

УДК 518.61: 539.375

## АНАЛИЗ ДВУХ НЕЛИНЕЙНЫХ МОДЕЛЕЙ ХРУПКОГО РАЗРУШЕНИЯ ТВЕРДЫХ ТЕЛ

А. В. Шутов

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск

E-mail: shutov@ngs.ru

Рассмотрены два типа нелинейных определяющих соотношений хрупкого материала в случае плоского напряженного состояния: изотропные и ортотропные. Алгоритмы численного решения разработаны с использованием метода конечных элементов. Полученные модели материала введены в вычислительный комплекс PIONER. С помощью решения тестовой задачи о распространении трещины для этих моделей материала исследуется вопрос корректности определения линии трещины. В то время как применение изотропной модели дает зависящие от ориентации сетки результаты, ортотропная модель позволяет получить адекватное решение. Отмечается близость решений, полученных по изотропной модели и по схеме исключения разрушенных элементов.

**Ключевые слова:** механика деформируемого твердого тела, метод конечных элементов, механика разрушения, хрупкое разрушение.

**Введение.** Численное моделирование зарождения и распространения трещин началось в конце 1960-х годов и отражено в основополагающих работах [1, 2], в которых введены так называемые модели “дискретных” и “размытых” трещин. Со временем популярность завоевал подход, основанный на моделях второго типа. Он заключается в моделировании трещины в рамках механики сплошной среды путем введения нелинейных определяющих соотношений материала. Это соответствует введению физической нелинейности. Обзор и классификация применяемых моделей приведены в работе [3].

Наиболее подходящим методом численного решения нелинейных задач механики твердого тела является метод конечных элементов (МКЭ). На его основе создана технология решения нелинейных задач механики твердого тела [4–6], в частности нелинейной механики разрушения. Задачи нелинейной механики разрушения можно рассматривать как частный случай упругопластических задач (поведение материала не зависит явно от времени) с особым выбором уравнений определяющих соотношений.

Характерной чертой таких задач является отсутствие теорем существования и единственности решения. В таких условиях, вообще говоря, не гарантируется сходимость численного решения к точному, отсутствует непрерывная зависимость решения от входных данных. Успех применения каждой конкретной нелинейной модели зависит от множества факторов: ее адекватности физике явления, логической простоты, существования устойчивой и эффективной процедуры численного интегрирования.

Предметом настоящего исследования является корректность моделирования с помощью МКЭ разрушения твердого тела, а именно моделирования зарождения и распростра-

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 02-01-00195), гранта Президента Российской Федерации (№ НШ-319.2003.1) и гранта Министерства образования Российской Федерации (А03-2.10-617).

нения трещины в хрупком изотропном материале. Здесь МКЭ рассматривается как вариант метода Бубнова — Галеркина с базисными функциями, определенными на локальных подобластях (конечных элементах).

В работе дана общая постановка задачи нелинейной механики твердого тела. Приведены формулировки определяющих соотношений для двух моделей хрупкого материала. В обеих моделях предполагается, что вплоть до разрушения материал деформируется упруго, а критерием разрушения служит превышение главного растягивающего напряжения предела прочности материала. В изотропной модели при разрушении материал мгновенно переходит в полностью разрушенное состояние, а в ортотропной модели в случае разрушения материал может моделироваться ортотропным материалом, ослабленным в некотором направлении. Эта модель есть частный случай модели, описанной и успешно примененной в работе [7].

Исследование изотропной и ортотропной моделей проведено с помощью решения тестовой задачи о зарождении и распространении трещины. Несмотря на то, что точные решения тестовой задачи для этих двух определяющих соотношений совпадают, численные решения существенно различаются. Изотропная модель не позволяет определить достоверно картину растрескивания. Ортотропная же модель выгодно отличается от первой в этом смысле.

На сегодняшний день широко распространен метод исключения разрушенных элементов. Суть этого метода заключается в исключении из ансамбля элементов тех элементов, в которых произошло разрушение. Этот метод является формальным упрощением метода, основанного на изотропной модели. Численные эксперименты показали близость решений, полученных по двум этим методам. Так же как и в случае изотропной модели, метод исключенных элементов не позволяет определить картину растрескивания.

**1. Уравнения механики твердого тела с учетом физической нелинейности и их пространственная дискретизация.** Формулировки основных уравнений и их дискретных аналогов для нелинейных задач механики деформируемого твердого тела приведены, например, в [4–6]. Приведем уравнения, описывающие деформирование твердого тела в предположении малости деформаций, поворотов и перемещений (в то же время допускаются большие трансляционные перемещения тела как жесткого целого).

Пусть  $t$  — монотонно возрастающий параметр деформирования. В квазистатических задачах под параметром  $t$  понимаются, как правило, внешняя сила, заданное перемещение, длина дуги интегральной кривой в пространстве “перемещение — параметр силы” и т. д. Приведем основные уравнения задачи, учитывающие физическую нелинейность деформирования.

1. Уравнения равновесия

$$\nabla \cdot \sigma = \mathbf{0} \quad \text{в } V \quad (1)$$

с граничными и начальными условиями

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}^* \quad \text{на } S_u, \quad \mathbf{N} \cdot \sigma = \mathbf{T}^* \quad \text{на } S_T, \quad \mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0.$$

Здесь и далее  $\sigma$  — тензор напряжений Коши;  $\mathbf{u}$  — вектор перемещений;  $V$  — область, занимаемая телом в начальной конфигурации;  $S$  — замкнутая поверхность, ограничивающая  $V$ ;  $S_u, S_T$  — части поверхности  $S = S_u \cup S_T$ , на которых заданы векторы перемещений  $\mathbf{u}$  и напряжений  $\mathbf{T} \equiv \mathbf{N} \cdot \sigma$  соответственно;  $\mathbf{N}$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $S_T$ ; индекс “\*” обозначает заданную величину;  $\mathbf{u}_0$  — вектор начальных перемещений.

2. Кинематические соотношения

$$\varepsilon = (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^T)/2,$$

где  $\varepsilon$  — тензор деформаций Коши;  $\nabla \mathbf{u}$  — тензор градиента перемещений.

3. Определяющие соотношения (в каждой материальной точке)

$$\dot{\sigma} = C : \dot{\varepsilon}, \quad (2)$$

где  $C$  — тензор четвертого ранга, компоненты которого в общем случае зависят от истории деформирования; точка над величиной обозначает частную производную этой величины по параметру деформирования  $t$ .

Рассмотрим слабую форму уравнений движения (1), выражаемую уравнением принципа возможных перемещений

$$\int_V \sigma : \delta\varepsilon dV = \int_{S_T} \mathbf{T}^* \cdot \delta\mathbf{u} dS \quad \forall \delta\mathbf{u}, \quad (3)$$

где  $\delta$  обозначает вариацию, так что  $\delta\mathbf{u} = \mathbf{0}$  на  $S_u$  (граничные условия на  $S_u$  являются главными, а на  $S_T$  — естественными); вариация тензора деформаций Коши определяется следующим образом:

$$\delta\varepsilon = [\nabla(\delta\mathbf{u}) + \nabla(\delta\mathbf{u})^T]/2.$$

Рассмотрим случай плоского напряженного состояния в предположении

$$\sigma_{33} = \sigma_{13} = \sigma_{23} = 0, \quad T_3^* = 0. \quad (4)$$

Дискретный аналог уравнений равновесия получим с помощью МКЭ, основываясь на уравнениях равновесия в слабой форме (3). Рассматриваем изопараметрические конечные элементы, радиус-векторы материальных точек которых и вектор перемещений аппроксимируются одним и тем же набором полиномов. Рассмотрим  $m$ -й конечный элемент. Введем векторы

$$\boldsymbol{\sigma} = [\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}]^T, \quad \boldsymbol{\varepsilon} = [\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, 2\varepsilon_{12}]^T,$$

