

ГЕОФИЗИКА

УДК 519.63

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ ИНДУКЦИОННОГО ИСТОЧНИКА
В СРЕДАХ С ВРЕМЕННОЙ ДИСПЕРСИЕЙ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ
И ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ

А.А. Долгун, Э.П. Шурина, М.И. Эпов

*Институт нефтегазовой геологии и геофизики им. А.А. Трофимука СО РАН,
630090, Новосибирск, просп. Коптюга, 3, Россия*

Представлены результаты математического моделирования распространения электромагнитного поля в средах с временной дисперсией электропроводности и диэлектрической проницаемости. Моделирование выполняется с помощью векторного метода конечных элементов. Источником поля служит виток с током. Предложен метод его аппроксимации.

Временная дисперсия электропроводности и диэлектрической проницаемости, векторный метод конечных элементов, индукционный источник.

PROPAGATION OF ELECTROMAGNETIC WAVES FROM AN INDUCTION SOURCE
IN MEDIA WITH TIME-DEPENDENT CONDUCTIVITY AND PERMITTIVITY

A.A. Dolgun, E.P. Shurina, and M.I. Epov

Electromagnetic wave propagation from an induction source (a transmitter coil) in media with time-dependent conductivity and permittivity is simulated using the vector finite-element method. A special algorithm is suggested for source approximation.

Time-dependent conductivity and permittivity, vector finite-element method, induction source

ВВЕДЕНИЕ

Развитие современной геоэлектрики во многом базируется на расширении модельной базы, позволяющей более полно описывать разнообразные геологические ситуации, которые встречаются при поисках и разведке нефтегазовых залежей. Как известно, осадочные терригенные отложения являются сложным образованием, состоящим из твердого минерализованного скелета, ионного (пластовая вода) или полярного (нефть) жидкого флюида, заполняющего поровое пространство. Такая среда является электрически нейтральной, но при этом на стенках пор располагается двойной электрический слой. Аналогичные слои наблюдаются и вокруг глинистых частиц, которые есть практически в любой осадочной породе. Если в породе есть электронно-проводящие частицы, то на поверхности их соприкосновения с электролитом также возникают двойные электрические слои. При протекании электрического тока происходит деформация двойных электрических слоев и возникают дополнительные электродвижущие силы, оказывающие влияние на движение основных носителей зарядов в электролитах. Соответствующие этим явлениям электрические поля обычно относят к эффектам поляризации среды. При этом для описания такого рода эффектов можно ввести временную дисперсию электропроводности — зависимость $\sigma(t)$. Аналогичная картина наблюдается при наличии в породе структур, в которых объединяются проводники и квазидиэлектрики. Это явление называется эффектом Максвелла—Вагнера. Несомненно, что эти же причины приводят к появлению временной дисперсии диэлектрической проницаемости $\epsilon(t)$.

Традиционно прямые задачи с учетом поляризуемости среды решают в частотной области, где дисперсия среды описывается соотношениями Cole-Cole [Cole, Cole, 1941]. В данной работе производится моделирование во временной области с соответствующей модификацией соотношений Cole-Cole.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Распространение электромагнитного поля описывается уравнениями Максвелла:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}, \quad (2)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho,$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0.$$

Здесь \mathbf{E} , \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей, \mathbf{B} — индукция магнитного поля, \mathbf{D} — электрическое смещение, \mathbf{J} — плотность тока сторонних источников, σ — электропроводность, ρ — объемная плотность электрического заряда.

Эти уравнения дополняются соотношениями, описывающими свойства среды:

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad (3)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad (4)$$

где μ , ε — магнитная и диэлектрическая проницаемости.

Основное уравнение для конечно-элементного моделирования [Nedelek, 1986; Solin, 2005] электрического поля выводится из уравнения (2) с помощью уравнения (1) и соотношений (3) и (4). В результате получаем (учитывая, что ε и σ зависят от времени):

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial^2 (\varepsilon \mathbf{E})}{\partial t^2} + \frac{\partial (\sigma \mathbf{E})}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}.$$

На внешней границе области моделирования электрическое поле считается близким к нулю, поэтому используется краевое условие:

$$\mathbf{E} \times \mathbf{n}|_{\Gamma} = 0.$$

Распишем частные производные по времени от $\varepsilon \mathbf{E}$ и $\sigma \mathbf{E}$:

$$\operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \left(2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sigma \right) \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \left(\frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t}.$$

