ПМТФ, № 5, 1965

О ВЛИЯНИИ СТЕНОК НА НЕРЕГРЕВНУЮ НЕУСТОЙЧИВОСТЬ В МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ КАНАЛЕ

А. Г. Куликовский, С. А. Регирер

(Москва)

Механизм перегревной неустойчивости магнитогидродинамических течений состоит в следующем. Если электропроводность среды зависит от температуры, то небольшое местное увеличение температуры может при определенных условиях привести к увеличению выделения джоулева тепла, дальнейшему росту температуры и вызвать, таким образом, неустойчивость.

Перегревная неустойчивость изучалась ранее [1, 2] в предположении однородности невозмущенной температуры и без учета влияния границ области. Было обнаружено, что инкремент нарастания возмущений увеличивается с ростом длины волны. Очевидно, однако, что отвод тепла через границы области, занятой проводящей средой, может повлиять на развитие возмущений, в первую очередь — длинноволновых. В связи с этим ниже изучается простейшая задача об устойчивости распределения температуры при электрическом разряде в газе между двумя плоскостями.

Рассмотрим поток несжимаемой среды с постоянной скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{e}_x U$ (ее можно считать равной нулю в соответствующей системе координат) между двумя плоскими электродами $y = \pm L$, на которых поддерживаются постоянные температуры и электрические потенциалы. Пусть в потоке установилось такое распределение температуры, что все джоулево тепло отводится через стенки и температура не меняется в направлении течения. Такое предположение можно принять, если длина электродов много больше некоторой величины, определяемой шириной канала, теплопроводностью и скоростью потока. Воздействием магнитного поля на рассматриваемые возмущения электрического тока будем пренебрегать, так что неустойчивость будет носить чисто «тепловой» характер и не будет связана с возмущениями поля скоростей. Такой характер неустойчивости сохраняется и при наличии однородного магнитного поля, когда рассматриваются возмущения с волновым вектором $\mathbf{k}$, перпендикулярным направлению поля. Действительно, в этом случае

$$\operatorname{rot}(\mathbf{j} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{H}\nabla)\,\mathbf{j} - \mathbf{H} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0$$

и магнитные силы приводят только к перераспределению давления в среде.

Температура невозмущенного потока T_0 определяется из уравнения

$$\varkappa \frac{d^2 T_0}{dy^2} = -\frac{j^2}{\sigma(T_0)}, \qquad T_0(\pm L) = T_w \qquad \left(j = j_y = 2\varphi_e \left(\int_{-L}^{L} \frac{dy}{\sigma}\right)^{-1}\right) \tag{1}$$

Здесь $\varkappa$ — постоянный коэффициент теплопроводности, σ_0 — электропроводность, j — невозмущенная плотность тока, $2\varphi_e$ — разность потенциалов на электродах.

Обращаясь к уравнениям Максвелла и закону Ома и сделав простые оценки, можно показать, что если величина $L^2\sigma / \omega c^2$ (где ω — характерная частота задачи) много меньше единицы, то возмущения электрического поля $\mathbf{E} = \nabla\varphi$ обладают потенциалом. Уравнение для φ получается из равенства $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ и закона Ома $\mathbf{j} = \sigma\mathbf{E}$. Второе уравнение задачи (относительно температуры) вытекает из уравнения энергии.

Введем следующие безразмерные величины (штрихи в дальнейшем будут опущены):

$$t' = \frac{t}{\rho c_v L^2}, \quad y' = \frac{y}{L}, \quad x' = \frac{x}{L}, \quad f = \varphi \frac{jL}{\varkappa T^*}, \quad T' = \frac{T}{T^*}$$

$$T_0' = \frac{T_0}{T^*}, \quad \alpha^2 = \frac{j^2 L^2}{\varkappa T^* \sigma^*}, \quad \sigma' = \frac{\sigma}{\sigma^*}, \quad \alpha_0^2 = \frac{4\varphi_e^2 \sigma^*}{\varkappa T^*}$$

