

УДК 536.2:532/533; 532.516

ИССЛЕДОВАНИЕ СОПРЯЖЕННОГО ТЕПЛООБМЕНА И ГИДРОДИНАМИКИ ПРИ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ В КАВЕРНЕ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТИПА

Г. В. Кузнецов, А. В. Крайнов

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики при Томском государственном университете, 634050 Томск

Проведено численное моделирование движения вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в открытой полости прямоугольного типа в условиях вынужденной конвекции и сопряженного теплообмена. Исследовано влияние динамического параметра струи (числа Рейнольдса) и режима течения жидкости на характер движения и теплообмен вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в кавернах прямоугольного типа. Получена гидродинамическая картина течения вязкой жидкости в открытой каверне в условиях вынужденной конвекции (в сопряженной и несопряженной постановках задачи). Изучено влияние параметров модели на характер движения. Получены температурные профили для твердой и жидкой фаз. Исследовано влияние параметров модели на характер распределения температуры в обеих фазах.

Введение. На протяжении последних сорока лет наблюдается устойчивый интерес к исследованию конвективных течений в полостях различных типов, который объясняется прикладным значением проблемы: полости в качестве теплопередающих, теплоизолирующих и технологических элементов используются в энергетических и технологических установках различного назначения, радиоэлектронных устройствах и теплообменной аппаратуре [1, 2].

Исследование лобового взаимодействия струи вязкой несжимаемой неизотермической жидкости с ограниченным объемом различной формы имеет важное научно-практическое значение в связи с тем, что подобные течения широко распространены в технологических процессах различного уровня сложности таких отраслей промышленности, как металлургическая, энергетическая и др. [2–5].

Моделирование теплообмена при движении вязкой жидкости в выемке прямоугольного типа связано с решением сложных задач вынужденной конвекции несжимаемой жидкости. Поскольку создание надежных аналитических методов расчета параметров течения вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в ограниченных объемах невозможно из-за сложности таких течений, возникает необходимость численного моделирования.

Постановка задачи. Рассматривается нестационарное взаимодействие дозвуковой ламинарной вязкой струи несжимаемой неизотермической жидкости с открытой полостью прямоугольного типа (рис. 1). Численное решение гидродинамической задачи осуществлялось в области 2, ограниченной участком затекания 1, линией симметрии 3, боковой стенкой 6 и дном каверны 4, а также участком выхода 7 из прямоугольной каверны.

Используется математическая модель на основе уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь — функция тока при умеренных числах Рейнольдса ($100 \leq Re \leq 800$), уравнения энергии, уравнения теплопроводности для материала прямоугольной каверны

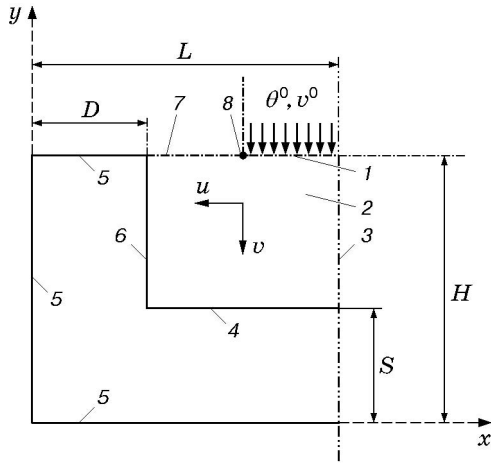


Рис. 1. Схема течения в прямоугольной каверне и геометрия расчетной области:

1 — участок входа в каверну, 2 — гидродинамическая область, 3 — ось симметрии, 4 — дно каверны, 5 — внешние стенки каверны, 6 — боковая стенка каверны, 7 — участок выхода из каверны, 8 — граница раздела между входным и выходным участками

с соответствующими начальными и граничными условиями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega}{\partial \tau} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{\text{Re}} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} &= \omega, \\ \frac{\partial \theta}{\partial \tau} + u \frac{\partial \theta}{\partial x} + v \frac{\partial \theta}{\partial y} &= \frac{1}{\text{RePr}} \left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right), & \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta_1}{\partial y^2} &= \frac{\partial \theta_1}{\partial \text{Fo}}, \end{aligned} \quad (1)$$

где Pr, Fo — числа Прандтля и Фурье.