Аппроксимация первой и второй временных производных электрического поля выполняется по трехслойной неявной схеме с неравномерным шагом:

$$\begin{aligned} & \operatorname{rot} \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{E}^k + \varepsilon^k \left(\frac{2}{\Delta t_0 \Delta t} \mathbf{E}^k - \frac{2}{\Delta t_0 \Delta t_1} \mathbf{E}^{k-1} - \frac{2}{\Delta t \Delta t_1} \mathbf{E}^{k-2} \right) + \\ & + \left(2 \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \sigma \right) \Big|_{t_k} \left(\frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t_0 \Delta t} \mathbf{E}^k - \frac{\Delta t}{\Delta t_0 \Delta t_1} \mathbf{E}^{k-1} + \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} \mathbf{E}^{k-2} \right) + \\ & + \left(2 \frac{\partial^2 \varepsilon}{\partial t^2} + \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right) \Big|_{t_k} \mathbf{E}^k = - \left(\frac{\Delta t + \Delta t_0}{\Delta t \Delta t_0} \mathbf{J}^k - \frac{\Delta t}{\Delta t_0 \Delta t_1} \mathbf{J}^{k-1} + \frac{\Delta t_0}{\Delta t \Delta t_1} \mathbf{J}^{k-2} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Здесь k — номер временного слоя, $\Delta t = t_k - t_{k-2}$, $\Delta t_0 = t_k - t_{k-1}$, $\Delta t_1 = t_{k-1} - t_{k-2}$. Появляющиеся в (5) коэффициенты перед \mathbf{E} и \mathbf{J} соответствуют аппроксимации производных по времени полиномами Лагранжа второй степени.

Конечно-элементная аппроксимация производится с использованием подпространств векторного пространства $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \Omega)$, в результате чего автоматически обеспечивается непрерывность тангенциальных компонент поля \mathbf{E} на границах областей с различными значениями ε и σ . При этом используются тетраэдральные конечные элементы с базисными функциями первого порядка второго типа [Webb, 1999; Solin и др., 2003].

Для уменьшения профиля матрицы применяется обратный алгоритм Катхилла—Макки (reverse Cuthill—McKee, RCM), описанный в работе [Джордж, Лю, 1984].

Для решения получающейся в результате аппроксимации СЛАУ применяется метод минимальных невязок [Paige, Saunders, 1975].

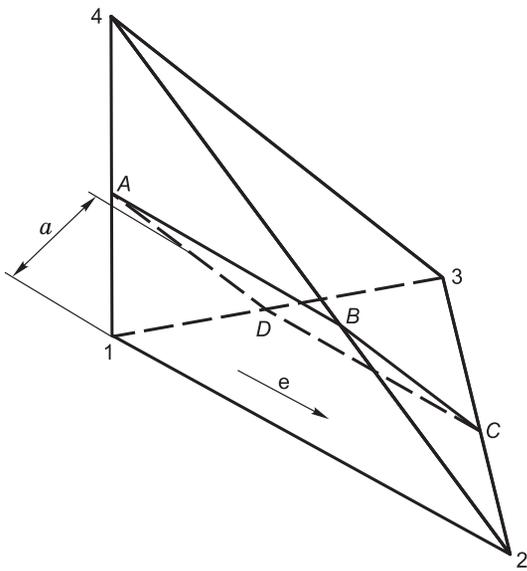


Рис. 1. Конечный элемент с током.

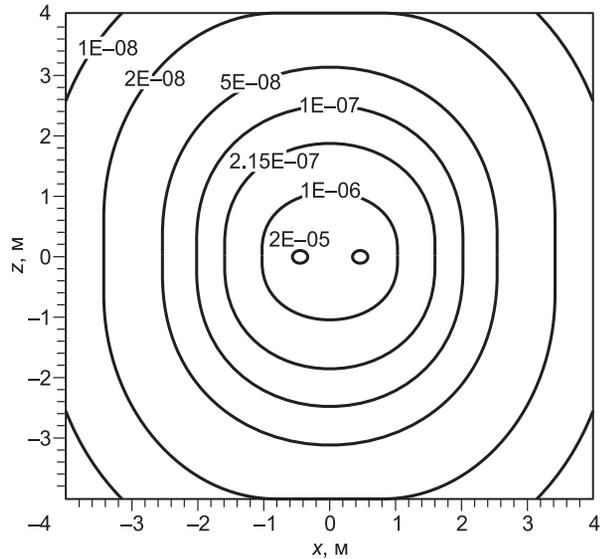


Рис. 2. Точное решение: магнитная индукция от витка с током.

Обратимся к аппроксимации стороннего тока в индукционном источнике. Пусть проводник, внутри которого течет ток, является частью расчетной области. Расчетная область разбита на конечные элементы. Пусть граница области, занимаемой сторонним током, не совпадает с гранями конечных элементов, т. е. ток заполняет только часть каждого тетраэдра, пересекающегося с областью, заполненной током. Для каждого такого тетраэдра необходимо вычислить интегралы вида

$$f_i = \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{W}_i dV, \quad (6)$$

которые дают вклад в правую часть системы линейных алгебраических уравнений. Здесь V — объем конечного элемента, \mathbf{J} — плотность тока в конечном элементе, \mathbf{W}_i — базисная функция. Сжимая область, в которой течет ток (при этом уменьшается занимаемая током часть в каждом тетраэдре), с сохранением полного тока через поперечное сечение проводника, получим аппроксимацию источника, при которой нет необходимости строить сетку внутри него. Необходимо найти величину интеграла (6) после такой процедуры.

