

УДК 539.3+622.831.31

**МЕХАНИЧЕСКИЕ И ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА
ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛОВ СОЛЯНЫХ ПОРОД В НАНОДИАПАЗОНЕ
И ИХ ВЛИЯНИЕ НА ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ И СМАЧИВАЕМОСТЬ**

В. Н. Аптуков^{1,2}, В. Ю. Митин¹

¹*Пермский государственный национальный исследовательский университет,
E-mail: aptukov@psu.ru, ул. Букирева 15, 614990, г. Пермь, Россия*

²*Уральский научно-исследовательский и проектный институт галургии,
ул. Сибирская, 94, 614002, г. Пермь, Россия*

Изучены статистические и механические свойства поверхности различных видов кристаллов соляных пород. Определены фрактальные размерности, значения твердости и модуля упругости данных кристаллов. Представлены оценки трещиностойкости и смачиваемости кристаллов соляных пород в зависимости от фрактальной размерности микрорельефа поверхности.

Кристаллы соляных пород, фрактальная размерность, наноиндентирование, твердость, модуль упругости, трещиностойкость, смачиваемость

В настоящее время при изучении статистических свойств поверхности кристаллов наряду с классическими параметрами шероховатости широко используются различные фрактальные параметры. Фрактальная размерность характеризует степень изрезанности микрорельефа поверхности, которая может оказывать влияние на некоторые физические свойства [1]. Для ее оценки существуют разнообразные одномерные и двумерные алгоритмы [2].

Систематическое изучение статистических и механических свойств поверхности кристаллов соляных пород началось с работ [3 – 5], где с помощью прибора NanoTest-600 исследованы указанные свойства в микродиапазоне. Результаты сравнения твердости и модуля упругости зерна силвина в микро- и нанодиапазоне при использовании зондового сканирующего микроскопа (ЗСМ) Dimension Icon приведены в [6]. Дальнейшие работы [7, 8] посвящены более детальным исследованиям фрактальной размерности кристаллов соляных пород и их механических характеристик. Обнаружен эффект анизотропии фрактальной размерности, заключающийся в зависимости от направления сечения в плоскости кристалла [7]. В [8] показано наличие масштабного эффекта — падения измеряемого уровня твердости H кристаллов соляных пород с ростом глубины кантилевера ЗСМ.

В работе [9] для искусственных кристаллов поваренной соли вычислены значения фрактальной размерности, твердости и модуля упругости (при различном уровне максимальной нагрузки), обнаружена незначительная обратная корреляция между фрактальной размерностью поверхности и механическими характеристиками. В [10] установлена обратная корреляция между параметром S/h (S — средний шаг местных выступов профиля по ГОСТ 2789-73, h — шаг

сканирования) и фрактальной размерностью. Изучена зависимость этих параметров от масштаба и показано, что значения фрактальной размерности и степень выраженности эффектов анизотропии могут быть неодинаковыми на различных масштабных уровнях.

Необходимо отметить появление в последнее время работ по изучению механических свойств поверхности минералов горных пород на различных масштабных уровнях с помощью использования микро- и наноиндентирования [11 – 13].

Настоящая статья посвящена изучению новых типов кристаллов соляных пород, обобщению результатов с ранее полученными данными, приложению данных о фрактальной размерности к оценке трещиностойкости и смачиваемости поверхности кристаллов соляных пород.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ МИКРОРЕЛЬЕФА ПОВЕРХНОСТИ И МЕХАНИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК КРИСТАЛЛОВ СОЛЯНЫХ ПОРОД

С помощью 3СМ Dimension Icon выполнено сканирование поверхности девяти различных образцов кристаллов соляных пород. Для каждого вида кристалла изучено несколько характерных квадратных областей. Исследованные области и параметры сканирования приведены в табл. 1.

ТАБЛИЦА 1. Исходные данные экспериментов

Кристаллы соляных пород	Область (см. рис. 1)	Шаг сканирования h , нм	Размер области (мкм×мкм) / количество точек, $N \times N$
1. Молочно-белый сильвин с H_2S	1-1	39.1	40×40/1024×1024
	1-2	39.1	30×30/768×768
	1-3	7.8	3×3/384×384
2. Шпатовый галит ПдКС	2-1, 2-2, 2-3	39.1	30×30/768×768
3. Красный сильвин	3-1, 3-2, 3-3	39.1	30×30/768×768
4. Розовый сильвин (Тюбегатан)	4-1	39.1	30×30/768×768
5. Розовый сильвин с синим галитом	5-1, 5-2, 5-3	39.1	30×30/768×768
6. Перистый галит	6-1, 6-2, 6-3	39.1	30×30/768×768
7. Карналлит	7-1, 7-2	31.3	40×40/1280×1280
8. Сильвин молочно-белый	8-1, 8-2	39.1	40×40/1024×1024
9. Шпатовая соль (галит)	9-1, 9-2	31.3	40×40/1280×1280