Здесь $\sigma^* = \sigma(T^*)$ — некоторое характерное значение проводимости, а T^* — соответствующая температура. Тогда уравнение (1) и линеаризованные уравнения для возмущений температуры T и потенциала φ принимают вид

$$\frac{d^2 T_0}{dy^2} = -\frac{\alpha^2}{\sigma}, \quad T_0(\pm 1) = T_w, \quad \alpha^2 = \alpha_0^2 \left(\int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sigma} \right)^{-2} \tag{2}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \triangle T + 2 \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha^2 \frac{T}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dT}, \qquad T(\pm 1) = 0 \tag{3}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\sigma \frac{\partial f}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\sigma \frac{\partial f}{\partial y} + \alpha^2 \frac{T}{\sigma} \frac{d\sigma}{dt}\right) = 0, \qquad f(\pm 1) = 0 \tag{4}$$

В уравнениях (2) — (4) для простоты принято

$$\sigma = \sigma[T_0(y)], \qquad d\sigma / dT = (d\sigma / dT)_{T=T_0(y)}$$

Заметим, что два последних члена (3) представляют собой возмущение джоулева тепловыделения, а выражение в круглых скобках в (4) — компоненты возмущенной плотности тока j_x и j_y соответственно.

Система (2), определяющая стационарный профиль температуры в канале, всегда разрешима в квадратурах. Аналогичные нелинейные задачи (*но без* интегрального множителя в правой части) возникают в теории теплового пробоя диэлектриков [3], теории теплового взрыва [4] и при исследовании куэттовского течения с переменной вязкостью [5]. Пользуясь известными методами, изложенными, например в [5], можно показать, что для параметра α_0^2 справедливо неравенство вида $m(T_m) \leqslant \alpha_0^2 \leqslant M(T_m)$, где $T_m = T_0(0)$ — максимальная температура, а вид функций $m(T_m)$, $M(T_m)$ определяется зависимостью $\sigma(T)$. В частности, при достаточно быстром возрастании σ с увеличением T функция $M(T_m) \to 0$ при $T_m \to \infty$ и, следовательно, α_0^2 ограничены сверху и также убывают до нуля при $T_m \to \infty$. Это означает также, что решение задачи (2) существует лишь при значениях α_0^2, меньших некоторого критического. Наибольшие возможные значения α_0^2 для некоторых зависимостей $\sigma(T)$ найдены в работах [3,6].

Рассмотрим далее частные решения системы (3), (4), имеющие вид

$$T = \theta(y)\, e^{ikx - \lambda t}, \qquad f = \psi(y)\, e^{ikx - \lambda t}$$

Тогда для функций θ, f будем иметь

$$\theta'' + \left(\frac{\alpha^2}{\sigma^2} \frac{d\sigma}{dT} - k^2 + \lambda\right)\theta + 2\psi' = 0 \tag{5}$$

$$(\sigma\psi')' - k^2 \sigma\psi + \alpha^2 \left(\frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{dT} \theta\right)' = 0 \tag{6}$$

$$\theta(\pm 1) = 0, \qquad \psi(\pm 1) = 0 \tag{7}$$

При исследовании устойчивости функцию $T_0(y)$ можно считать заданной, а соответствующую зависимость $\sigma(T_0)$ определять из уравнения (2).

Выражая коэффициенты в (5), (6) через T_0, найдем

$$\theta'' + \left(\lambda - k^2 + \frac{T_0'''}{T_0'}\right)\theta + 2\psi' = 0 \qquad (8)$$

$$\left(\frac{\psi'}{T_0''}\right)' + \left(\frac{T_0'''\theta}{T_0'T_0''}\right)' - k^2\frac{\psi}{T_0''} = 0 \qquad (9)$$

Задача состоит в том, чтобы при заданных $T_0(y)$ и k найти такие значения λ, при которых существует нетривиальное решение уравнений (8), (9), удовлетворяющее граничным условиям (7). При этом наибольший интерес представляет λ с наименьшей вещественной частью.