Выберем конечный элемент (рис. 1). Пусть ток течет между ребром 1—2 и плоскостью $ABCD$ параллельно ребру. Если приближать плоскость к ребру с сохранением тока через поперечное сечение, то можно показать, что интеграл (6) сводится к криволинейному интегралу вдоль ребра 1—2:

$$\lim_{a \rightarrow 0} \int_V \mathbf{J} \cdot \mathbf{W}_i dV = I \int_l \mathbf{e} \cdot \mathbf{W}_i dl.$$

Здесь I — полный ток, текущий через конечный элемент, \mathbf{e} — единичный вектор, направленный вдоль ребра, a — расстояние между плоскостью $ABCD$ и ребром 1—2. Таким образом, ток, текущий в некоторой области пространства, заменяется на ток, «текущий по ребрам конечно-элементной сетки».

Для проверки правильности этого подхода была решена задача о постоянной магнитной индукции от витка с током диаметром 1 м ($I = 1$ А). Эта задача имеет известное аналитическое решение: закон Био—Савара—Лапласа. На рис. 2 показано ана-

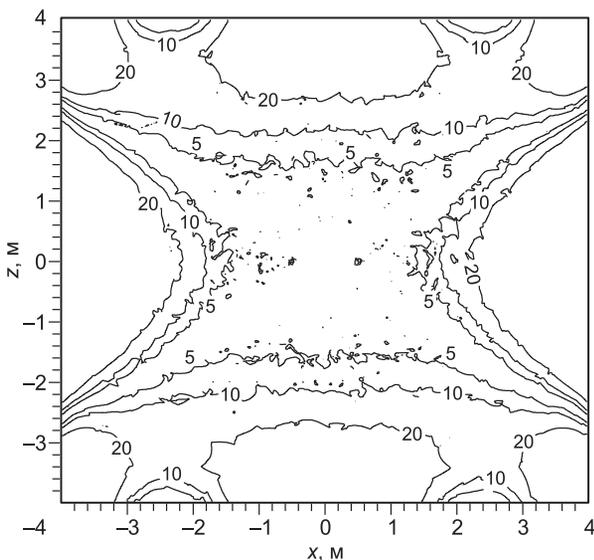


Рис. 3. Относительная разность (%) численного и аналитического решений.

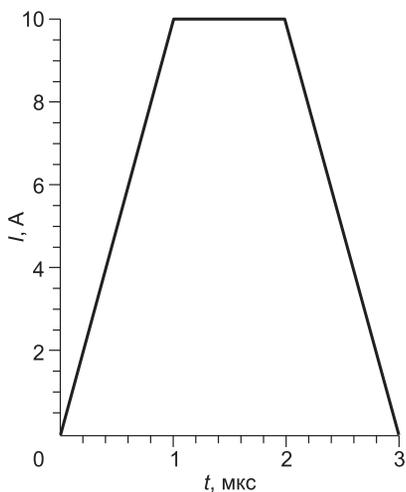


Рис. 4. Токовый импульс.

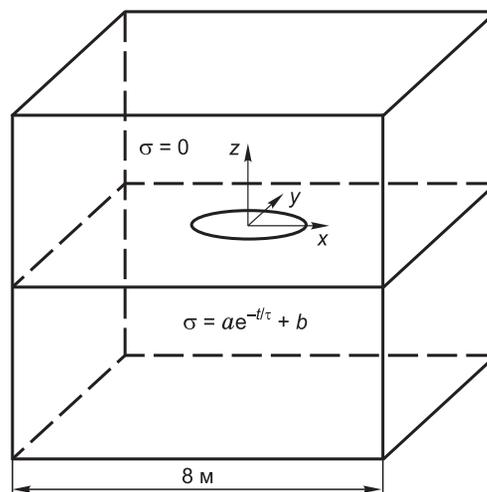


Рис. 5. Расчетная область.

литическое решение: модуль поля \mathbf{V} (Тл) в сечении $y = 0$ (виток расположен в плоскости $z = 0$ в центре области).

На рис. 3 показана относительная разность между численным и аналитическим решением в процентах. В центре рисунка находится область (примерно $-2 \leq x, z \leq 2$), в которой разность составляет менее 5%. Искажение поля по краям связано с используемыми краевыми условиями при численном решении. Таким образом, на расстоянии от центра витка с током, равным примерно половине расстояния от центра витка до края области, численное решение можно считать удовлетворительным.

ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Проводящее полупространство. Рассмотрим распространение короткого электромагнитного импульса трапециевидной формы (рис. 4) в полупространстве с временной дисперсией электропроводности.

Расчетная область (рис. 5) состоит из двух подобластей: «воздуха» ($-4 \leq x, y \leq 4, 0 \leq z \leq 4$) и проводящей среды ($-4 \leq x, y \leq 4, -4 \leq z \leq 0$). Источником поля является виток с током диаметром 1 м, приподнятый на 0.05 м над границей проводящего полупространства.

На рис. 6 показано распределение $|\mathbf{E}|$ (В/м) в сечении $y = 0$ в момент времени $t = 3$ мкс. Электропроводность в нижней подобласти постоянна во времени и равна $\sigma = 2$ См/м. Как видно, в проводящей подобласти напряженность электрического поля существенно меньше, чем в воздухе.