Изображения микрорельефа некоторых поверхностей, обладающих различными особенностями, приведены на рис. 1. Рельеф отдельных областей обладает отличительными особенностями: наличие линий скачкообразного изменения высоты (например, 2-1), наличие полос разной высоты (6-1), кристаллы роста различной формы и размеров (5-1). Некоторые участки поверхности кристаллов являются визуально гладкими и однородными (7-1). Области одного и того же кристалла в ряде случаев обладают существенными различиями рельефа.

Для каждого из кристаллов 1-6 выбрана еще одна дополнительная область 20×20 мкм, обозначенная цифровым индексом 0. С помощью 3СМ Dimension Icon после предварительного сканирования с разрешением 384×384 выполнено индентирование в 25 точках, расположенных в узлах квадратной сетки из 5×5 точек, расстояние между соседними узлами сетки составляло около 3.3 мкм (рис. 2).

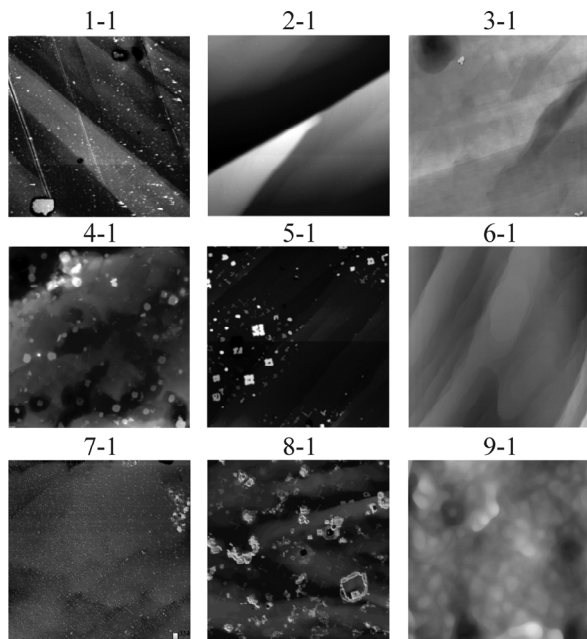


Рис 1. Изображение микрорельефа поверхностей кристаллов соляных пород

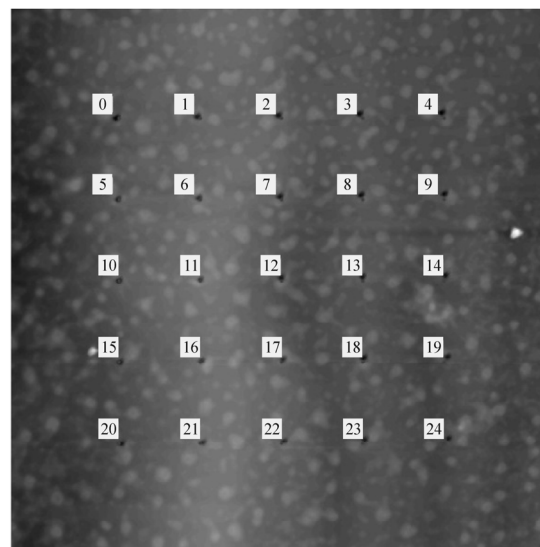


Рис. 2. Схема индентации для области 6-0

МЕТОДИКА ОБРАБОТКИ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

В качестве основного параметра при оценке статистических свойств поверхности выбран индекс фрактальности μ [14], получаемый при оценке фрактальной размерности эффективным и обладающим высокой скоростью сходимости методом минимального покрытия и связанный с фрактальной размерностью соотношением $D = \mu + 1$. Индекс фрактальности вычислялся по одномерному алгоритму для вертикальных, горизонтальных и диагональных срезов, а также по двумерному алгоритму для поверхности в целом [7].

С целью изучения свойств анизотропии проводилось дополнительное исследование: функция распределения высот с помощью интерполяции первого порядка распространялась на всю область и из центра области строились ряды ее значений в различных направлениях с постоянным (3 град) шагом по углу, расстояние между точками равнялось шагу сканирования. При обработке данных индентирования на основе зависимости “усилие – глубина проникания” вычислялись оценочные значения твердости по Мейеру H (с учетом детальных знаний о геометрии кантилевера) и эффективного модуля упругости с помощью формул и алгоритмов, изложенных в [6].

ФРАКТАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ СОЛЯНЫХ ПОРОД

В табл. 2 приведены вычисленные средние значения одномерного индекса фрактальности для различных участков поверхности кристаллов сильвина (молочно-белого, красного и розового): rows — по всем строкам, cols — по всем столбцам, diag \ — по главной диагонали и 200 параллельным ей линиям, по 100 с каждой стороны, diag / — аналогично для другой диагонали и двумерного индекса фрактальности (2D).

Результаты исследований показывают, что все индексы фрактальности не превышают 0.5. Это свидетельствует о том, что эти поверхности не относятся к числу сильно изрезанных. Наиболее высокие индексы фрактальности наблюдаются в областях 1-1, 5-1, 5-2. Изрезанность рельефа часто отражается и на изображениях, например многочисленные кристаллы в области 5-1. На области 5-1 можно заметить полосы, ориентированные перпендикулярно главной диа-

гонали, поэтому в направлении главной диагонали, пересекающей полосы, индекс фрактальности закономерно выше, чем в направлении второй диагонали. Области 1-2, 1-3, 3-2 и особенно 4-1 являются практически гладкими, в них средний индекс фрактальности ниже 0.1 за исключением отдельных направлений.

ТАБЛИЦА 2. Значения индекса фрактальности для образцов сильвина

μ	Молочно-белый					Красный			Розовый			
	1-1	1-2	1-3	8-1	8-2	3-1	3-2	3-3	4-1	5-1	5-2	5-3
rows	0.32	0.03	0.06	0.13	0.21	0.09	0.04	0.2	0.07	0.23	0.42	0.14
cols	0.39	0.17	0.11	0.13	0.30	0.11	0.04	0.2	0.03	0.29	0.15	0.2
diag \	0.37	0.03	0.06	0.15	0.42	0.09	0.11	0.2	0.05	0.32	0.35	0.15
diag /	0.43	0.05	0.08	0.19	0.22	0.08	0.11	0.26	0.05	0.17	0.37	0.16
2D	0.31	0.05	0.06	0.17	0.27	0.11	0.05	0.12	0.04	0.24	0.31	0.1

Различие между средними индексами фрактальности областей 1-2 и 1-3, различающихся по размеру на порядок, не превышают 0.06. Таким образом, выраженной зависимости индекса фрактальности от масштаба измерения в данном случае не наблюдается.

В табл. 3 (аналогично табл. 2) приведены вычисленные средние значения индекса фрактальности для различных участков поверхности кристаллов галита.

ТАБЛИЦА 3. Значения индекса фрактальности для образцов галита

μ	Шпатовый					Перистый		
	2-1	2-2	2-3	9-1	9-2	6-1	6-2	6-3
rows	0.2	0.22	0.17	0.42	0.21	0.14	0.09	0.02
cols	0.25	0.33	0.14	0.44	0.30	0.14	0.25	0.03
diag \	0.38	0.26	0.17	0.41	0.07	0.10	0.16	0.01
diag /	0.23	0.17	0.20	0.40	0.06	0.10	0.16	0.03
2D	0.21	0.25	0.14	0.27	0.11	0.12	0.21	0.03

Из данных табл. 3 следует, что индексы фрактальности заключены преимущественно в диапазоне 0.1–0.3 для всех областей, кроме области 6-3, в которой они во всех направлениях близки к нулю, и 9-1, где они принимают более высокие значения. Для участков поверхности шпатового галита 2-1 и 2-2 влияние направления на индекс фрактальности обусловлено наличием линий скачкообразного изменения высот.

Средние значения индекса фрактальности поверхности зерен карналлита приведены в табл. 4. Так, область 7-1 представляет собой гладкую поверхность карналлита, а 7-2 — участок поверхности карналлита с кристаллами роста, имеющими кубическую форму. Индекс фрактальности для этих кристаллов слабо зависит от направления, эффекты анизотропии незначительны. Это обусловлено отсутствием у кристалла карналлита поверхности спайности. Индекс фрактальности на гладкой области карналлита выше, чем на участке с кристаллами роста.

ТАБЛИЦА 4. Значения индекса фрактальности для образцов карналлита

μ	7-1	7-2
rows	0.31	0.15
cols	0.33	0.16
diag \	0.40	0.11
diag /	0.35	0.10
2D	0.22	0.13

Выраженные эффекты анизотропии фрактальных свойств характерны для кристаллов 2 (шпатовый галит) и 5 (розовый сильвин). В области 1-1 зависимость от направления не столь значительна (рис. 3). Для областей 4-1 и 6-3 зависимости индекса фрактальности от направления далеки от круга, однако это связано с малостью значений, абсолютные разности при этом остаются небольшими.