а также вектор узловых перемещений элемента

$$\mathbf{U}^m = [u_1^1, u_2^1, \dots, u_1^N, u_2^N]^T,$$

где  $u_i^k$  —  $i$ -я компонента вектора перемещений в  $k$ -й узловой точке элемента. Определяющие соотношения (2) представим в векторно-матричной записи

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = C \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \quad (5)$$

где  $C$  — симметричная матрица размерности  $3 \times 3$ , элементы которой составлены из компонент одноименного тензора четвертого ранга при внедрении гипотезы (4). Пусть теперь  $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ . Введем такие матрицы  $B$  и  $H$  элемента, что в  $m$ -м конечном элементе выполняются соотношения

$$\boldsymbol{\varepsilon} = B\mathbf{U}^m, \quad \mathbf{u} = H\mathbf{U}^m.$$

Матрицы  $B$  и  $H$  зависят только от геометрических характеристик элемента и не изменяются при его деформировании. Введем  $K^m$  — касательную матрицу жесткости элемента,  $\mathbf{R}^m$  — вектор поверхностных сил элемента,  $\mathbf{F}^m$  — вектор внутренних сил элемента:

$$K^m \equiv \int_{V^m} B^T C B dV, \quad \mathbf{R}^m \equiv \int_{S_T^m} H^T \mathbf{T}^* dS, \quad \mathbf{F}^m \equiv \int_{V^m} B^T \boldsymbol{\sigma} dV. \quad (6)$$

Интегралы в (6) вычисляются с помощью квадратурных формул Гаусса — Лежандра приближенного интегрирования.

Вводим вектор глобальных степеней свободы ансамбля элементов

$$\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_{N_{EQ}}]^T,$$

где  $U_i$  ( $i = \overline{1, N_{EQ}}$ ) — одна из компонент вектора перемещений в некоторой узловой точке,  $N_{EQ}$  — общее число независимых компонент вектора перемещений ансамбля узловых точек. Компоненты векторов  $\mathbf{U}^m$  каждого  $m$ -го элемента состоят из компонент глобального вектора  $\mathbf{U}$ . Векторы  $\mathbf{U}^m$ ,  $\mathbf{R}^m$ ,  $\mathbf{F}^m$  и матрица  $K^m$  каждого из элементов приводятся к размерностям  $N_{EQ}$  и  $N_{EQ} \times N_{EQ}$  соответственно с помощью булевых матриц  $A^m$  (элементы которых состоят из нулей и единиц), которые вводятся для  $m$ -го элемента с помощью связи

$$\mathbf{U}^m = A^m \mathbf{U}.$$

Вводим глобальную касательную матрицу жесткости  $K$ , векторы внешних  $\mathbf{R}$  и внутренних  $\mathbf{F}$  сил ансамбля элементов:

$$K \equiv \sum_{m=1}^M A^{mT} K^m, \quad \mathbf{R} \equiv \sum_{m=1}^M A^{mT} \mathbf{R}^m, \quad \mathbf{F} \equiv \sum_{m=1}^M A^{mT} \mathbf{F}^m, \quad (7)$$

где  $M$  — общее количество элементов.

Тогда дискретный аналог уравнения (3) имеет следующий вид:

$$\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F} = \delta \mathbf{U}^T \mathbf{R}. \quad (8)$$