На дне каверны ($y = S$, $D < x < L$) ставятся условия непротекания, прилипания и граничное условие четвертого рода для уравнения энергии

$$\psi = 0, \quad \omega = 2 \frac{\psi(x, y + \Delta y)}{(\Delta y)^2}, \quad \theta_1 = \theta, \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial y}. \quad (2)$$

На боковой стенке полости ($x = D$, $S < y < H$) ставятся те же условия

$$\psi = 0, \quad \omega = 2 \frac{\psi(x + \Delta x, y)}{(\Delta x)^2}, \quad \theta_1 = \theta, \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}. \quad (3)$$

На оси симметрии струи ($x = L$, $S < y < H$) заданы условия неразрывности тепловых потоков и непротекания

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = 0, \quad \omega = 0, \quad \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0. \quad (4)$$

На участке выхода из полости прямоугольного типа для составляющих скорости использовалось условие “сноса” $\partial u / \partial y = 0$, $\partial v / \partial x = 0$, для температуры — “мягкое” граничное условие (равенство нулю второй производной температуры по координате y) [6, 7]. На внешних границах каверны заданы условия теплоизоляции

$$\begin{aligned} y = H, \quad 0 < x < D: & \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0, \\ y = 0, \quad 0 < x < L: & \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial y} = 0, \\ x = 0, \quad 0 < y < H: & \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0, \\ x = L, \quad 0 < y < S: & \quad \lambda_1 \frac{\partial \theta_1}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (5)$$

При затекании жидкости в каверну выделяются два участка: входа в каверну 1 и выхода из каверны 7 (рис. 1). Положение точки раздела между входным и выходным участками находится из следующего интегрального соотношения, определяющего расход жидкости как основную интегральную характеристику течения:

$$\int_{x_2}^{x_0} v_+(x, y) dx = \int_{x_0}^{x_1} v_-(x, y) dx.$$

Здесь x_1 — фиксированная крайняя точка входного участка, лежащая на оси симметрии; x_0 — координата точки раздела между участками с различными направлениями движения жидкости в каверне ($x_2 < x_0 < x_1$); x_2 — координата фиксированной крайней точки выходного участка, лежащей на боковой стенке каверны; $v_-(x, y)$ — поперечная составляющая скорости движения жидкости в направлении от входного участка до дна каверны; $v_+(x, y)$ — поперечная составляющая скорости движения жидкости в направлении от дна каверны до участка выхода.

Начальные условия заданы в виде

$$\psi(x, y, 0) = \psi^0(x, y), \quad \theta(x, y, 0) = \theta^0(x, y). \quad (6)$$

Методом конечных разностей решены система уравнений Навье — Стокса в переменных функция тока — вихрь, уравнение энергии и уравнение теплопроводности (уравнения (1)–(6)). Явным итерационным методом [8] решены разностные аналоги уравнений Навье — Стокса. Разностные аналоги уравнений энергии и теплопроводности решены методом прогонки [7–9]. Использована разностная схема второго порядка точности. Расчеты выполнены на равномерной разностной сетке.

При постановке задачи для системы уравнений Навье — Стокса в переменных вихрь — функция тока граничные условия в случае твердой неподвижной поверхности имеют вид [7, 8]

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}} = 0, \quad (7)$$

где \mathbf{n} — нормаль к твердой поверхности.

При численном решении разностного уравнения для вихря возникает проблема определения для него граничных условий, поскольку граничные условия (7), относящиеся к системе уравнений Навье — Стокса, заданы только для функции тока и не заданы для вихря.