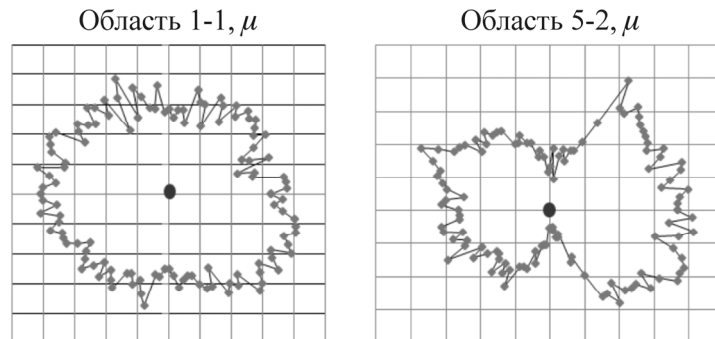


Рис. 3. Зависимость индекса фрактальности от направления в полярных координатах. Длина радиус-вектора точки на ломаной кривой есть величина индекса фрактальности. Длина стороны квадрата 0.1. Начало координат отмечено кружком

Существует взаимосвязь между фрактальной размерностью и классическими параметрами шероховатости. В частности, фрактальная размерность экспериментальных рядов имеет обратную корреляцию с безразмерной величиной S/h , где S — средний шаг местных выступов профиля [15], h — шаг сканирования [8]. На рис. 4 представлены зависимости фрактальной размерности от величины S/h на основе обработки полученных экспериментальных данных.

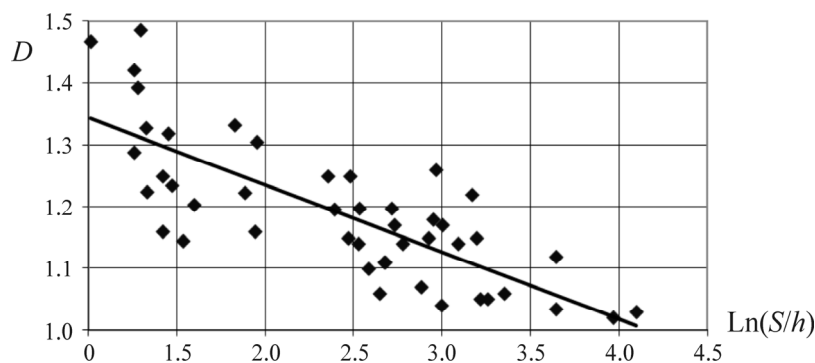


Рис. 4. Корреляция фрактальной размерности и параметра шероховатости в полулогарифмических координатах

ВЛИЯНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА НА ТРЕЩИНОСТОЙКОСТЬ

Характер рельефа поверхности разрушения кристаллов соляных пород (например, в процессе добычи калийно-магниевых солей или при обогащении руды) обусловлен изменениями, происходящими на различных масштабных уровнях. Поверхность трещины на уровне разрушения одного кристалла имеет фрактальную структуру. В качестве количественной характеристики структуры поверхности разрушения можно использовать фрактальную размерность (шероховатость).

Зависимость сопротивления распространению трещины от фрактальной размерности поверхности разрушения изучалась в [16, 17]. Показано, что для шероховатой трещины, имеющей фрактальную структуру и находящейся в условиях сжатия вдоль ее направления, справедливы соотношения для напряжения вблизи вершины трещины от расстояния до нее при различной степени шероховатости трещины:

$$\sigma(r) = pkr^\alpha, \quad (1)$$

где $\sigma(r)$ — напряжение вблизи вершины трещины; r — расстояние от вершины трещины; p — продольное сжимающее напряжение; $K = pk$ — коэффициент интенсивности напряжений,

$$k = \sqrt{\frac{D-1}{2-D}}, \quad \alpha = \frac{D-1.5}{2-D}, \quad (2)$$

D — фрактальная размерность профиля трещины вблизи вершины.

Из (1), (2) видно, что в диапазоне $1 < D < 1.5$ вершина трещины является особой точкой — полюсом порядка α (имеются предпосылки к распространению трещины), а при $D > 1.5$ напряжения при $r \rightarrow 0$ стремятся к нулю порядка α (трещина не развивается).

На рис. 5 приведены зависимости параметров k и α от фрактальной размерности. Классический порядок полюса для абсолютно гладкой трещины $\alpha = -0.5$ достигается при $D = 1$. Для реальных трещин, несмотря на рост параметра k , увеличение показателя степени α означает рост трещиностойкости с увеличением фрактальной размерности.