Если система (8), (9) при некотором λ обладает решением $\theta(y)$, $\psi(y)$, то $\theta(-y)$, $-\psi(-y)$ также является решением, соответствующим тому же λ. Поэтому, когда данному λ соответствует одно собственное решение, то

$$\text{либо} \quad \theta(-y) = \theta(y), \qquad \psi(-y) = -\psi(y) \qquad (10)$$

$$\text{либо} \quad \theta(-y) = -\theta(y), \qquad \psi(-y) = \psi(y) \qquad (11)$$

Если же собственных решений несколько, то они всегда могут быть выбраны так, чтобы удовлетворялось одно из равенств (10), (11).

Поставленную задачу будем рассматривать в двух предельных случаях — для очень больших и очень малых длин волн.

Большим длинам волн [1] соответствуют малые значения k. Пренебрегая в (8), (9) членами, содержащими k^2, и интегрируя (9) с учетом граничных условий (7), найдем

$$\psi = -\frac{T_0'''}{T_0'}\theta + \frac{T_0''}{T_0'(1) - T_0'(-1)}\int_{-1}^{1}\frac{T_0'''}{T_0'}\theta\,dy \qquad (12)$$

Интеграл в правой части (12) с точностью до множителя определяет плотность возмущенного тока j_y.

Из уравнения (8), принимая во внимание формулу (12), получим

$$\theta'' + \left(\lambda - \frac{T_0'''}{T_0'}\right)\theta + \frac{2T_0''}{T_0'(1) - T_0'(-1)}\int_{-1}^{1}\frac{T_0'''}{T_0'}\theta\,dy = 0 \qquad (13)$$

или

$$\theta'' + \left(\lambda - \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dT}\right)\theta + \frac{2\alpha^2}{\sigma}\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dT}\theta\,dy\right)\left(\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sigma}\right)^{-1} = 0, \qquad \theta(\pm 1) = 0 \qquad (14)$$

Эта краевая задача в общем случае будет не самосопряженной.

Согласно сделанному выше замечанию и формулам (10), (11), можно рассматривать только четные и нечетные решения уравнения (13). Для нечетных решений его последний член равен нулю, так что

$$\theta'' + \left(\lambda - \frac{T_0'''}{T_0'}\right)\theta = 0, \qquad \theta(\pm 1) = 0 \qquad (15)$$

Эта задача — самосопряженная и все ее собственные числа λ — действительны. При $\lambda = 0$ единственным нечетным решением (15) будет $\theta = T_0'$. В силу уравнения (2) и неравенства $\sigma \geqslant 0$, имеем $T_0'(1) < 0$. Поэтому, для того чтобы $\theta(1)$ обратилось в нуль, необходимо иметь $\lambda > 0$.

Таким образом, все нечетные возмущения устойчивы и экспоненциально затухают со временем.

Для четных решений уравнений (14) провести исследование устойчивости в общем виде не удается. Ограничимся в дальнейшем двумя частными

---

[1] Можно показать, что в этом случае исследование сохраняет силу и для сжимаемой среды.

случаями зависимости проводимости от температуры, когда

$$\sigma(T) = Ae^{\beta T} \qquad (A,\ \beta = \mathrm{const}) \tag{16}$$

или

$$\sigma(T) = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{1}{B - T} \qquad (B,\ \beta = \mathrm{const}) \tag{17}$$

В случае, когда $\sigma(T)$ определяется формулой (16), $T_0''' \,/\, T_0' = -\beta T_0''$, и задача (14) становится самосопряженной. Все ее собственные числа действительны, а при $\alpha_0 = 0$ — положительны. При изменении параметра α_0 переходу к неустойчивости соответствует переход одного из собственных чисел λ через нуль.

