

УДК 539.37

К РАСЧЕТУ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ВРАЩЕНИЯ ЖЕСТКОГО ЯДРА ПРИ СЛОЖНОМ НАГРУЖЕНИИ ГИПОПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕД

С. В. Лавриков

Институт горного дела СО РАН, 630091 Новосибирск

Рассмотрена плоская задача о расчете направленного переноса внутренних масс и дифференциального вращения внутреннего жесткого ядра при сложном нагружении гипопластических сред с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций. В качестве базовой используется гипопластическая модель гранулированных сред с внутренними переменными. На основе метода конечных элементов построен численный алгоритм расчета полей напряжений и скоростей, возникающих в неупругой среде при сложном нагружении. Приведены траектории движения материальных точек среды и получены оценки скорости вращения ядра и коэффициента редукции.

Введение. В работах [1–7] экспериментально обнаружен эффект направленного переноса масс при сложном нагружении неупругих сред. В [1, 2] экспериментально моделировалось однородное сложное нагружение сыпучей среды с поворотом главных осей тензора деформаций. Нагружение осуществлялось следующим образом. В начальный момент времени неупругое тело подвергалось простому растяжению в определенном направлении и сжатию в ортогональном направлении. Вводилась декартова система координат, две оси которой совпадали с направлениями растяжения и сжатия тела. В следующий момент времени направления растяжения и сжатия изменялись на некоторый угол α относительно третьей оси системы координат. После установления непрерывной зависимости угла α от времени описанный процесс нагружения представлял собой сложное нагружение с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций. Очевидно, что если в некоторой системе координат тело подвергается простому растяжению и сжатию во взаимно ортогональных направлениях, то всегда найдется система координат, в которой данное нагружение будет представлять собой чистый сдвиг. Таким образом, рассмотренный выше процесс нагружения можно интерпретировать как сдвиговое деформирование, направление которого непрерывно меняется. В целом такой механизм деформирования соответствует тому, что происходит при разминании сигареты между пальцами.

В [1–7] показано, что для реализации в лабораторных условиях описанного способа нагружения образцу материала необходимо придать форму эллиптического цилиндра с осью x_3 и на боковой эллиптической границе в плоскости x_1x_2 задать вектор скорости \mathbf{v}_1 , удовлетворяющий условию Кеплера:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad |\mathbf{v}_1 \times \mathbf{r}| = \text{const}, \quad (1)$$

где \mathbf{n}_1 — вектор нормали к боковой эллиптической границе образца; \mathbf{r} — радиус-вектор (рис. 1). В этом случае напряженно-деформированное состояние внутри эллиптического цилиндра будет однородным по пространству независимо от реологических свойств среды [8] (необходима только реологическая устойчивость, т. е. отсутствие локализации,