Предположим, что в проводящем полупространстве электропроводность зависит от времени по закону $\sigma = (18e^{-t/\tau} + 2)$ См/м, $\tau = 1$ мкс. На рис. 7 показана зависимость компоненты поля E_y от времени в точке (0.1; 0; -0.001).

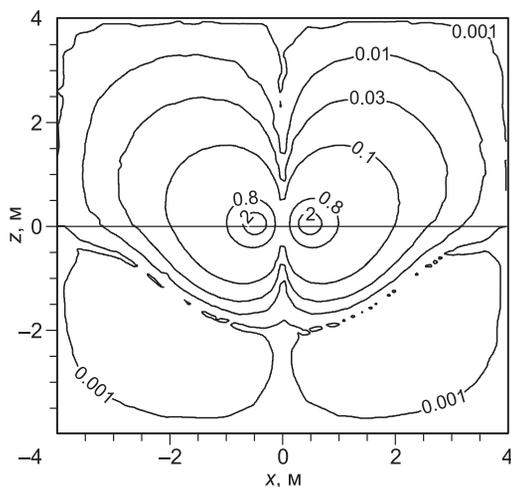


Рис. 6. $|\mathbf{E}|$ в сечении $y = 0, t = 3$ мкс.

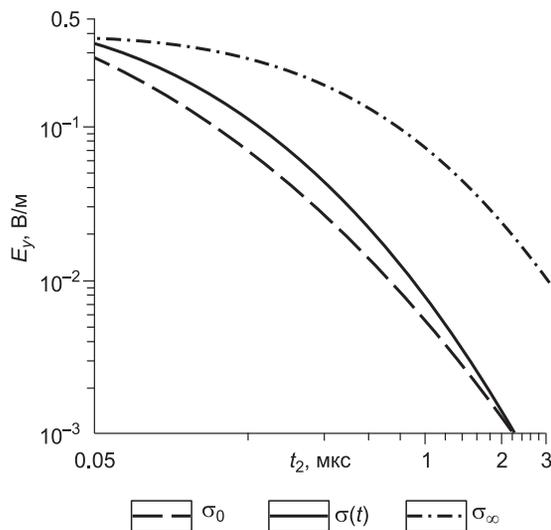


Рис. 7. Зависимость E_y от времени в точке (0.1; 0; -0.001).

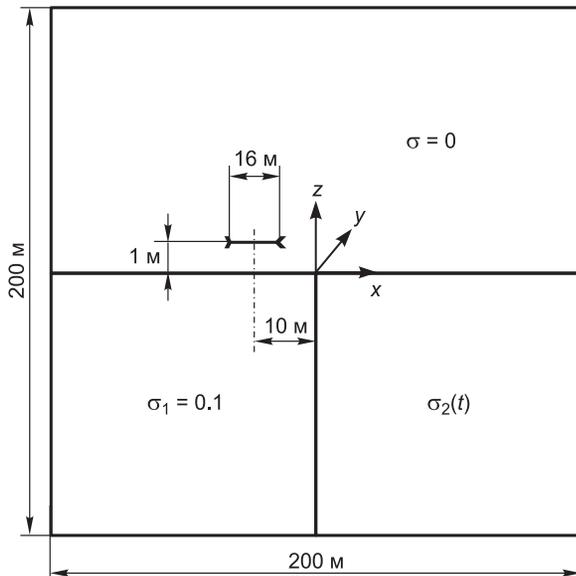


Рис. 8. Размеры подобластей и расположение витка с током.

точке $(0.1; 0; -0.001)$. Эта компонента является доминирующей в данной точке. Для сравнения на том же рисунке показаны графики E_y при постоянной электропроводности $\sigma_0 = \sigma|_{t=0} = 20$ См/м и $\lim_{t \rightarrow \infty} \sigma(t) = 2$ См/м. Графики выполнены в билогарифмическом масштабе, за начальный момент времени ($t_2 = 0$) взято время конца токового импульса $t = 3$ мкс. Как видно из рис. 7, график E_y с зависимостью электропроводности от времени лежит между графиками с постоянной электропроводностью. Однако скорость затухания в случае дисперсионной среды при $t > \tau$ существенно больше.

Проводящее полупространство с вертикальной границей. Рассмотрим проводящее полупространство, разделенное вертикальной плоскостью на две подобласти с различной электропроводностью.

Расчетная область (рис. 8) состоит из трех подобластей. В «воздухе» ($-200 \leq x, y \leq 200, 0 \leq z \leq 200$) электропроводность равна нулю. В левой проводящей подобласти ($-200 \leq x \leq 0, -200 \leq y \leq 200, -200 \leq z \leq 0$) электропроводность $\sigma_1 = 0.1$ См/м и не зависит от времени. В правой ($0 \leq x \leq 200, -200 \leq y \leq 200, -200 \leq z \leq 0$) электропроводность зависит от времени. Виток с током имеет диаметр 16 м и расположен на высоте 1 м. Токковый импульс имеет амплитуду 1 А, форма и продолжительность, как и в предыдущем случае (см. рис. 4).