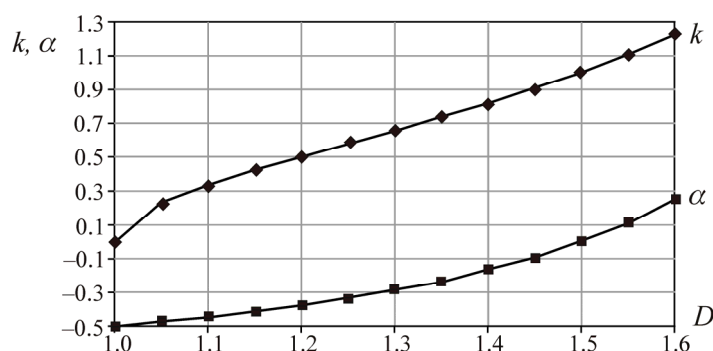


Рис. 5. Зависимость параметров трещиностойкости от уровня шероховатости

Рассчитаны значения k и α (и их средние k_c и α_c) для исследованных поверхностей кристаллов сильвина, галита и карналлита на основе средних значений D по совокупности строк и столбцов массива высот (табл. 5). Все средние α находятся в области значений, при которых функция $\sigma(r)$ имеет особую точку в виде полюса при $r = 0$, что свидетельствует о возможности трещинообразования.

ТАБЛИЦА 5. Параметры трещиностойкости кристаллов соляных пород

Порода	k	α	k_c	α_c
Сильвин молочно-белый	0.52–0.66	(–0.45)–(–0.22)	0.61	–0.37
Сильвин красный	0.60–0.69	(–0.48)–(–0.38)	0.65	–0.43
Сильвин розовый	0.57–0.68	(–0.47)–(–0.30)	0.63	–0.39
Галит шпатовый	0.56–0.62	(–0.40)–(–0.31)	0.59	–0.35
Галит перистый	0.62–0.63	(–0.42)–(–0.40)	0.63	–0.41
Карналлит	0.42–0.69	(–0.41)–(–0.26)	0.56	–0.34

Наиболее склонны к трещинообразованию кристаллы с менее шероховатой поверхностью (при низких значениях μ и α), т. е. кристаллы 3 (красный сильвин), 4 (розовый сильвин), 6 (перистый галит), а также образцы 1-2 и 1-3 (молочно-белый сильвин). Наименее подвержены трещинообразованию образцы 7-1 (карналлит), 1-1 (молочно-белый сильвин), 5-1, 5-2 (розовый сильвин), 8-1 (шпатовый галит).

Поверхности спайности обладают минимальной фрактальной размерностью и, следовательно, минимальной трещиностойкостью. Для кристаллов с анизотропией фрактальных свойств поверхности существуют преимущественные направления развития трещин.

ВЛИЯНИЕ ФРАКТАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ПОВЕРХНОСТИ КРИСТАЛЛА НА ЕГО СМАЧИВАЕМОСТЬ

Флотационные свойства кристаллов соляных пород определяются, в частности, удельной поверхностью зерен. Установлено, что “спайные поверхности соляных минералов изобилуют ступенями разных порядков”, ступени не прямолинейны (высота от нескольких микрон и менее) и редко совпадают с плоскостями спайности [18]. Таким образом, при дроблении зерен сильвинита разрушение происходит как по межзеренным границам, так и вдоль направлений спайности.

Шероховатость поверхности оказывает влияние на ее смачиваемость. Последняя характеризуется углом смачивания θ , вершина которого находится на периметре смачивания — линии контакта трех фаз, одна сторона принадлежит поверхности “твердое тело – смачивающая жидкость”, другая является касательной к поверхности смачивающей жидкости. Если угол θ острый, то поверхность является смачиваемой, а если тупой, то несмачиваемой или плохо смачиваемой. В случае шероховатой поверхности угол смачивания $\theta_{ш}$ определяется уравнением Венцеля – Дерягина [19]:

$$\cos \theta_{ш} = K_{ш} \cos \theta, \quad (3)$$

где θ — макроскопический угол смачивания; $K_{ш} > 1$ — коэффициент шероховатости поверхности, равный отношению площади шероховатой поверхности к площади ее проекции на горизонтальную плоскость.

Из соотношения (3) следует, что если поверхность смачиваемая, то вследствие шероховатости угол смачивания уменьшается, а если несмачиваемая — увеличивается. Согласно физическому смыслу фрактальной размерности, отношение длины элемента фрактальной кривой ΔL (некоторого сечения шероховатой площади) к ее проекции ΔL_0 связано выражением [16]

$$\Delta L \approx \delta \left(\frac{\Delta L_0}{\delta} \right)^D,$$

здесь δ — размерный параметр — нижняя грань применимости фрактальной модели.