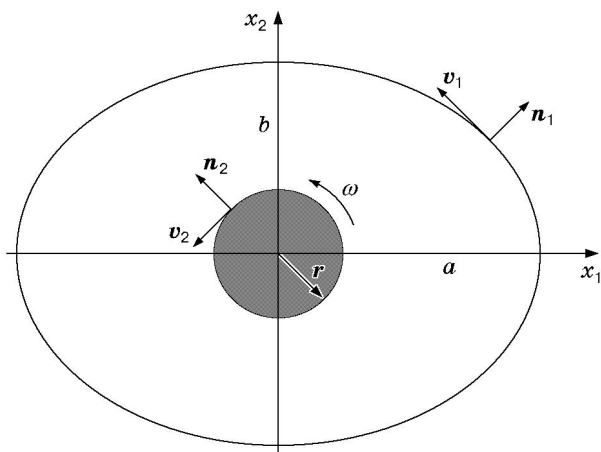


Рис. 1

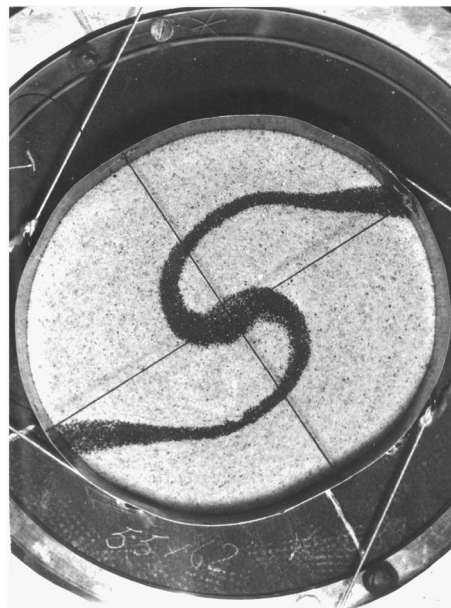


Рис. 2

разрушения и т. д.). Однако оба условия (1) технически реализовать достаточно сложно. Поэтому в лабораторных экспериментах [1–7] были сохранены только основные черты идеальной ситуации — выполнено первое условие в (1), а второе заменено на условие постоянства линейной скорости:

$$\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad |\mathbf{v}_1| = \text{const}. \quad (2)$$

Ясно, что замена условий (1) на (2) приведет к определенной неоднородности, которая будет тем меньше, чем меньше эллипс отличается от окружности (рис. 1). Иными словами, при малых эксцентриситетах эллипса нагружения с условиями (1) и (2) приведут к близким результатам. Однако оказалось, что слабая неоднородность, внесенная в условия нагружения, приводит к самостоятельному эффекту. За один полный оборот направлений растяжения и сжатия вокруг тела (один цикл нагружения) все его внутренние материальные точки проходят почти замкнутые траектории, но в первоначальные положения не возвращаются (как это имело бы место при строго однородном деформировании). С увеличением числа циклов нагружения изначально близкие материальные точки расходятся все дальше.

На рис. 2, взятом из работы [1], приведены результаты эксперимента для сыпучего материала после нескольких циклов нагружения. Перед началом деформирования материальные точки вдоль большой оси эллипса были выделены черным цветом. Особенностью описанного выше процесса является то, что при сохранении внешнего объема тела внутренняя деформация потенциально не ограничена.

Эксперименты [7] показали также, что если внутри тела помещено жесткое ядро, то в процессе деформирования оно вовлекается в движение и начинает вращаться. Следует отметить, что направление вращения ядра зависит от реологии среды. Так, в случае вязкой жидкости ядро всегда вращается в направлении, совпадающем с направлением нагружения (вращение направлений растяжения и сжатия). Для сыпучих сред ядро в зависимости от условий нагружения может вращаться как в ту же сторону, так и в противоположную, т. е. навстречу направлению нагружения.

На основе обнаруженного эффекта в работах [1–7] сформулирована гипотеза о возможном механизме направленного переноса внутренних масс Земли и дифференциального

вращения ее твердого ядра вследствие суточного вращения планеты в поле приливных сил Луны или Солнца.

Целью настоящей работы является численное моделирование описанного выше процесса деформирования и расчет направленного переноса масс и дифференциального вращения жесткого ядра при сложном нагружении неупругих сред. Однако вопрос о возможности использования результатов расчетов при оценке направленного переноса внутренних масс Земли и дифференциального вращения ее твердого ядра требует дополнительного анализа и здесь не рассматривается.