На рис. 9 показано распределение $|\mathbf{E}|$ в сечении $y = 0$ в момент времени $t = 3$ мкс при постоянной электропроводности $\sigma_2 = 0.01$ и $\sigma_2 = 1$ См/м в правой подобласти. Как и следовало ожидать, если электропроводность в правой подобласти больше, чем в левой, то поле сильнее проникает в левую подобласть и наоборот. Если электропроводности в обеих подобластях равны, то картина становится симметричной.

Рассматривая результаты вычислений в данной расчетной области, можно убедиться в том, что метод конечных элементов правильно воспроизводит разрывы нормальной составляющей поля \mathbf{E} на границе областей с разной электропроводностью. На рис. 10 показан график компоненты E_x вдоль прямой ($y = 20, z = -10$) при $t = 3$ мкс. Электропроводность в правой подобласти постоянна и равна 0.01 См/м. Хорошо видно, что скачок нормальной компоненты поля достаточно близок к 10.

Измеряемой величиной в данной задаче является ЭДС, наводимая в приемном витке диаметром 4 м. На рис. 11, А показана ЭДС в приемном витке, расположенном горизонтально в точке $(-10; 0; 1)$. Электропроводность в правой подобласти не зависит от времени и равна $\sigma_2 = 0.01; 0.1; 1$ См/м. Графики выполнены в билогарифмическом масштабе, начальный момент времени ($t_2 = 0$) соответствует концу

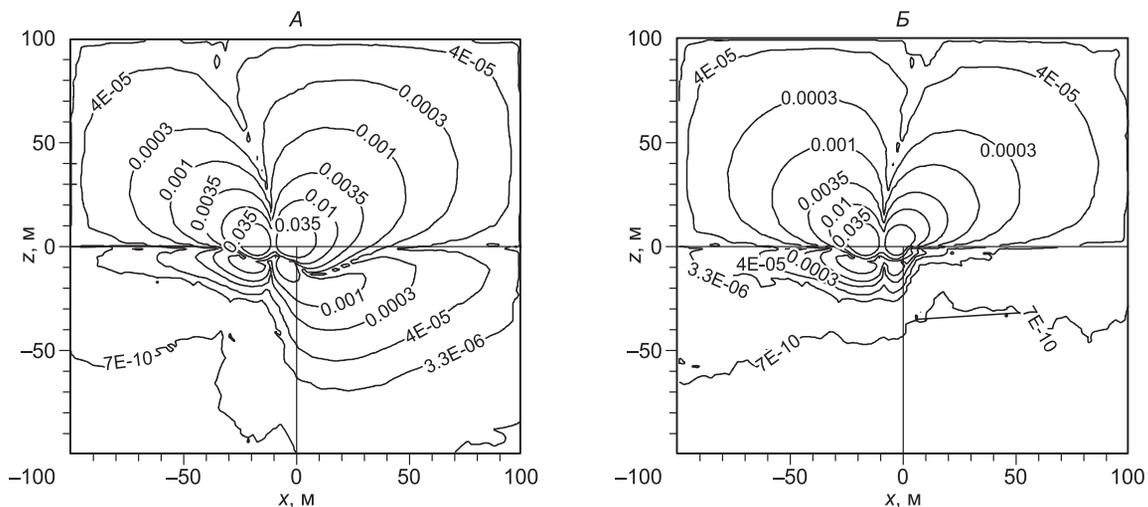


Рис. 9. $|\mathbf{E}|$ в сечении $y = 0, \sigma_2 = 0.01$ См/м, $t = 3$ мкс (А) и $y = 0, \sigma_2 = 1$ См/м, $t = 3$ мкс (Б).

Рис. 10. Разрыв компоненты E_x на границе под областей с различной электропроводностью.

токового импульса $t = 3$ мкс. Видно, что при различных значениях электропроводности графики ЭДС незначительно отличаются друг от друга.

На рис. 11, *Б* показана ЭДС в приемном витке, расположенном в точке $(10; 0; 1)$, при тех же значениях электропроводности. Видно, что в этом случае графики сильно отличаются друг от друга.

На рис. 12 показаны результаты расчетов, когда электропроводность в правой подобласти зависит от времени по закону $\sigma = (0.09e^{-t/\tau} + 0.01)$ См/м, $\tau = 1$ мкс. Для сравнения приведены графики для постоянной электропроводности 0.01 и 0.1 См/м.

Также были проведены расчеты для области, в которой одна из подобластей представляет собой выклинивающийся слой (рис. 13). Приемный виток расположен в точке $(10; 0; 1)$, электропроводность в выклинивающемся слое постоянна и равна 0.01 См/м. На рис. 14 показана ЭДС в приемном витке для выклинивающегося слоя и два графика для области с вертикальной границей и постоянной электропроводностью в правой подобласти $\sigma = 0.1; 0.01$ См/м.