Пользуясь произвольностью вектора  $\delta \mathbf{U}$ , получаем из (8) дискретный аналог уравнений равновесия — систему нелинейных уравнений для определения  $\mathbf{U}(t)$

$$\mathbf{F}(t) = \mathbf{R}(t). \quad (9)$$

В работе используется шаговая схема интегрирования уравнений равновесия (9). Процесс деформирования разбивается на  $N$  шагов  $[0, t_1), [t_1, t_2), \dots, [t_{N-1}, t_N)$ , для каждого из которых находится решение  $\mathbf{U}(t_i)$ . Зависимость вектора  $\mathbf{F}(t)$  от истории деформирования учитывается следующим образом. Предполагается, что значение вектора  $\mathbf{F}(t_i)$  однозначно определяется последовательностью состояний  $\mathbf{U}(0), \mathbf{U}(t_1), \dots, \mathbf{U}(t_{i-1}), \mathbf{U}(t_i)$ . Фиксируя вычисленные на предыдущих шагах решения, считаем  $\mathbf{F}(t_i) = \mathbf{F}(t_i, \mathbf{U}(t_i))$ . Значение  $\mathbf{U}(t_i)$  ищется из решения нелинейной системы (9) с помощью итерационного метода Ньютона [4–6]. Начальным приближением при использовании метода Ньютона является решение  $\mathbf{U}(t_{i-1})$  с предыдущего временного шага. При этом на каждой итерации требуется обратить касательную матрицу жесткости  $K(t_i)$ , которая является матрицей Якоби для функции  $\mathbf{F}(t_i, \mathbf{U})$ . Алгоритм определения функции  $\mathbf{F}(t_i, \mathbf{U})$  и касательной матрицы жесткости задается конкретной моделью материала.

**2. Нелинейные определяющие соотношения хрупкого материала.** Запись определяющих соотношений в виде (5) допускает моделирование материалов с возможностью хрупкого разрушения. Приведем описание двух таких соотношений хрупкого материала в предположении, что в данной материальной точке реализовано плоское напряженное состояние. Для построения вектора  $\mathbf{F}$  и матрицы  $K$  необходимо провести численное интегрирование выражений в (6). Для этого подынтегральные выражения вычисляются в каждой точке интегрирования формулы Гаусса — Лежандра. То есть в каждой точке интегрирования требуется определить  $C$  и  $\sigma$ .

Поведение материала для рассматриваемых в данной работе моделей определяется тремя параметрами: модулем Юнга  $E$ , коэффициентом Пуассона  $\nu$  и пределом прочности  $\sigma_t$ .

**2.1. Изотропная модель хрупкого материала.** Предполагается, что материал в каждой материальной точке (точке интегрирования) может находиться в двух состояниях:

1. Состояние неразрушенности. Моделируется линейно-упругим изотропным материалом:

$$C = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)/2 \end{bmatrix}, \quad \sigma = C \varepsilon. \quad (10)$$

2. Состояние полной разрушенности. Моделируется материалом с полным отсутствием несущей способности:

$$C = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} k_1 & \nu k_1 & 0 \\ \nu k_1 & k_1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)k_2/2 \end{bmatrix}, \quad \sigma = \mathbf{0}. \quad (11)$$

Здесь  $k_1, k_2$  — малые положительные числа, используемые для регуляризации касательной матрицы жесткости.

В начальный момент времени материал находится в состоянии неразрушенности. Переход из первого состояния во второе происходит в случае превышения главного растягивающего напряжения предела прочности на растяжение.

**2.2. Ортоотропная модель хрупкого материала.** Ортоотропная модель есть частный случай модели, приведенной в [7] (которая позволяет решать задачи хрупкого разрушения тонкостенных конструкций). В каждой точке материал может находиться в четырех состояниях:

1. Состояние неразрушенности. Моделируется линейно-упругим изотропным материалом (10).

2. Состояние раскрытой трещины. Моделируется линейно-упругим ортоотропным материалом, ослабленным в направлении, ортогональном плоскости трещины. Запись матрицы определяющих соотношений и вектора напряжений приведем в главных осях тензора напряжений:

$$\check{C} = \frac{E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} k_1 & \nu k_1 & 0 \\ \nu k_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1 - \nu)k_2/2 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

$$\check{\sigma}_1 = \check{\sigma}_{12} = 0, \quad \check{\sigma}_2 = \frac{E}{1 - \nu^2} (\nu \check{\epsilon}_{11} + \check{\epsilon}_{22}).$$

3. Состояние закрытой трещины. Моделируется таким же, как и в состоянии неразрушенности, линейно-упругим изотропным материалом (10).