В данной работе использован способ, заключающийся в том, что функция тока вблизи границы представляется в виде ряда Тейлора. Это позволяет определить выражение для вихря на границе [6].

Тестовые задачи. Для проверки аппроксимации и сходимости численного решения в качестве тестовой взята задача о плоском течении в прямоугольной каверне с верхней стенкой, движущейся в своей плоскости с постоянной скоростью [6–9].

Определены профили продольной $u(y)$ и поперечной $v(y)$ составляющих скорости. Рассчитанные функции тока при различных значениях числа Рейнольдса $300 \leq \text{Re} \leq 1000$ и различном количестве узлов разностной сетки $20 \leq m_1 \leq 60$, $17 \leq m_2 \leq 60$ (m_1 , m_2 — количество узлов сетки по координатам x , y соответственно). Полученные результаты отличаются от результатов работ [6–8] не более чем на 7 %. В таблице приведены максимальные значения функции тока ψ_* и координаты точек x , y , в которых эти значения достигаются, при $\text{Re} = 300$, 500 на сетках 20×17 , 39×33 .

Сетка	[7, 8]			Настоящая работа		
	x	y	ψ_*	x	y	ψ_*
Re = 300						
20 × 17	0,342	0,375	0,043	0,352	0,386	0,044
39 × 33	0,316	0,359	0,051	0,325	0,369	0,052
Re = 500						
20 × 17	0,342	0,375	0,036	0,352	0,386	0,037
39 × 33	0,302	0,328	0,050	0,311	0,337	0,051

В качестве второй тестовой задачи решена задача о сдвиговом течении с циркуляцией при малых числах Рейнольдса $10 \leq \text{Re} \leq 50$, которая сводится к решению бигармонического уравнения для функции тока [10–12]. Полученные профили функции тока отличаются от результатов работы [10] не более чем на 5 %.

Обсуждение полученных результатов. Изучено течение различных жидкостей, в частности воды, расплавленного свинца, жидкой стали, в широком диапазоне значений числа Рейнольдса и других параметров модели. На рис. 2–4 представлены результаты численных расчетов для жидкой стали, температура которой равна 1500 °С.

Как следует из анализа установившегося поля течения, которое изучалось при различных значениях геометрических характеристик полости (в частности, $L/H = 1/2, 2/3, 1$) в достаточно широком диапазоне $100 \leq \text{Re} \leq 500$, жидкость доходит до дна выемки, разворачивается и вытекает на всем участке 7 (см. рис. 1). Исходя из этого при исследовании процесса движения вязкой несжимаемой неизотермической жидкости в полости можно выделить два этапа.

К первому этапу можно отнести прохождение жидкости от входного участка до дна каверны с учетом взаимодействия с ним. При взаимодействии струи с дном выемки течение сопровождается торможением жидкости и возникновением области с повышенным давлением, что приводит к растеканию жидкости вдоль дна полости.

Второй этап движения жидкости проходит от дна каверны до выходного участка с образованием области возвратного течения. На данном этапе продолжается торможение жидкости, в результате чего также возникает область с повышенным давлением.

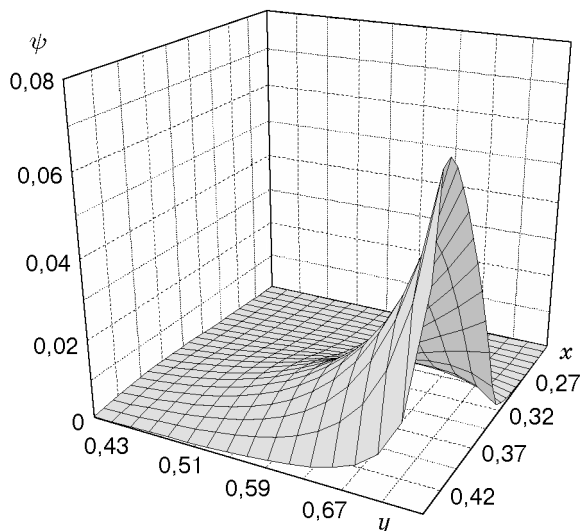


Рис. 2. Распределение функции тока при установившемся течении ($\text{Re} = 200$, $L/H = 2/3$)