Решение большинства прикладных задач механики связано с выбором или построением адекватной математической модели среды, которая описывает эффекты, возникающие при деформировании. Для достижения целей настоящей работы необходима такая математическая модель, которая описывает, во-первых, неупругую реакцию среды, во-вторых, сложное нагружение, когда главные оси тензора деформаций непрерывно поворачиваются, и, в-третьих, возможную разгрузку материала в процессе деформирования и повторное нагружение, т. е. циклическое нагружение. К таким моделям относятся так называемые гипопластические модели [9, 10], особенностью которых является существенная нелинейность уравнений даже для приращений, что позволяет в рамках одних и тех же уравнений описать как активное нагружение, так и разгрузку неупругой среды. Остановимся на варианте гипопластической модели сыпучих сред [11]. Предварительно она была протестирована для различных путей нагружения включая сложные. В [12, 13] показано, что эта модель удовлетворительно описывает дилатансию и напряженное состояние в сыпучих средах. Более того, модель корректно описывает и реакцию среды на циклическое нагружение, включая промежуточную разгрузку. Однако в [13] также отмечалось, что гипопластическая модель [11] не описывает условие соосности при сложном нагружении сыпучих сред. Так, лабораторные эксперименты [1, 2] показали, что в сыпучей среде при сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей деформаций выполняется условие соосности тензоров напряжений и деформаций, в то время как гипопластическая модель [11] дает приближение к условию соосности тензоров напряжений и скоростей деформаций, которое выполняется для вязких жидкостей. Поскольку экспериментально обнаруженный эффект направленного переноса масс и дифференциального вращения ядра наблюдается как для сыпучих, так и для вязких сред, в настоящей работе ограничимся рассмотрением гипопластической модели [11].

Постановка задачи. Рассмотрим задачу о расчете направленного переноса масс и дифференциального вращения ядра при сложном нагружении. Как отмечено выше, эффект направленного переноса наблюдается в плоскости вращения главных осей деформаций. Поэтому имеет смысл ставить задачу как плоскую. Определяющие уравнения гипопластической модели сыпучих сред с внутренними переменными, связывающие тензор напряжений T и тензор скоростей деформаций D , согласно [11] имеют следующий общий вид:

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{T} &= C_1 \operatorname{tr}(T + S) + C_2 \frac{\operatorname{tr}((T + S)D)}{\operatorname{tr}(T + S)}(T + S) + \left[\frac{C_3 T^2 + C_4 T^{*2}}{\operatorname{tr} T} + \frac{C_5 T^3 + C_6 T^{*3}}{\operatorname{tr} T^2} \right] \sqrt{\operatorname{tr} D^2}, \\ \dot{e} &= (1 + e) \operatorname{tr} D; \end{aligned} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} S &= sE, \quad p = \operatorname{tr} T, \quad \overset{\circ}{T} = \dot{T} - WT + TW, \quad T^* = T - pE/3, \quad W = (\nabla \mathbf{v} - \nabla \mathbf{v}^T)/2, \\ s &= [s_0 + k(p/p_0)^\beta \ln((1 + e)/(1 + e_0))](p/p_0)^\alpha, \quad k = -s_0/[(p_r/p_0)^\beta \ln((1 + e_r)/(1 + e_0))], \end{aligned} \quad (4)$$

где \mathbf{v} — поле скоростей; E — единичный тензор; e — пористость. Константы модели равны

$$C_1 = -103,01, \quad C_2 = -197,61, \quad C_3 = 37,24,$$

$$\begin{aligned}
C_4 &= 1572,92, & C_5 &= -394,69, & C_6 &= -1265,66, \\
p_r &= -0,5 \text{ МПа}, & p_0 &= 0,729 \text{ МПа}, & s_0 &= -0,149 \text{ МПа}, \\
\alpha &= 0,6, & \beta &= 0,1, & e_r &= 0,73, & e_0 &= 0,54.
\end{aligned} \tag{5}$$

Соотношения модели (3)–(5) записаны для пространственного случая. Сведение уравнений (3)–(5) к случаю плоского напряженного состояния позволяет записать замкнутую систему уравнений для приращений компонент тензора напряжений $\Delta\sigma_{11}$, $\Delta\sigma_{22}$, $\Delta\sigma_{12}$ и поля перемещений Δu_1 , Δu_2 в виде

$$\frac{\partial\Delta\sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta\sigma_{12}}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial\Delta\sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta\sigma_{22}}{\partial x_2} = 0; \tag{6}$$