Покажем, что если при изменении параметра простое собственное число λ проходит через нуль при некотором значении параметра, то для решений уравнения (2) это значение соответствует точке бифуркации, и наоборот, точке бифуркации соответствует $\lambda = 0$. Из уравнения (2) следует, что разность двух решений $\theta = T - T_0$ удовлетворяет уравнению

$$\theta'' = -\alpha_0^2 \left\{\frac{1}{\sigma(T_0+\theta)}\left[\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sigma(T_0+\theta)}\right]^{-2} - \frac{1}{\sigma(\tau_0)}\left[\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sigma(T_0)}\right]^{-2}\right\} \tag{18}$$

Введем параметр, однозначно характеризующий решения T_0, которые исследуются на устойчивость. В качестве такого параметра может быть выбрана максимальная температура $T_m = T_0(0)$. Если далее преобразовать уравнение (18) в интегральное, приняв в качестве новой неизвестной $\theta''(y)$, то могут быть использованы теоремы, содержащиеся в книге [7].

Наряду с уравнением (18), рассмотрим следующее:

$$\mu\theta'' - \frac{\alpha^2}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dT}\theta + \frac{2\alpha^2}{\sigma}\left(\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sigma^2}\frac{d\sigma}{dT}\theta\, dy\right)\left(\int_{-1}^{1}\frac{dy}{\sigma}\right)^{-1} = 0, \quad \theta(\pm 1) = 0 \tag{19}$$

Здесь σ и $d\sigma \,/\, dT$ зависят от $T_0(y)$. Уравнение (19) при $\mu = 1$ есть результат линеаризации (18) и совпадает с (14), если в последнем положить $\lambda = 0$. Если при изменении T_m простое собственное значение μ задачи (19) переходит через единицу в точке $T_m = T_m^*$, то на основании теорем 2.1 гл. IV и 4.7 гл. II работы [7] можно заключить, что $T_m = T_m^*$ является точкой бифуркации решений уравнения (18). Переходы μ через единицу (в задаче (19)) и λ через нуль (в задаче (14)) происходят одновременно. Чтобы показать это, предположим, что T_m мало отличается от T_m^*, так что (14) и (19) можно записать в виде

$$L\theta = \Delta L\theta - \lambda\theta, \qquad L\theta = \Delta L\theta - (\mu - 1)\,\theta'' \tag{20}$$

где L — оператор, соответствующий $T_m = T_m^*$, ΔL — «возмущение» оператора, вызванное изменением T_m. Уравнения (20) разрешимы, если их правые части ортогональны к собственным функциям оператора, сопряженного с L, и в данном случае совпадающего с L. Поэтому при T_m, близких к T_m^*, имеем

$$\lambda \int_{-1}^{1} \theta^2 dy = (1 - \mu) \int_{-1}^{1} \theta'^2 dy \tag{21}$$

Из равенства (21) следует, что переход к неустойчивости (переход λ через нуль) связан с бифуркацией решений уравнения (2). Как показывает исследование уравнения (2), точкой бифуркации его решений при условии (16) является единственная [3] точка максимума функции $\alpha_0(T_m)$, которая существует при $\beta > 0$ и отсутствует при $\beta \leqslant 0$. Если $\beta > 0$, то при $\alpha_0 < \alpha_0(T_m^*)$ имеются два решения задачи (2), а при $\alpha_0 > \alpha_0(T_m^*)$

решения не существует. Отсюда следует [7], что индексы соответствующих неподвижных точек векторных полей, соответствующих уравнению (2), в банаховом пространстве функций θ'' имеют противоположный знак, и поэтому при изменении T_m величина μ переходит через единицу в точке $T = T_m^*$, а λ, согласно предыдущему, переходит через нуль. Так как при α_0, близких к нулю, распределение температуры $T_0(y)$ заведомо устойчиво, то из изложенного следует, что оно будет устойчиво при $T_m < T_m^*$ и неустойчиво при $T_m > T_m^*$. Если же $\beta < 0$, так что $\alpha_0(T_m)$ — монотонная функция, то распределение температуры $T_0(y)$ будет устойчиво при любых T_m. Таким образом, при $\beta < 0$ решение уравнения (2) всегда устойчиво, а при $\beta > 0$ — только при $T_m < T_m^*$. При $T_m > T_m^*$ распределение температуры неустойчиво по отношению к симметричным возмущениям с большой длиной волны.