Временная дисперсия диэлектрической проницаемости. Рассмотрим распространение электромагнитного поля в среде с коаксиальными цилиндрическими границами. Расчетная область и модель показаны на рис. 15, 16. Среда состоит из трех подобластей: скважины (электропроводность бурового раствора $\sigma_1 = 1$ См/м, относительная диэлектрическая проницаемость $\epsilon_1 = 1$), зоны проникновения ($\sigma_2 = 0.5$ См/м, ϵ_2 зависит от времени) и пласта ($\sigma_3 = 0.01$ См/м, $\epsilon_3 = 1$). Генераторный виток имеет диаметр 0.08 м и смещен на 0.05 м относительно центра области в отрицательном направлении оси z . Приемные витки имеют такой же диаметр и также смещены по вертикали. Расстояние от генераторного витка до первого приемного равно 0.1 м, расстояние между приемными витками равно 0.01 м.

Поле в среде возбуждается токовым импульсом, показанным на рис. 17.

На рис. 18 показана ЭДС в первом приемном витке при нескольких постоянных значениях относительной диэлектрической проницаемости в зоне проникновения: $\epsilon_2 = 1; 30; 50$. На рис. 19 показана ЭДС в случае, когда относительная диэлектрическая проницаемость зависит от времени по закону $\epsilon_2 = 49(1 - e^{-t/\tau}) + 1$. Видно, что график с зависимостью от времени лежит между соответствующими графиками для постоянных значений ϵ_2 .

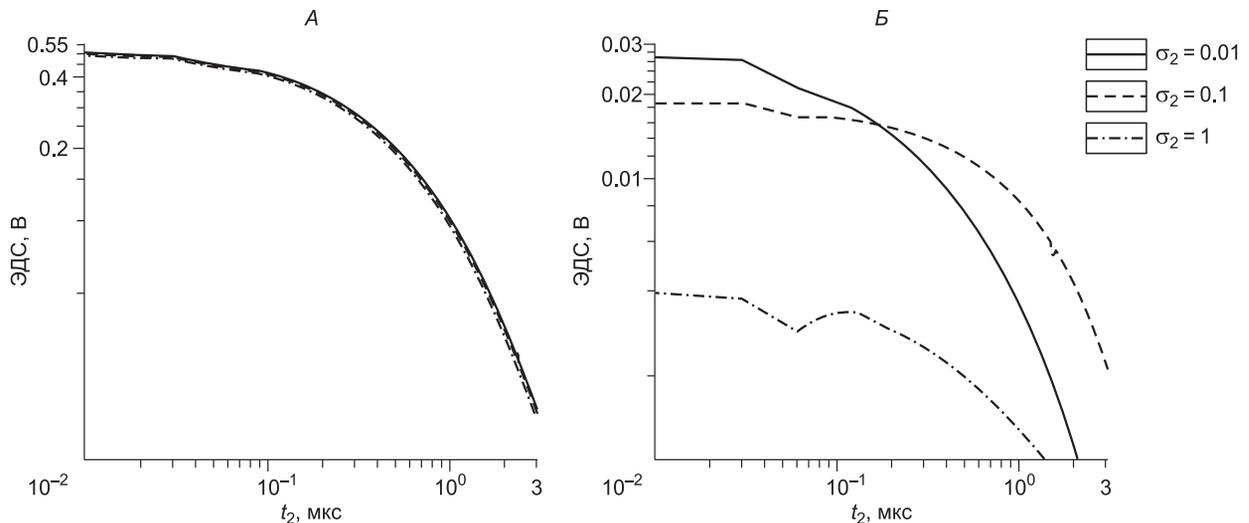
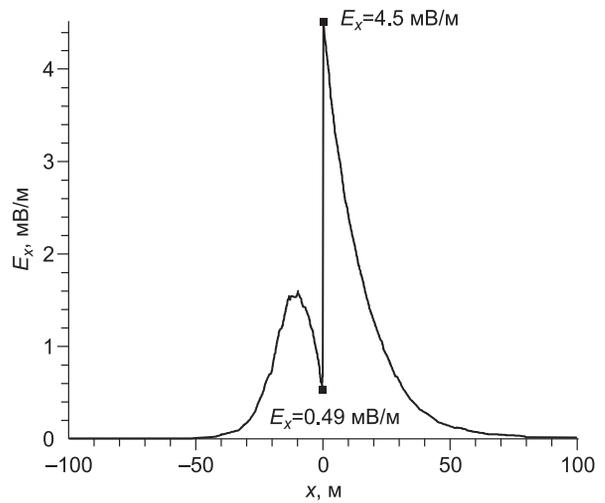


Рис. 11. ЭДС в приемном витке, расположенном в точках: $(-10; 0; 1)$ – А и $(10; 0; 1)$ – Б.