4. Состояние полной разрушенности. Моделируется материалом с полным отсутствием несущей способности (11).

Переход из первого состояния во второе происходит в случае превышения главного растягивающего напряжения предела прочности на растяжение, причем предполагается, что плоскость трещины ортогональна первому главному направлению. Переход из второго состояния в третье происходит в случае, если деформация вдоль оси, ортогональной плоскости трещины, становится отрицательной. Переход из третьего состояния во второе происходит в случае положительности этой деформации. Если оба главных напряжения превосходят предел прочности, то материал переходит в состояние 4. Предполагается, что, оказавшись в состоянии полной разрушенности, материал не сможет восстановить несущую способность.

**3. Сравнение моделей на решении задачи о разрушении симметричного образца с вырезами.** Предложенные модели материала введены в вычислительный комплекс PIONER [8]. Численные решения, представленные в данном разделе, получены с помощью этого комплекса. Рассмотрим задачу о разрушении хрупкой пластинки с V-образным вырезом. Конфигурация пластинки приведена на рис. 1. Нижний торец пластинки жестко закреплен, а верхний торец перемещается как жесткое целое в вертикальном направлении на величину  $u$ . Перемещение торца  $u$  выбрано в качестве параметра деформирования. Таким образом, имеем квазистатическую задачу, моделирующую разрушение

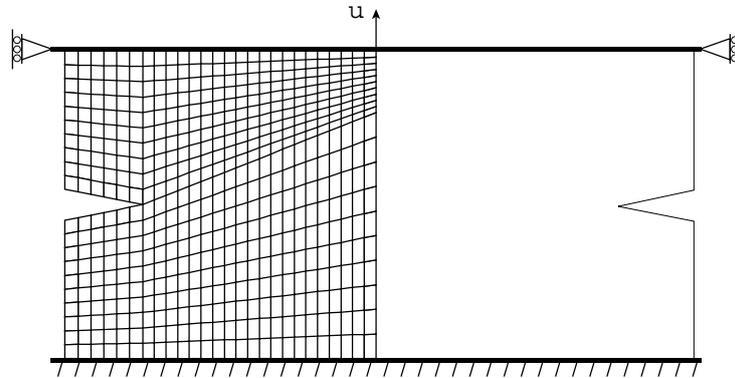


Рис. 1. Разрушение пластинки с V-образным вырезом: конфигурация системы и сетка конечных элементов

