$  и  $\sigma_\infty^*$ , описывающая зону предразрушения и кривую разрушения в случае сложного напряженного состояния. В силу эквивалентности первых и вторых соотношений в (12), (13) для второй моды разрушения целесообразно использовать эквивалентную систему двух нелинейных уравнений

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\Delta^*}{l^*}} &\approx \frac{\sqrt{2}}{\varkappa + 1} \frac{G\tau_\infty^*}{\sigma_T^2} P(c)(\gamma^* - \gamma_0), \\ \frac{\tau_\infty^*}{\tau^*} &= \left[ 1 + \sqrt{\frac{2l^*}{r_d}} \left( 1 - \frac{4}{\pi(\varkappa + 1)} \frac{G\tau^*}{\sigma_T^2} P(c)(\gamma^* - \gamma_0) \right) \right]^{-1}. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь  $P(c) = (1 - 2\nu)^2/c^2 + [3 - (1 - 2\nu)^2]/c + 3$ .

Сопоставим критические нагрузки, полученные по необходимым и достаточным критериям для одних и тех же длин трещин. Для необходимого критерия первое соотношение в (12) принимает вид

$$K_I^0 = \sqrt{\pi r_d/2} (\sigma^* - \sigma_\infty^0),$$

где  $\sigma_\infty^0$  — критическое напряжение, соответствующее началу процесса разрушения. Так как согласно (14)  $K_I^0 = \sigma_\infty^0 \sqrt{\pi l_0}$ , то

$$\frac{\sigma_\infty^0}{\sigma^*} = \left( 1 + \sqrt{\frac{2l_0}{r_d}} \right)^{-1}.$$

Для достаточного критерия с учетом первого соотношения в (12) и уравнения (17) находим

$$\frac{\sigma_\infty^*}{\sigma^*} = \left( 1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\Delta^*}{r_d}} \right) \left( 1 + \sqrt{\frac{2l^*}{r_d}} \right)^{-1}.$$

В том случае, когда  $l_0 = l^*$ , имеем

$$\frac{\sigma_\infty^*}{\sigma_\infty^0} = 1 + \frac{4}{\pi} \sqrt{\frac{\Delta^*}{r_d}}.$$

Отсюда следует, что критические нагрузки, полученные по необходимым и достаточным критериям, могут существенно различаться. На рис. 6 показаны участки устойчивого (кривая 1) и неустойчивого (кривая 2) роста трещин, а также кривая разрушения, полученная по необходимому критерию (кривая 3). На участке устойчивого роста формирующиеся связи воспринимают увеличивающуюся нагрузку, так как  $\sigma_\infty^* > \sigma_\infty^0$ , в результате происходит подрастание трещины, поскольку  $l^0 < l^*$ .

**Заключение.** С использованием модифицированной модели Леонова — Панасюка — Дагдейла получены критические параметры разрушения (длины зон предразрушения и нагрузки) для прямолинейных трещин в квазихрупких материалах. При этом зоны предразрушения представляют собой прямоугольники, расположенные вдоль трещины. Ширина каждой зоны предразрушения определяется из решения задачи теории пластичности вблизи вершины трещины. При формулировке критериев разрушения использовались простейшие аппроксимации диаграмм деформирования реальных материалов. Предлагаемая модификация модели Леонова — Панасюка — Дагдейла позволяет оценить критическое

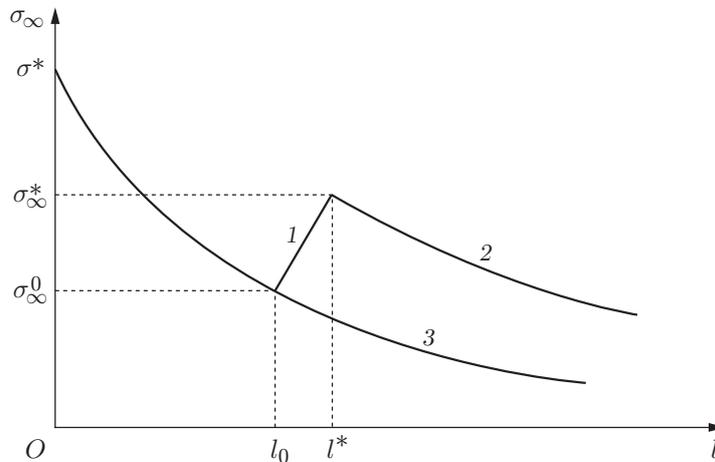


Рис. 6. Кривые разрушения квазихрупкого материала:

- 1 — участок устойчивого роста трещины, 2 — участок неустойчивого роста трещины,  
3 — кривая разрушения, полученная по необходимому критерию

раскрытие трещины и критическое смещение ее берегов. С использованием коэффициентов интенсивности напряжений для трещины, распространяющейся прямолинейно, получены простые выражения для критических параметров разрушения, в случае когда на продолжении трещины заданы нормальные и сдвиговые напряжения, моделирующие зону пластичности. При пропорциональном нагружении  $\tau_\infty/\sigma_\infty = c = \text{const}$ , когда имеет место непропорциональное деформирование материала в зоне предразрушения, из первых уравнений критерия (3), (4) получен критический параметр  $\sigma_\infty^*$ , а из вторых уравнений критерия (3), (4) — критический параметр  $\tau_\infty^*$ .