$$\begin{aligned}
\Delta\sigma_{11} &= A_{11} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_1} + A_{12} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_2} + A_{13} \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_1} + A_{14} \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_2} + A_{15} \frac{\partial\Delta u_3}{\partial x_3} + A_{16} \Delta L, \\
\Delta\sigma_{22} &= A_{21} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_1} + A_{22} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_2} + A_{23} \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_1} + A_{24} \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_2} + A_{25} \frac{\partial\Delta u_3}{\partial x_3} + A_{26} \Delta L, \\
\Delta\sigma_{12} &= A_{31} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_1} + A_{32} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_2} + A_{33} \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_1} + A_{34} \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_2} + A_{35} \frac{\partial\Delta u_3}{\partial x_3} + A_{36} \Delta L, \\
\Delta\sigma_{33} &= A_{41} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_1} + A_{42} \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_2} + A_{43} \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_1} + A_{44} \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_2} + A_{45} \frac{\partial\Delta u_3}{\partial x_3} + A_{46} \Delta L = 0,
\end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
\Delta L &= \sqrt{\left(\frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_1}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\Delta u_3}{\partial x_3}\right)^2}, \\
\Delta e &= (1 + e) \left(\frac{\partial\Delta u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial\Delta u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial\Delta u_3}{\partial x_3}\right).
\end{aligned}$$

Уравнения (6) представляют собой обычные уравнения равновесия для приращений компонент плоского тензора напряжений, уравнения (7) — определяющие соотношения гипопластической модели, где величины A_{ij} ($i = \overline{1,4}$, $j = \overline{1,6}$) зависят только от напряжений σ_{ij} , пористости e и констант модели и не зависят от приращений напряжений и приращения пористости. В (7) через ΔL обозначена нелинейная часть уравнений модели. Уравнение $\Delta\sigma_{33} = 0$ является приближением для случая плоского напряженного состояния и служит для исключения из (7) величины $\partial\Delta u_3/\partial x_3$, отвечающей за изменение объема среды при деформировании (дилатансию).

Краевые условия для уравнений (6), (7) имеют вид

$$\Delta \mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{n}_1 = 0, \quad |\Delta \mathbf{u}_1| = d = \text{const}; \tag{8}$$

$$\Delta \mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{n}_2 = 0, \quad \omega = \text{const}. \tag{9}$$

Условия (8) относятся к внешней границе эллиптической области (см. рис. 1) и согласно [1–7] должны обеспечивать эффект направленного переноса. При численном решении задачи величину d в (8) будем использовать в качестве параметра нагружения. Условия (9) относятся к границе незакрепленного внутреннего жесткого ядра, помещенного в центр области. Величина ω в (9) означает угловую скорость вращения ядра, которая считается неизвестной постоянной величиной и определяется из дополнительного условия равенства нулю суммарного вращающего момента сил на границе ядра

$$M = 0. \tag{10}$$

Иными словами, если при деформировании на границе ядра возникает вращающий момент сил, то он должен компенсироваться вовлечением во вращение самого ядра. Условия (9), (10) позволяют рассчитать направление и угловую скорость вращения ядра, а

следовательно, вычислить коэффициент редукции (отношение числа оборотов ядра к числу циклов нагружения).

Таким образом, система уравнений (6), (7) при краевых условиях (8)–(10) представляет собой замкнутую модель для расчета приращений напряжений $\Delta\sigma_{ij}$, смещений Δu_i и пористости Δe .

Для численного решения задачи (6)–(10) используем метод конечных элементов (МКЭ). Стандартная техника решения краевых задач с помощью МКЭ позволяет свести исходную дифференциальную систему уравнений к алгебраической системе высокого порядка [14, 15]. В данном случае в силу нелинейности определяющих уравнений (7) использование МКЭ приводит к алгебраической системе нелинейных уравнений, которую можно записать в виде

$$F_1(y_1, \dots, y_m) = 0, \quad \dots, \quad F_m(y_1, \dots, y_m) = 0. \quad (11)$$

Здесь компонентами вектора $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$ являются приращения перемещений Δu_1 , Δu_2 в узлах сетки конечно-элементного разбиения. Нелинейная система (11) решается с помощью итерационного метода Ньютона

$$\mathbf{y}^{k+1} = \mathbf{y}^k - J^{-1}(\mathbf{y}^k) \mathbf{F}(\mathbf{y}^k), \quad (12)$$