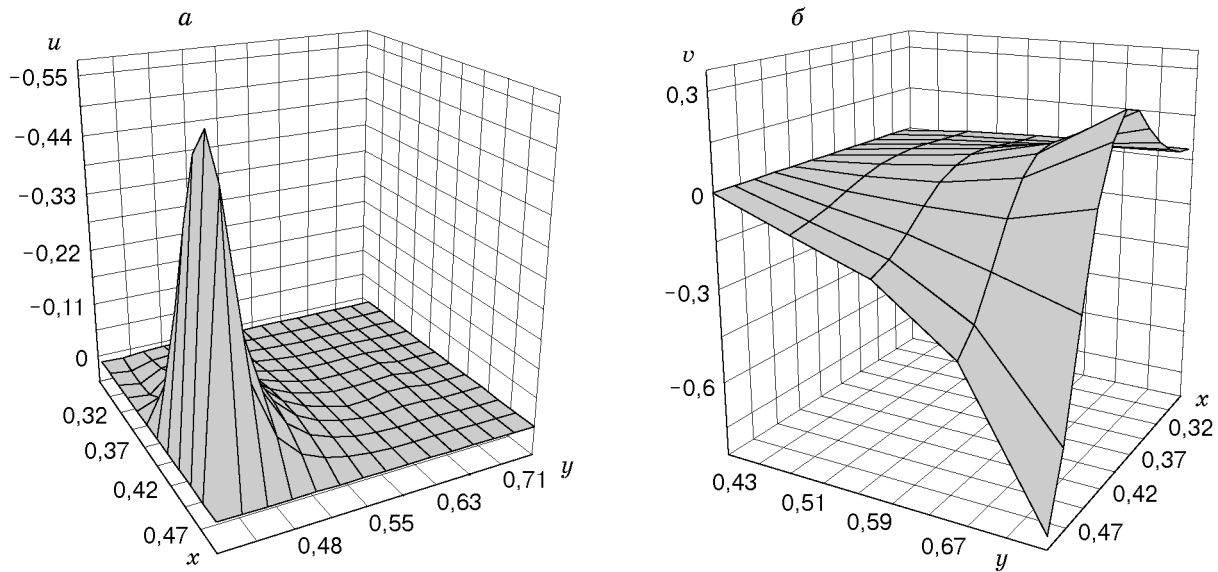


Рис. 3. Распределение продольной (а) и поперечной (б) составляющих скорости при установившемся течении ($Re = 200$)

Области прямого и возвратного течения, соответствующие описанным этапам движения жидкости в полости, видны на рис. 3, б.

Распределение функции тока $\psi(x, y)$ для момента времени t^* , соответствующего установившемуся полю течения, при $Re = 200$ и геометрическом соотношении сторон каверны $L/H = 2/3$ представлено на рис. 2. Максимальное значение функции тока находится в области $0,35 < x < 0,39$, $0,67 < y < 0,75$, в которой наблюдается наиболее интенсивное формирование вихревых структур. Заметим, что проведенный анализ позволил выявить достаточно сильное влияние геометрических характеристик на формирование поля функции тока.

На рис. 3, а приведено распределение продольной составляющей скорости $u(x, y)$ в момент времени t^* при $Re = 200$. Максимум скорости находится в области $0,40 < x < 0,44$ вблизи дна каверны. При увеличении числа Рейнольдса характер поведения продольной составляющей скорости сохраняется.

На рис. 3, б представлено распределение поперечной составляющей скорости $v(x, y)$ в момент времени t^* при $Re = 200$. Отметим, что с увеличением числа Рейнольдса профиль $v(x, y)$ в начальных сечениях каверны становится близким к постоянному значению, в то время как при $Re = 100, 200$ профили поперечной составляющей имеют почти параболическое распределение в тех же сечениях. Анализ распределения поперечной составляющей скорости показывает, что в поле течения формируется два максимума, соответствующих прямому и возвратному течениям.