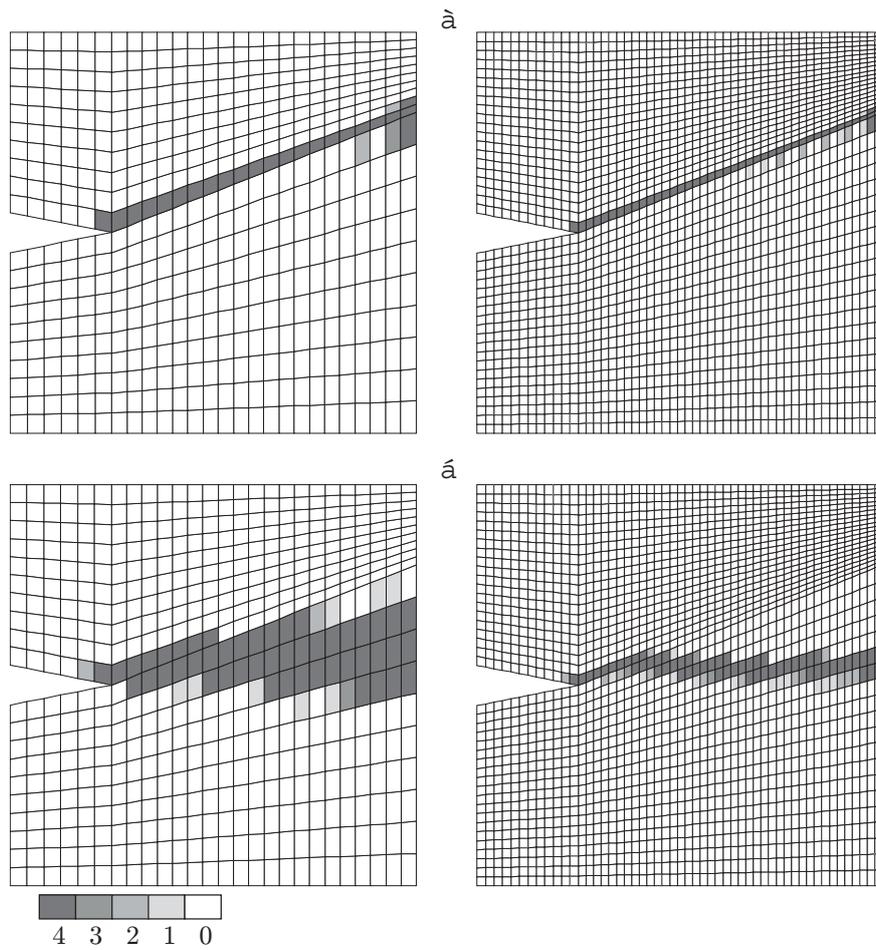


Рис. 2. Численное решение задачи, полученное по изотропной (а) и ортотропной (б) моделям