где k — номер итерации; J — матрица Якоби:

$$J = \begin{pmatrix} \partial F_1 / \partial y_1 & \dots & \partial F_1 / \partial y_m \\ \dots & \dots & \dots \\ \partial F_m / \partial y_1 & \dots & \partial F_m / \partial y_m \end{pmatrix}.$$

Критерием остановки итерационного процесса (12) служит выполнение условия $\max_{1 \leq i \leq m} |F_i(\mathbf{y}^k)| < \varepsilon$ (ε — заданная малая величина). Таким образом осуществляется один шаг нагружения. Полное решение задачи в силу нелинейности уравнений модели для приращений будем строить в виде итерационного процесса

$$\sigma_{ij}^{n+1} = \sigma_{ij}^n + \Delta\sigma_{ij}^n, \quad u_i^{n+1} = u_i^n + \Delta u_i^n, \quad e^{n+1} = e^n + \Delta e^n, \quad i, j = 1, 2, \quad (13)$$

где приращения на n -м шаге нагружения находятся из решения краевой задачи (6)–(10).

Для численной реализации итерационного процесса (13) необходимо определить начальное напряженное состояние среды. Экспериментальные исследования [1–7] показали, что каково бы ни было состояние среды в начальный момент, через определенное время процесс деформирования стабилизируется, т. е. выходит на стационарный режим. В этом режиме все напряжения не изменяются с течением времени. Свойства сыпучих материалов таковы, что среда приспособляется к условиям деформирования и “забывает” историю нагружения. Другими словами, в стационарном режиме напряженное состояние зависит только от текущих условий нагружения и не зависит от напряженного состояния в начальный момент времени. Таким образом, итерационный процесс (13) необходимо осуществлять до тех пор, пока процесс деформирования не выйдет на стационарный режим. В качестве критерия стабилизации процесса деформирования будем использовать условие вида $\max_{i,j} |\Delta\tilde{\sigma}_{ij}^n / \tilde{d}| \ll 1$, где $\Delta\tilde{\sigma}_{ij}^n$ — приращение безразмерных напряжений, полученное на n -й итерации процесса (13); \tilde{d} — безразмерный параметр нагружения из граничного условия (8). Иными словами, предполагается, что стационарный режим деформирования достигается в том случае, если рассчитанные приращения напряжений близки к нулю независимо от порядка малости параметра нагружения.

Предварительный анализ используемой гипопластической модели, проведенный при однородном деформировании, показал, что модель адекватно описывает процесс стабилизации и выход на стационарный режим деформирования [12, 13]. При этом для однородного деформирования (с условиями (1) на внешней границе) стационарное состояние определяется достаточно просто, по крайней мере для этого не требуется решать краевую задачу. В то же время, как отмечено выше, условия нагружения типа (1) и (2) для малых эксцентриситетов эллипса дают близкие результаты. Поэтому если в качестве начального напряженного состояния среды для задачи (6)–(10) использовать состояние, которое достигается в стационарном режиме при однородном деформировании с условием на внешней границе (1), то можно ожидать, что полученное решение для приращений $\Delta\sigma_{ij}$ будет стремиться к нулю, что соответствует стационарному режиму деформирования. Опыт использования гипопластических моделей для решения плоских краевых задач показывает, что описанный прием уже после первой итерации процесса (13) приводит к решению, которое с достаточной точностью описывает стационарное состояние [16].

Результаты расчетов. Рассмотрим пример расчета. Выберем следующие параметры расчетной области и начальное напряженное состояние среды:

$$\begin{aligned} a/b = 1,1, \quad r/b = 0,21, \quad e = 0,83711, \quad \varepsilon = 10^{-9}, \\ \sigma_{33} = -20 \text{ КПа}, \quad \sigma_{11} = 1,25\sigma_{33}, \quad \sigma_{22} = 1,19\sigma_{33}, \quad \sigma_{12} = 0,7\sigma_{33}. \end{aligned} \quad (14)$$

Здесь a, b — большая и малая полуоси эллипса соответственно; r — радиус внутреннего ядра (см. рис. 1). Напряженное состояние (14) получено как однородное стационарное состояние среды при анализе гипопластической модели (3)–(5) [12, 13].