Тогда соотношение $\Delta S_{ш}$ к ΔS_0 (отношение элементов площадей шероховатой и гладкой поверхности) равно

$$K_{ш} = \frac{\Delta S_{ш}}{\Delta S_0} = \left(\frac{\Delta L}{\Delta L_0} \right)^2 \approx \left(\frac{\Delta L_0}{\delta} \right)^{2(D-1)}, \quad (4)$$

т. е. между коэффициентом шероховатости и фрактальной размерностью существует прямая корреляционная связь.

С ростом фрактальной размерности при близких значениях высотных параметров шероховатости значения угла смачивания также уменьшаются для смачиваемых поверхностей и увеличиваются для несмачиваемых. На рис. 6 показаны зависимости угла смачивания от фрактальной размерности для начального угла смачивания 60° (кривая 1) и 45° (кривая 2).

Чем более выражены свойства смачиваемости (несмачиваемости), т. е. чем больше угол смачивания отличается от прямого угла, тем сильнее проявляется зависимость угла смачивания от фрактальной размерности.

Для исследованных кристаллов амплитуда неровностей рельефа намного меньше размеров области, поэтому влияние шероховатости на угол смачивания незначительно. Поскольку ам-

плитуды неровностей поверхностей отдельных областей могут отличаться на несколько порядков, различия в малых изменениях угла смачивания обусловлены не фрактальной размерностью, а высотными параметрами шероховатости.

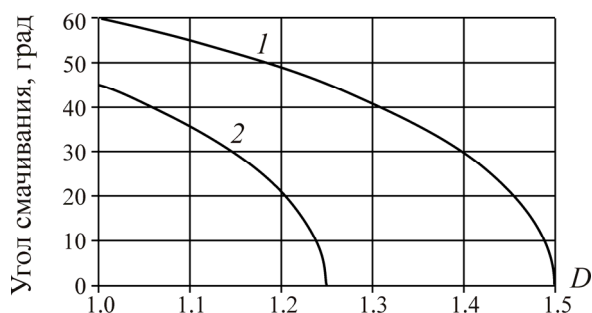


Рис. 6. Влияние шероховатости поверхности кристалла (средней фрактальной размерности некоторого сечения поверхности) на угол смачивания: 1 — 60°; 2 — 45°

МЕХАНИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА КРИСТАЛЛОВ СОЛЯНЫХ ПОРОД

Общий вид зависимости “усилие – глубина проникания” для различных участков одного и того же кристалла обычно подобен, однако для разных кристаллов наблюдаются некоторые различия. Например, для красного сильвина на прямом ходе зависимость является монотонной (рис. 7а), а для перистого галита имеет ступенчатый характер (рис. 7б), объясняемый процессами растрескивания кристалла вблизи наконечника кантилевера. При разгрузке (уменьшении усилия) глубина проникания для отдельных кристаллов может еще некоторое время увеличиваться (рис. 7а), а для других — нет.

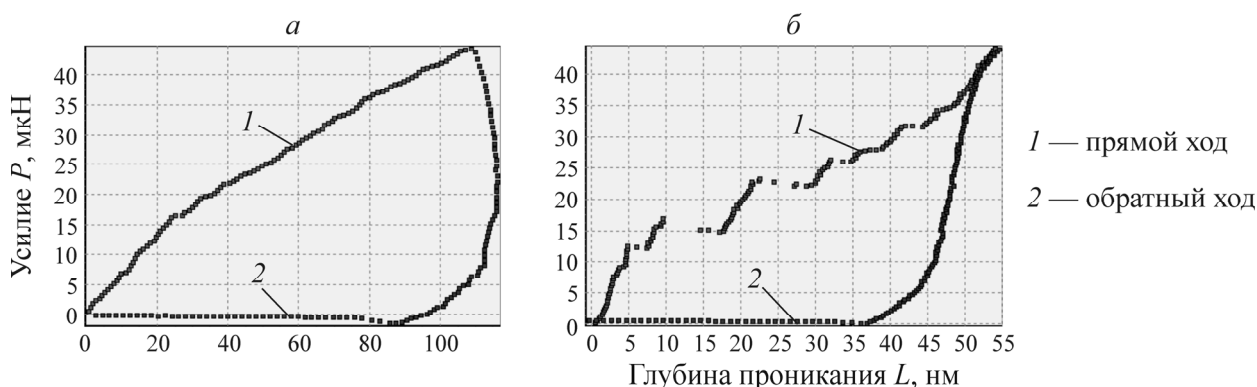


Рис. 7. Характерный вид зависимости P для красного сильвина (а) и перистого галита (б)

При прямом ходе усилие взаимодействия наконечника кантилевера с кристаллом возрастает с определенной скоростью до заданного максимального значения, при обратном — происходит разгрузка — усилие взаимодействия уменьшается до нуля.