Сравним полученные величины. Возможны три случая: 1)  $\tau_\infty^* = c\sigma_\infty^*$ ; 2)  $\tau_\infty^* < c\sigma_\infty^*$ ; 3)  $\tau_\infty^* > c\sigma_\infty^*$ . Случай 1 соответствует пропорциональному деформированию материала в зоне предразрушения при пропорциональном нагружении ( $\tau_\infty = c\sigma_\infty$ ) [15, 16]. Из соотношений (18), (19) следует, что случай 1 имеет место только при  $\gamma_0 = c\varepsilon_0$ ,  $\gamma^* = c\varepsilon^*$ . Случаи 2, 3 соответствуют непропорциональному деформированию материала в зоне предразрушения при пропорциональном нагружении ( $\tau_\infty = c\sigma_\infty$ ). Случай 2 возможен, когда  $\gamma_0 = c\varepsilon_0$ , но  $\gamma^* \neq c\varepsilon^*$ , причем  $\gamma^* < c\varepsilon^*$ . Случай 3 имеет место, когда  $\gamma_0 = c\varepsilon_0$ , но  $\gamma^* \neq c\varepsilon^*$ , причем  $\gamma^* > c\varepsilon^*$ . В случае 2 материал в зоне предразрушения имеет тенденцию к разрушению путем сдвига, а в случае 3 он разрушается путем раскалывания. В настоящее время зависимости  $\varepsilon^* = \varepsilon^*(\varphi)$ ,  $\gamma^* = \gamma^*(\varphi)$  отсутствуют.

Таким образом, проведено исследование механизма разрушения материала зоны предразрушения в общем случае, когда имеет место пропорциональное нагружение.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Корнев В. М., Кургузов В. Д. Многопараметрический достаточный критерий квазихрупкой прочности для сложного напряженного состояния // Физ. мезомеханика. 2006. Т. 9, № 5. С. 43–52.
2. Kornev V. M., Kurguzov V. D. Multiparametric sufficient criterion of quasi-brittle fracture for complicated stress state // Engng Fract. Mech. 2008. V. 75, N 5. P. 1099–1113.
3. Макклиток Ф. А., Ирвин Дж. Р. Вопросы пластичности в механике разрушения // Прикладные вопросы вязкости разрушения. М.: Мир, 1968. С. 143–186.
4. Партон В. З. Механика разрушения: От теории к практике. М.: Изд-во ЛКИ, 2007.

5. **Корнев В. М.** Ветвление и излом траекторий трещин отрыва в поликристаллах // Физ. мезомеханика. 2003. Т. 6, № 5. С. 37–46.
6. **Аннин Б. Д.** Поведение материалов в условиях сложного нагружения / Б. Д. Аннин, В. М. Жигалкин. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 1999.
7. **Леонов М. Я., Панасюк В. В.** Развитие мельчайших трещин в твердом теле // Прикл. механика. 1959. Т. 5, № 4. С. 391–401.
8. **Dugdale D. S.** Yielding of steel sheets containing slits // J. Mech. Phys. Solids. 1960. V. 8. P. 100–104.
9. **Корнев В. М.** Обобщенный достаточный критерий прочности. Описание зоны предразрушения // ПМТФ. 2002. Т. 43, № 5. С. 153–161.
10. **Корнев В. М.** Распределение напряжений и раскрытие трещин в зоне предразрушения (подход Нейбера — Новожилова) // Физ. мезомеханика. 2004. Т. 7, № 3. С. 53–62.
11. **Керштейн И. М.** Основы экспериментальной механики разрушения / И. М. Керштейн, В. Д. Ключников, Е. В. Ломакин, С. А. Шестериков. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989.
12. **Райс Дж.** Математические методы в механике разрушений // Разрушение. М.: Мир, 1975. Т. 2. С. 204–335.
13. **Баренблатт Г. И.** Математическая теория равновесных трещин, образующихся при хрупком разрушении // ПМТФ. 1961. № 4. С. 3–56.
14. **Саврук М. П.** Механика разрушения и прочность материалов. Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. Киев: Наук. думка, 1988.
15. **Rice J. R., Rosengren G. F.** Plane strain deformation near a crack tip in a power-law hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16, N 1. P. 1–12.
16. **Hutchinson J. W.** Singular behaviour at the end of a tensile crack in a hardening material // J. Mech. Phys. Solids. 1968. V. 16, N 1. P. 13–31.

*Поступила в редакцию 5/VI 2008 г.,  
в окончательном варианте — 19/XI 2009 г.*

---