Численное решение задачи (6), (7) с граничными условиями (8)–(10) показывает, что полученные приращения компонент тензора напряжений уже после первой итерации с относительной погрешностью порядка 7 % равны нулю, т. е. $\max_{i,j} |\Delta\tilde{\sigma}_{ij}^n/\tilde{d}| = 0,07$. Как и ожидалось, стационарное состояние с достаточной точностью достигается за одну итерацию процесса (13). Таким образом, найденное уже на первой итерации приращение поля перемещений $\Delta\mathbf{u}$ (рис. 3) можно интерпретировать как стационарное поле скоростей, реализуемое в сыпучей среде при сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций.

Поле $\Delta\mathbf{u}$ интегрировалось численно стандартным методом Эйлера и строились траектории движения материальных точек среды. Расчеты показали, что полученные траек-

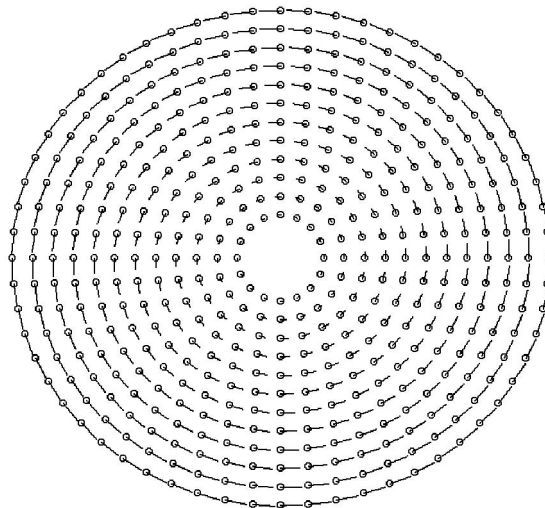


Рис. 3

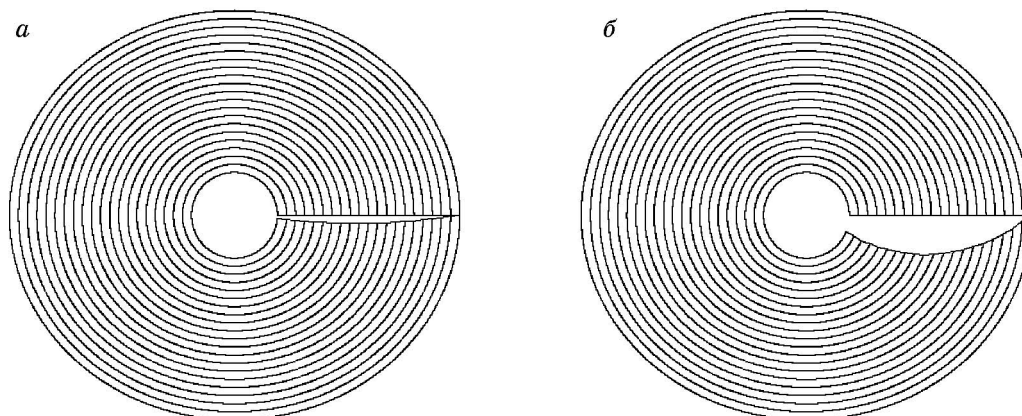


Рис. 4

тории представляют собой замкнутые эллиптические линии. Однако периоды обращения разных точек вдоль найденных траекторий различны. Перед началом деформирования зафиксируем материальные точки, лежащие на большой полуоси эллипса. Расчеты показали, что за один полный цикл деформирования (один полный оборот материальной точки внешней границы эллипса) все внутренние точки не возвращаются в первоначальные положения, а занимают новые положения. Однако в силу малости эксцентриситета эллипса новые положения незначительно отличаются от исходных. Тем не менее с увеличением числа циклов нагружения это отличие увеличивается. На рис. 4, *a* показаны траектории и конечные положения наблюдаемых материальных точек среды после первых трех циклов нагружения. Видно, что исходная прямая, которую составляли наблюдаемые точки большой полуоси, трансформировалась в кривую. На рис. 4, *б* показана стадия деформирования, которая получается за 15 полных циклов нагружения. На основе анализа результатов расчетов можно сделать вывод, что в среде наблюдается направленный перенос внутренних масс при сложном нагружении с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций.