Рассмотрим теперь ту же задачу при гиперболическом законе изменения проводимости (17). Из уравнения (2) следует

$$\frac{T_0'''}{T_0'} = \beta^2, \qquad T_0 = B - \frac{B - T_w}{\operatorname{ch} \beta} \operatorname{ch} \beta y \tag{22}$$

Подставляя эти выражения в (13), получим

$$\theta'' + (\lambda - \beta^2)\theta + J\frac{\beta^3 \operatorname{ch} \beta y}{\operatorname{sh} \beta} = 0, \quad \theta(\pm 1) = 0 \quad \left(J = \int_{-1}^{1} \theta dy = 1 \right) \tag{23}$$

Поскольку интерес представляют только четные по y решения (23), причем такие, что интеграл в третьем члене отличен от нуля, поэтому можно нормировать θ, потребовав дополнительно, чтобы $J = 1$.

Решение задачи (23), удовлетворяющее граничным условиям, имеет вид

$$\theta = \frac{\beta^3 \operatorname{cth} \beta}{a^2 + \beta^2} \left(\frac{\cos ay}{\cos a} - \frac{\operatorname{ch} \beta y}{\operatorname{ch} \beta} \right) \qquad (a^2 = \lambda - \beta^2) \tag{24}$$

Условие $J = 1$ для a или λ дает уравнение

$$\frac{2\beta^3 \operatorname{cth} \beta}{a^2 + \beta^2} \left(\frac{\operatorname{tg} a}{a} - \frac{\operatorname{th} \beta}{\beta} \right) = 1 \tag{25}$$

Отсюда после простого преобразования

$$\frac{\operatorname{tg} a}{a} = \frac{3\beta^2 + a^2}{2\beta^3} \operatorname{th} \beta \tag{26}$$

Последнее уравнение имеет лишние корни $a = \pm i\beta$, так как переход от (25) и (26) содержит умножение на $a^2 + \beta^2$.

При $\beta \to 0$ все корни a_n уравнения (26), не стремящиеся к нулю, действительны и лежат в окрестности чисел $a_{n0} = \pi(n - {}^1/_2)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, обращающих $\operatorname{tg} a$ в бесконечность. Разлагая левую часть (26) в ряд по a, нетрудно убедиться, что это уравнение не имеет, кроме $a = \pm i\beta$, других корней, стремящихся к нулю при $\beta \to 0$. Проследим теперь за изменением корней (26) при изменении β. Вследствие непрерывной зависимости (26) от β в конечной точке комплексной плоскости a при изменении β не может возникнуть новый корень. Легко видеть также, что новые корни не могут приходить и из бесконечности. Поэтому достаточно исследовать поведение корней a_n при увеличении β от нуля. Корни a_n при $n > 1$ вещественны и лежат в интервалах $[a_{n0} - {}^1/_2\pi, a_{n0}]$, и соответствующие им значения λ — положительны. Корень a_1 принадлежит отрезку $[0, a_{10}]$ только при $\beta < \beta^*$, где β^* — корень уравнения $3 \operatorname{th} \beta = 2\beta$. При $\beta = \beta^*$ корень a_1 обращается в нуль, а при $\beta > \beta^*$ появляется пара [1]

[1] Следует иметь в виду, что при вещественных a обе части (27) четны по a, и потому, кроме корня a_1, существует еще корень $a_0 = - a_1$, также обращающийся в нуль при $\beta = \beta^*$. Остальным отрицательным корням соответствуют заведомо $\lambda > 0$.