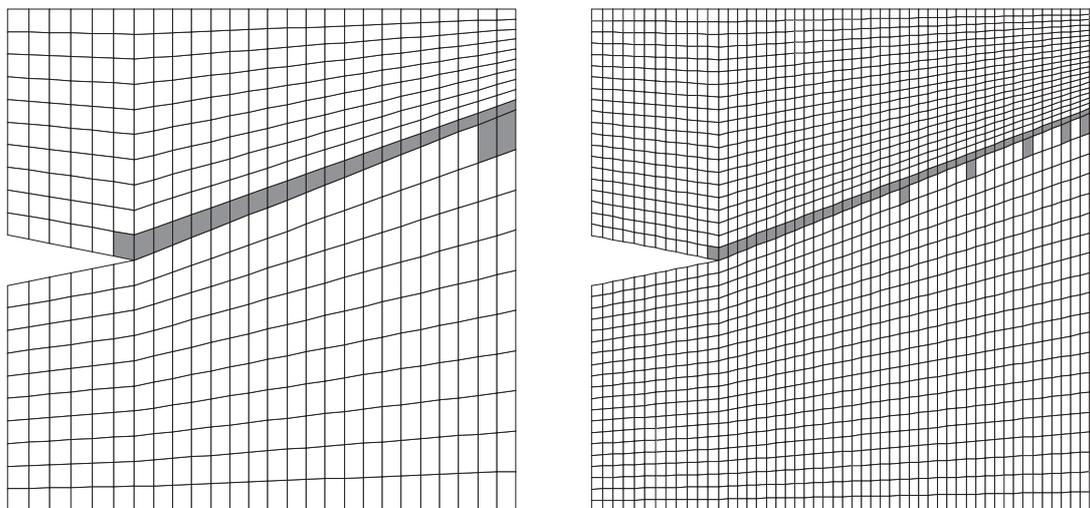


Рис. 3. Решение, полученное по схеме исключения разрушенных элементов

пластинки в условиях жесткого нагружения. Расчеты проведены со следующими параметрами материала: модуль Юнга  $E = 10^7$  Па; коэффициент Пуассона  $\nu = 0,25$ ; предел прочности  $\sigma_t = 2 \cdot 10^4$  Па. В силу вертикальной и горизонтальной симметрии образца для обеих моделей материала трещина должна зародиться в кончике выреза и распространяться строго горизонтально. В силу вертикальной симметрии при расчетах рассматривается только левая половина пластинки. Для расчетов используются элементы с линейной аппроксимацией геометрии и вектора перемещений. При этом численное интегрирование по формулам Гаусса — Лежандра проводится с полным порядком численного интегрирования —  $2 \times 2$ . С целью оценить способность модели адекватно предсказывать направление развития трещины все расчеты проведены с использованием специально подобранной сетки конечных элементов (см. рис. 1). В окрестности носика выреза сетка ориентирована под углом к главным направлениям тензора напряжений. Результаты расчетов для обеих моделей материала с различной мелкостью конечно-элементного разбиения представлены на рис. 2 для изотропной (рис. 2,а) и для ортотропной (рис. 2,б) моделей. На рисунке каждый элемент выделен в зависимости от того, в скольких точках интегрирования произошло разрушение (частичное или полное). Максимально возможное количество точек интегрирования в данном случае равно четырем.

Как видно из рис. 2, изотропная модель не позволяет правильно предсказать направление трещины. Направление трещины зависит от ориентации сетки. Противоположную картину дает применение ортотропной модели. При мельчении сетки трещина приближается к горизонтальной линии и не зависит от ориентации сетки.

Заметим, что алгоритм, основанный на изотропной модели, может быть упрощен следующим образом. Рассмотрим расчетную схему, в которой используется только линейно-упругая модель материала. При выполнении в некотором элементе критерия разрушения этот элемент исключается из общего ансамбля элементов. Это равносильно исключению соответствующих слагаемых в формулах (7). Результаты расчетов по такой схеме приведены на рис. 3. В отличие от схемы, основанной на изотропной модели, в этой схеме материал разрушается сразу во всем элементе, а не в некоторой точке интегрирования. На рисунке черным цветом отмечены исключенные элементы. Как видно, решение схоже с тем, что получено для изотропной модели. Как и для изотропной модели, линия трещины при мельчении сетки не приближается к горизонтальной линии.

**Заключение.** Несмотря на то, что рассмотренные в работе две модели описывают одно и то же поведение материала, эти модели не равнозначны с вычислительной точки зрения. Численные схемы, построенные по этим моделям с применением стандартной технологии МКЭ, дают существенно различные результаты. Для численных схем такого класса условием правильного предсказания направления трещины является хорошее приближение поля напряжений в окрестности носика трещины. Изотропная модель и схема исключения элементов таким свойством не обладают, в то время как использование ортотропной модели позволяет получить достоверные результаты.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Rashid Y. R.** Analysis of prestressed concrete pressure vessels // Nucl. Engng Des. 1968. V. 7. P. 334–344.
2. **Ngo D., Scordelis A. C.** Finite element analysis of reinforced concrete beams // J. Amer. Concr. Inst. 1967. V. 64. P. 152–163.
3. **De Borst R.** Fracture in quasi-brittle materials: a review of continuum damage-based approaches // Engng Fract. Mech. 2002. V. 69. P. 95–112.
4. **Bathe K.-J.** Finite element procedures in engineering analysis. Englewood Cliffs, New Jersey: Prentice Hall, 1982.
5. **Zienkiewicz O. C., Taylor R. L.** The finite element method. London etc.: McGraw Hill, 1991.
6. **Коробейников С. Н.** Нелинейное деформирование твердых тел. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
7. **Коробейников С. Н., Худяков Ю. С., Шутов А. В.** Математическое моделирование хрупкого разрушения тонких тел // Вычисл. методы и программирование. 2002. Т. 3, № 2. С. 94–117.
8. **Korobeinikov S. N., Agarov V. P., Bondarenko M. I., Soldatkin A. N.** The general purpose nonlinear finite element structural analysis program PIONER // Proc. of the Intern. conf. on numerical methods and applications, Sofia (Bulgaria), 22–27 Aug., 1989. Sofia: Publ. House of the Bulgarian Acad. of Sci., 1989. P. 228–233.

*Поступила в редакцию 1/X 2003 г.,  
в окончательном варианте — 1/XII 2003 г.*

---