Из результатов расчетов (рис. 4) также следует, что внутреннее жесткое ядро вовлекается во вращение в процессе деформирования. Ядро за каждый цикл нагружения совершает поворот на угол, несколько меньший 2π , т. е. вращается в направлении, совпадающем с направлением нагружения, но отстает по скорости вращения. С увеличением числа циклов нагружения это отставание увеличивается (рис. 4). Данный результат не является неожиданным. Как следует из экспериментов [1–7], внутреннее ядро может вращаться как в ту же сторону (в случае нагружения вязких жидкостей), так и в противоположную сторону (в случае нагружения сыпучих сред) относительно направления нагружения. Гипопластическая модель (3)–(5) в целом описывает поведение сыпучих сред. Вместе с тем приближенно из расчетов по этой модели следует соосность тензоров напряжений и скоростей деформаций, которая имеет место для вязких жидкостей. По-видимому, от выполнения условия соосности зависит направление вращения внутреннего ядра. При выбранных параметрах расчетной области (14) ядро за один цикл нагружения поворачивается на угол, который на $1,48^\circ$ меньше угла 2π . Таким образом, коэффициент редукции составляет 0,9958.

Полученные результаты существенно зависят от выбора геометрических параметров расчетной области. Расчеты проводились для различных значений a/b и r/b . Так, увеличение соотношения a/b (увеличение эксцентриситета эллипса) приводит к тому, что эффект направленного переноса и дифференциального вращения ядра становится более выраженным за меньшее число циклов нагружения. Например, при $a/b = 1,3$ изначально близкие материальные точки уже за один цикл нагружения расходятся достаточно далеко,

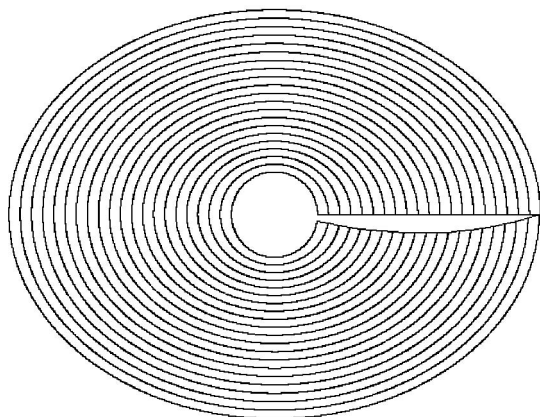


Рис. 5

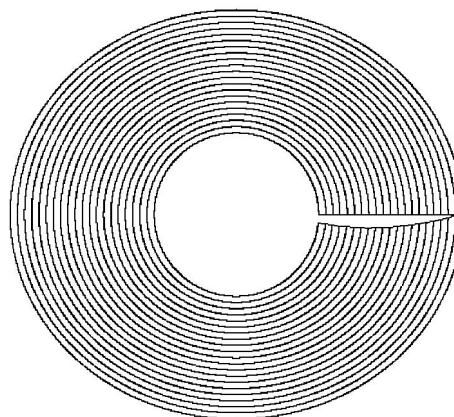


Рис. 6

при этом ядро поворачивается на угол, отличающийся от угла 2π на $9,13^\circ$, а коэффициент редукции уменьшается до 0,9746 (рис. 5). Противоположная ситуация возникает, если увеличивать соотношение r/b в (14), т. е. размер внутреннего ядра. Так, при $r/b = 0,4$ эффект направленного переноса менее выражен, чем в примере расчета с параметрами (14). На рис. 6 показаны траектории движения материальных точек после шести циклов нагружения. При этом за один цикл нагружения внутреннее ядро поворачивается на угол, отличающийся от угла 2π на $1,02^\circ$, и, следовательно, коэффициент редукции составляет 0,9972.