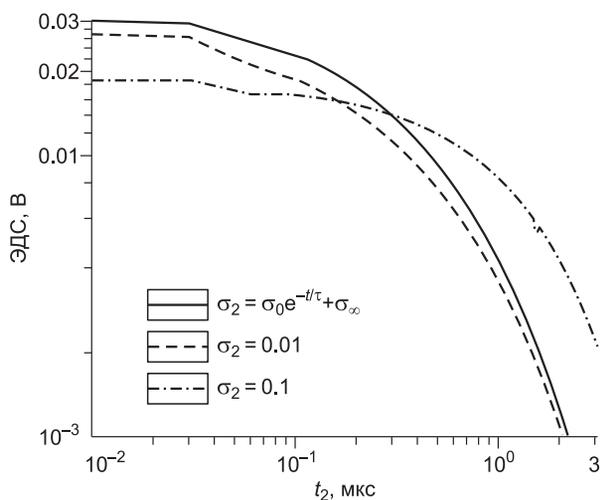


Рис. 12. σ_2 зависит от времени, $\sigma_0 = 0.09$ См/м, $\sigma_\infty = 0.01$ См/м, $\tau = 1$ мкс.

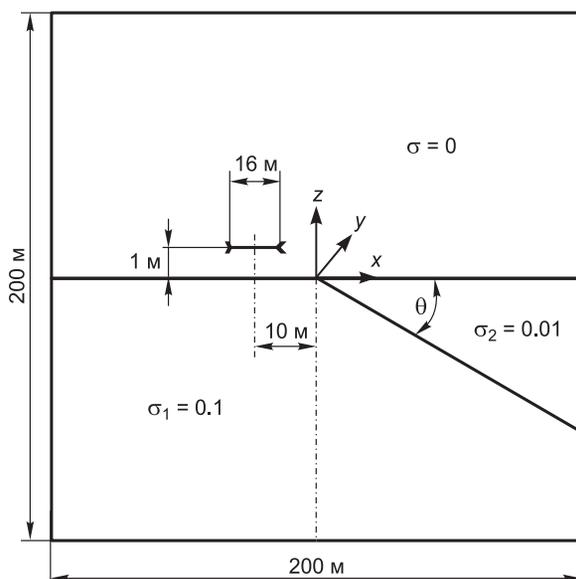


Рис. 13. Расчетная область с выклинивающимся слоем, $\theta = 30^\circ$.

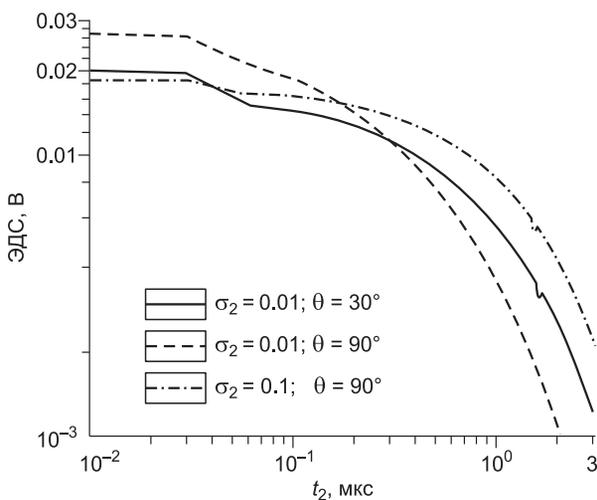


Рис. 14. ЭДС в приемном витке, выклинивающийся слой.

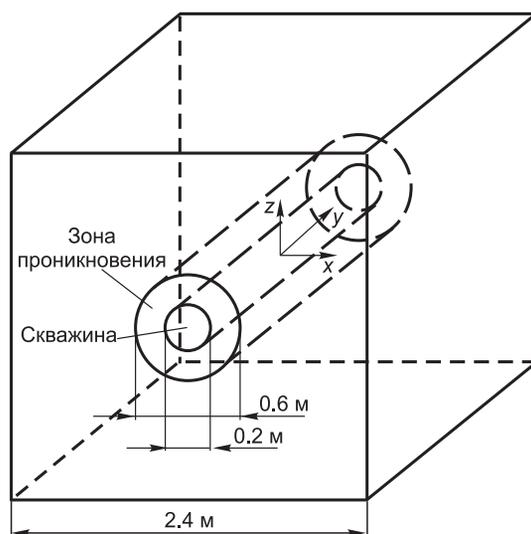


Рис. 15. Расчетная область.

На рис. 20, 21 показана ЭДС в обоих приемных витках при постоянных и зависящих от времени значениях диэлектрической проницаемости в зоне проникновения. Видно, что ЭДС во втором витке во всех случаях меньше и немного смещена вправо по сравнению с первым витком.

На рис. 22 показано распределение $|\mathbf{E}|$ (В/м) в сечении $z = 0$ для значений относительной диэлектрической проницаемости в зоне проникновения $\epsilon_2 = 1$ и $\epsilon_2 = 50$ при $t = 3.16$ нс. Видно, что при большем значении ϵ электрическое поле затухает на меньшем расстоянии.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе представлены результаты численного моделирования при помощи векторного метода конечных элементов распространения электромагнитного поля в средах с временной дисперсией электропроводности и диэлектрической проницаемости. Электромагнитное поле возбуждается индукционным источником. Предложен метод аппроксимации этого источника для метода конечных элементов, не требующий построения сетки внутри него. Полученные результаты включают в себя численные решения в нескольких областях с разрывными и зависящими от времени коэффициентами электропроводности и диэлектрической проницаемости.