Максимальное усилие в эксперименте для различных кристаллов составляло 40–90 мкН, а максимальная глубина проникания наконечника кантилевера — 50–120 нм. Средние значения по 25 силовым линиям для твердости по Мейеру и модуля упругости исследуемых кристаллов сильвина и галита приведены в табл. 6. В скобках указана глубина индентирования, при которой определялась твердость.

Обнаружено существенное уменьшение твердости с ростом глубины проникания для всех кристаллов, обусловленное “масштабными эффектами”. Зависимость твердости различных кристаллов соляных пород от глубины проникания кантилевера ЗСМ приведена на рис. 8.

ТАБЛИЦА 6. Средние значения твердости H_{cp} и модуля упругости E_{cp}

Кристалл	H_{cp} , ГПа	E_{cp} , ГПа
Молочно-белый сильвин	2.7 (70)	25.4
Шпатовый галит	2.5 (70)	28.4
Красный сильвин	4.4 (50)	15.7
Розовый сильвин	2.1 (70)	44.3
Розовый сильвин с синим галитом	2.5 (70)	28.1
Перистый галит	4.9 (50)	44.1

Примечание. В скобках — глубина индентирования L , нм.

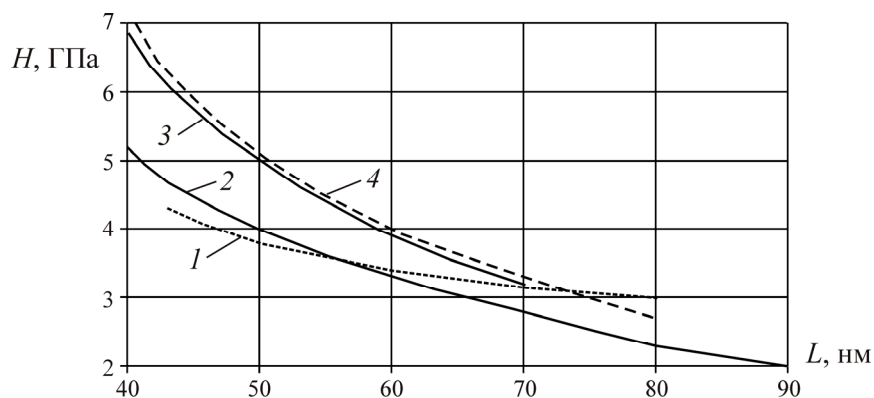


Рис. 8. Зависимость твердости минерала от глубины проникновения кантилевера: 1 — сильвин красный; 2 — галит шпатовый; 3 — галит перистый; 4 — сильвин молочно-белый и розовый

Эксперименты показывают, что исследуемые кристаллы минералов солей обладают близкими механическими характеристиками. Оценочные значения модуля упругости (15–45 ГПа), получаемые с более высокой погрешностью, соответствуют значениям, полученным ранее для нано- [8] и микроуровня [4]. Значения твердости превышают аналогичные, представленные в этих работах, в несколько раз, поскольку они получены при значительно меньших глубинах индентирования. Выраженной корреляции между фрактальными и механическими свойствами в данных экспериментах не выявлено.

ВЫВОДЫ

Фрактальный анализ микрорельефа поверхности кристаллов сильвина и галита с использованием метода минимального покрытия показывает, что для них характерна невысокая степень изрезанности (фрактальная размерность обычно находится в пределах 1.1–1.25), на некоторых участках поверхности могут быть практически гладкими.

Особенности структуры поверхности кристаллов, визуально заметные на изображениях микрорельефа, обычно отражаются на фрактальных характеристиках. Фрактальное поведение может заметно различаться на отдельных участках. На некоторых областях поверхности кристаллов сильвина обнаружены эффекты анизотропии.

Поверхности с низкой фрактальной размерностью (плоскости спайности) более склонны к трещинообразованию. При наличии анизотропии фрактальных свойств распространение трещины наиболее вероятно в направлении с более низкой фрактальной размерностью.

Шероховатость поверхности влияет на ее смачиваемость: значения угла смачивания уменьшаются с ростом шероховатости для смачиваемых поверхностей и увеличиваются для несмачиваемых. Представлена оценка влияния фрактальной размерности на угол смачиваемости.

Механические характеристики изученных кристаллов являются близкими по своим значениям. Твердость по Мейеру уменьшается с ростом глубины индентирования и при $L=70$ нм принадлежит диапазону 2–3 ГПа. Значения модуля упругости относятся к диапазону 15–45 ГПа.