Выводы. Результаты расчетов позволяют сформулировать следующие выводы. Гипопластические модели с внутренними переменными достаточно корректно описывают поведение сыпучих материалов и могут использоваться для решения краевых задач.

Сложное нагружение неупругих сред с непрерывным поворотом главных осей тензора деформаций приводит к устойчивому эффекту направленного переноса внутренних масс среды. При этом внутренняя деформация накапливается с течением времени и потенциально не ограничена.

Жесткое ядро, находящееся внутри образца материала в незакрепленном состоянии, в процессе нагружения вовлекается в движение и начинает вращаться. Вращение ядра, рассчитанное по гипопластической модели, качественно соответствует экспериментальным данным по нагружению вязких жидкостей. Получены оценки скорости вращения ядра и коэффициента редукции для различных геометрических параметров расчетной области.

Автор выражает благодарность Д. Колимбасу и А. Ф. Ревуженко за полезные обсуждения работы.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ревуженко А. Ф.** Механика упругопластических сред и нестандартный анализ. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 2000.
2. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф.** Об одном методе испытаний неупругих материалов // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. 1990. № 4. С. 178–182.
3. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** О возможном механизме перемещения масс Земли // Докл. АН СССР. 1983. Т. 272, № 5. С. 1097–1099.
4. **Ревуженко А. Ф.** О приливном механизме переноса масс // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1991. № 6. С. 13–20.
5. **Бобряков А. П., Ревуженко А. Ф., Шемякин Е. И.** Приливное деформирование планет: Опыт экспериментального моделирования // Геотектоника. 1991. № 6. С. 21–34.

6. **Ревуженко А. Ф.** Один класс сложных нагружений неупругой среды // ПМТФ. 1986. № 5. С. 150–158.
7. **Ревуженко А. Ф., Косых В. П., Бобряков А. П.** О локализованном пластическом течении геосреды вокруг жесткого включения // Физ.-техн. пробл. разраб. полез. ископаемых. 1998. № 6. С. 27–34.
8. **Ревуженко А. Ф.** О самых простых течениях сплошной среды // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 1. С. 54–58.
9. **Kolymbas D., Wu W.** Introduction to hypoplasticity // Modern approaches to plasticity / Ed. by D. Kolymbas. Amsterdam etc.: Elsevier, 1993. P. 213–223.
10. **Kolymbas D.** Computer-aided design of constitutive laws // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1991. V. 15. P. 593–604.
11. **Kolymbas D., Herle I., von Wolffersdorff P.-A.** Hypoplastic constitutive equation with internal variables // Intern. J. Numer. Anal. Methods Geomech. 1995. V. 19. P. 415–436.
12. **Колымбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Однородное деформирование сыпучей среды. Теория и эксперимент // ПМТФ. 1994. Т. 35, № 6. С. 114–121.
13. **Колымбас Д., Лавриков С. В., Ревуженко А. Ф.** Об одном методе анализа математических моделей сред при сложном нагружении // ПМТФ. 1999. Т. 40, № 5. С. 133–142.
14. **Зенкевич О.** Метод конечных элементов в технике. М.: Мир, 1975.
15. **Бате К., Вилсон Е.** Численные методы и метод конечных элементов: Пер. с англ. / Под ред. А. Ф. Смирнова. М.: Стройиздат, 1982.
16. **Lavrikov S. V., Revuzhenko A. Ph.** Complex loading of heterogeneous materials with redistribution of internal mass // J. Theor. Appl. Fract. Mech. 1998. V. 29. P. 85–91.

*Поступила в редакцию 22/XI 2001 г.,
в окончательном варианте — 17/I 2002 г.*