На рис. 3 видно, что на первом этапе по мере продвижения струи несжимаемой жидкости к основанию выемки поперечная составляющая скорости уменьшается при увеличении продольной составляющей, что отчетливо видно в области $0,41 < y < 0,55$. На втором этапе по мере продвижения струи к выходному участку продольная составляющая скорости уменьшается, что хорошо видно на участке $0,32 < x < 0,41$, $0,41 < y < 0,55$, а поперечная составляющая скорости начинает расти, и наиболее интенсивное ее увеличение наблюдается в области $0,59 < y < 0,75$, $0,30 < x < 0,40$. В соответствии с рис. 3, б максимальное значение скорости вытекания $v_{\max} = 0,24$.

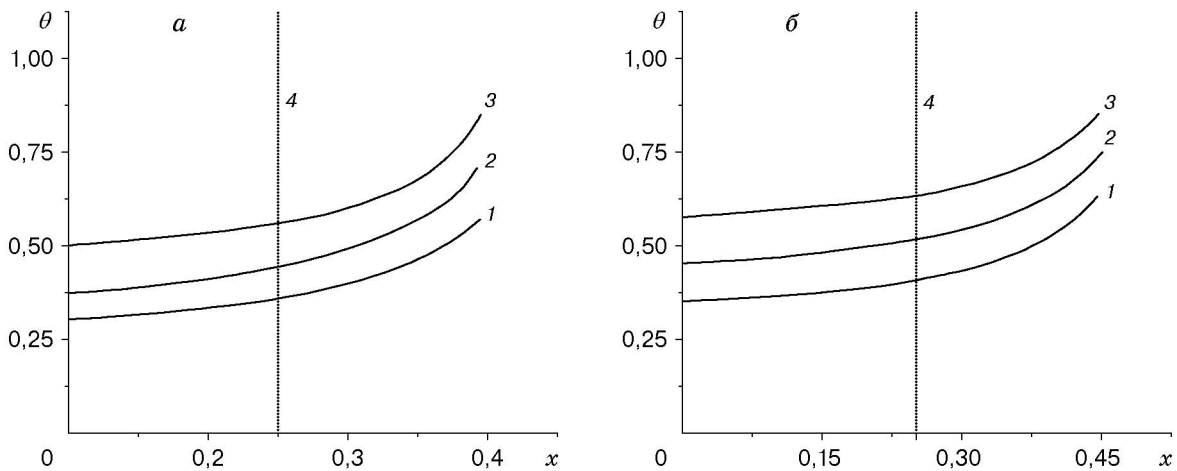


Рис. 4. Распределения температуры в твердой и жидкой фазах по координате x при установившемся течении:

a — $Re = 300$, $Pr = 0,979$, $a = 0,3a_*$, $L/H = 1/2$ (1 — $y = 0,40$; 2 — $y = 0,52$; 3 — $y = 0,68$; 4 — граница раздела жидкой и твердой фаз); b — $Re = 500$, $Pr = 0,979$, $a = 0,32a_*$, $L/H = 1/2$ (1 — $y = 0,40$; 2 — $y = 0,56$; 3 — $y = 0,64$; 4 — граница раздела жидкой и твердой фаз)

Исследование движения вязкой несжимаемой жидкости в полости прямоугольного типа проводилось в условиях сопряженного теплообмена. Температурные зависимости в твердой и жидкой фазах получены при различных динамических параметрах и варьировании параметра a (a — длина входного участка).

На рис. 4, a представлены температурные профили в твердой и жидкой фазах в различных сечениях y в момент времени t^* при $Re = 300$, $Pr = 0,979$, $a = 0,3a_*$ (a_* — длина пронизываемого участка полости $y = H$, $D < x < L$), $L/H = 1/2$. Следует отметить, что при увеличении a и уменьшении геометрических параметров поведение температурных полей по высоте каверны меняется незначительно.