Авторы выражают благодарность сотрудникам кафедры механики сплошных сред и вычислительных технологий ПГНИУ И. А. Морозову, В. П. Солодько, А. П. Скачкову, проводившим эксперимент на ЗСМ Dimension Icon и приборе NanoTest-600, а также доценту кафедры минералогии Н. Е. Молоштановой за обсуждение работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кузнецов П. В., Петракова И. В., Шрайбер Ю. Фрактальная размерность как характеристика усталости поликристаллов металлов // Физ. мезомеханика. — 2004. — Т. 7. — Спец. вып. 1. — С. 389–392.
2. Короленко П. В., Маганова М. С., Меснянкин А. В. Новационные методы анализа стохастических процессов и структур в оптике. — М.: НИИЯФ МГУ, 2004. — 82 с.
3. Аптуков В. Н., Митин В. Ю., Скачков А. П. Исследование микрорельефа поверхности сильвина с помощью метода Херста // Вестн. Перм. ун-та. — 2010. — Вып. 4(4). — С. 30–33.
4. Аптуков В. Н., Константинова С. А., Скачков А. П. Микромеханические свойства карналлита, сильвинита и каменной соли Верхнекамского месторождения // ФТПРПИ. — 2010. — № 4. — С. 13–20.
5. Аптуков В. Н., Скачков А. П. Оценка микромеханических характеристик каменной соли, сильвинита и карналлита на установке NanoTest-600 // Вестн. Нижегород. ун-та. — 2011. — № 4 (2). — С. 372–374.
6. Аптуков В. Н., Константинова С. А., Митин В. Ю., Скачков А. П. Механические характеристики зерна сильвина в нано- и микродиапазоне // ФТПРПИ. — 2012. — № 3. — С. 29–37.
7. Аптуков В. Н., Митин В. Ю. Сравнительные характеристики изрезанности рельефа поверхности зерен сильвина, шпатовой соли и карналлита в нанодиапазоне // ФТПРПИ. — 2013. — № 1. — С. 51–60.
8. Аптуков В. Н., Митин В. Ю., Молоштанова Н. Е., Морозов И. А. Механические характеристики карналлита, шпатовой соли и сильвинита в нанодиапазоне // ФТПРПИ. — 2013. — № 3. — С. 49–56.
9. Аптуков В. Н., Митин В. Ю., Морозов И. А. Фрактальные и механические свойства кристаллов поваренной соли в нанодиапазоне // Вестн. Перм. ун-та. — 2014. — Вып. 4 (27). — С. 16–21.
10. Аптуков В. Н., Митин В. Ю., Скачков А. П. Исследование шероховатости поверхности кристаллов шпатового галита на микро- и наноуровне // Вестн. Перм. ун-та. — 2014. — Вып. 1 (24). — С. 25–30.
11. Викторов С.Д., Головин Ю.И., Кочанов А.И. и др. Оценка прочностных и деформационных характеристик минеральных компонентов горных пород методом микро- и наноиндентирования // ФТПРПИ. — 2014. — № 4. — С. 46–54.
12. Бородин Ф.М., Булл С.Д., Эпштейн С.А. Особенности применения наноиндентирования для изучения механических характеристик неоднородных материалов // ФТПРПИ. — 2015. — № 3. — С. 57–63.
13. Журавков М.А., Романова Н.С. Определение физико-механических свойств геоматериалов на основе данных наноиндентирования и моделей дробного порядка // ФТПРПИ. — 2016. — № 2. — С. 3–15.
14. Дубовиков М. М., Крянев А. В., Старченко Н. В. Размерность минимального покрытия и локальный анализ фрактальных временных рядов // Вестн. РУДН. — 2004. — Т3. — № 1. — С. 81–95.
15. ГОСТ 2789-73. Шероховатость поверхности. — М.: Изд-во стандартов, 1973. — 7 с.
16. Мосолов А. Б. Фрактальная гриффитсова трещина // Журн. техн. физики. — 1991. — Т. 61. — № 7. — С. 57–60.
17. Булат А. Ф., Дырда В. И. Фракталы в геомеханике. — Киев: Наук. думка. — 2005. — 357 с.
18. Тетерина Н. Н., Сабиров Р. Х., Сквирский Л. Я., Кириченко Л. Н. Технология флотационного обогащения калийных руд. — Пермь: ОГУП “Соликамская типография”, 2002. — 484 с.
19. Бойнович Л. Б., Емельяненко А. М. Гидрофобные материалы и покрытия: принципы создания, свойства и применение // Успехи химии. — 2008. — № 77 (7). — С. 619–638.

Поступила в редакцию 19/IX 2015