Распределения температуры в твердой и жидкой фазах в различных сечениях y в момент времени t^* при $Re = 500$, $Pr = 0,979$, $a = 0,32a_*$, $L/H = 1/2$ представлены на рис. 4, b . Как видно на рис. 4, b , температурный профиль до границы раздела фаз $x = 0,25$ уменьшается достаточно быстро, в то время как в твердой фазе температура изменяется намного медленнее.

Из полученных результатов следует, что характер поведения температурных профилей в различных сечениях каверны сохраняется с изменением динамического параметра Re .

В данной работе решена также несопряженная задача. На стенках каверны ставились условия теплоизоляции (отсутствие теплоотдачи в стенки каверны).

Различие значений температуры, полученных в сопряженной и несопряженной постановках задачи, составляет $\pm 23\%$, что подтверждает целесообразность решения задачи в сопряженной постановке.

Заключение. Результаты численного анализа позволяют сделать вывод о возможности дальнейшего расширения области применения математического аппарата [7, 8] для решения задач о конвективных течениях в полостях открытого типа в условиях струйного затекания и сопряженного теплообмена. Данная работа является продолжением работ [8, 9], в которых впервые была показана возможность применения математического аппарата [7] для решения задач в сопряженной постановке для областей с более сложной геометрией, чем канал или обтекаемое тело [13]. Оптимизация параметров сетки позво-

ляет получить устойчивые решения задач в областях с более сложной геометрией, чем рассмотренные в [7–9] и данной работе.

В настоящей работе установлено, что устойчивые решения рассматриваемой задачи можно получить в достаточно широком диапазоне значений числа Рейнольдса ($100 \leq Re \leq 1000$).

ЛИТЕРАТУРА

1. **Махнова Г. В., Рис В. В., Смирнов Е. М.** Двумерная ламинарная свободная конвекция в полости, имеющей форму квадрата со скругленными углами // Свободная конвекция. Тепло-массообмен при химических превращениях: Тр. II Рос. нац. конф. по теплообмену, Москва, 26–30 окт. 1998 г. М.: Моск. энерг. ин-т, 1998. Т. 3. С. 100–103.
2. **Флемингс М.** Процессы затвердевания. М.: Мир, 1977.
3. **Рыкалин Н. Н., Углов А. А., Анищенко Л. М.** Высокотемпературные технологические процессы. Теплофизические основы. М.: Наука, 1985.
4. **Баландин Г. Ф.** Основы теории формирования отливки. М.: Машиностроение, 1979.
5. **Карножицкий В. Н.** Контактный теплообмен в процессах литья. Киев: Наук. думка, 1978.
6. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. М.: Наука, 1987.
7. **Пасконов В. М., Полежаев В. И., Чудов Л. А.** Численное моделирование процессов тепло- и массообмена. М.: Наука, 1984.
8. **Полежаев В. И., Бунэ А. В., Дубовик К. Г. и др.** Математическое моделирование конвективного тепло-массообмена на основе уравнений Навье — Стокса. М.: Наука, 1987.
9. **Тарунин Е. Л.** Вычислительный эксперимент в задачах свободной конвекции. Иркутск: Изд-во Иркут. ун-та, 1990.
10. **Ши Д.** Численные методы для решения задач теплообмена. М.: Наука, 1988.
11. **Роуч П.** Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.
12. **Флетчер К.** Вычислительные методы в динамике жидкостей. М.: Мир, 1991. Т. 2.
13. **Гришин А. М., Зинченко В. И.** Сопряженный тепло-массообмен между реакционноспособным телом и газом при наличии неравновесных химических реакций // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1974. № 2. С. 121–128.

*Поступила в редакцию 18/XII 2000 г.,
в окончательном варианте — 20/III 2001 г.*