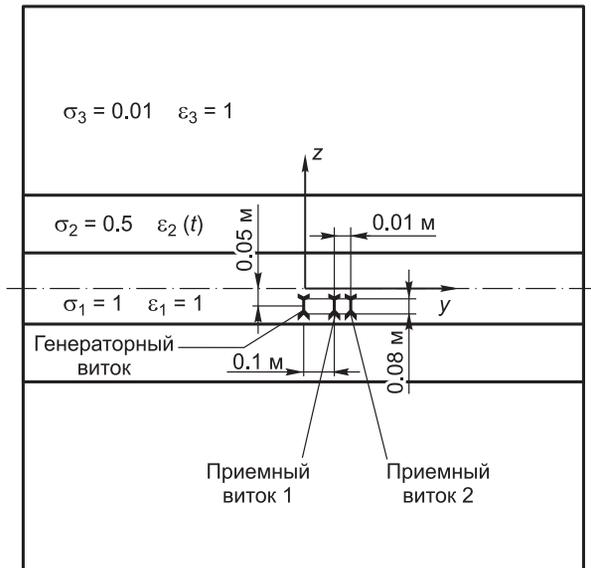


Рис. 16. Модель среды и установка.

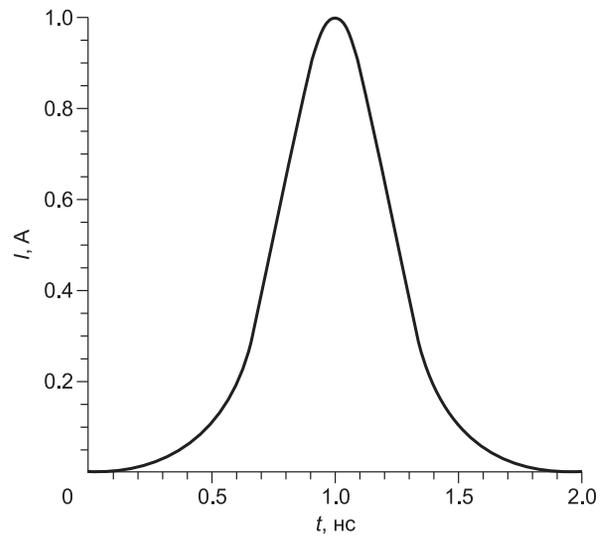


Рис. 17. Токвый импульс.

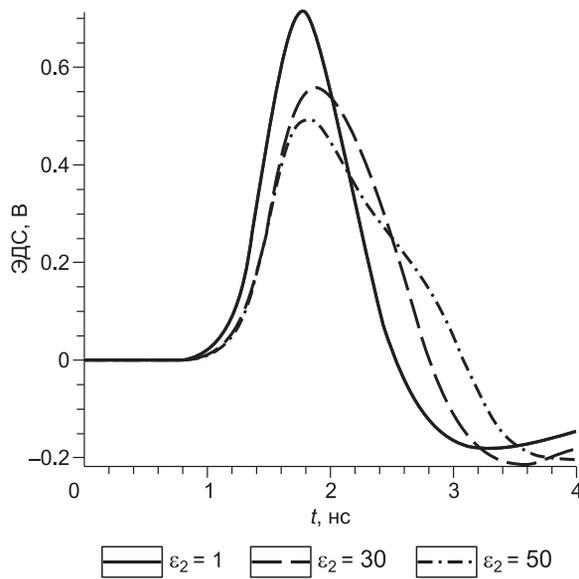


Рис. 18. ЭДС в первом приемном витке при различных постоянных значениях диэлектрической проницаемости.

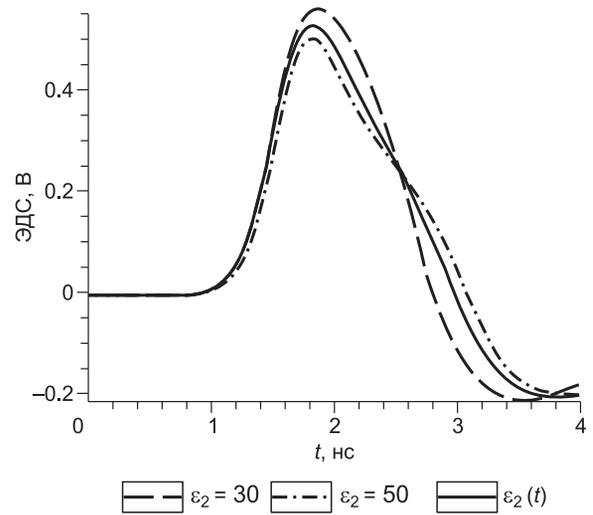


Рис. 19. ЭДС в первом приемном витке при зависимости диэлектрической проницаемости от времени.

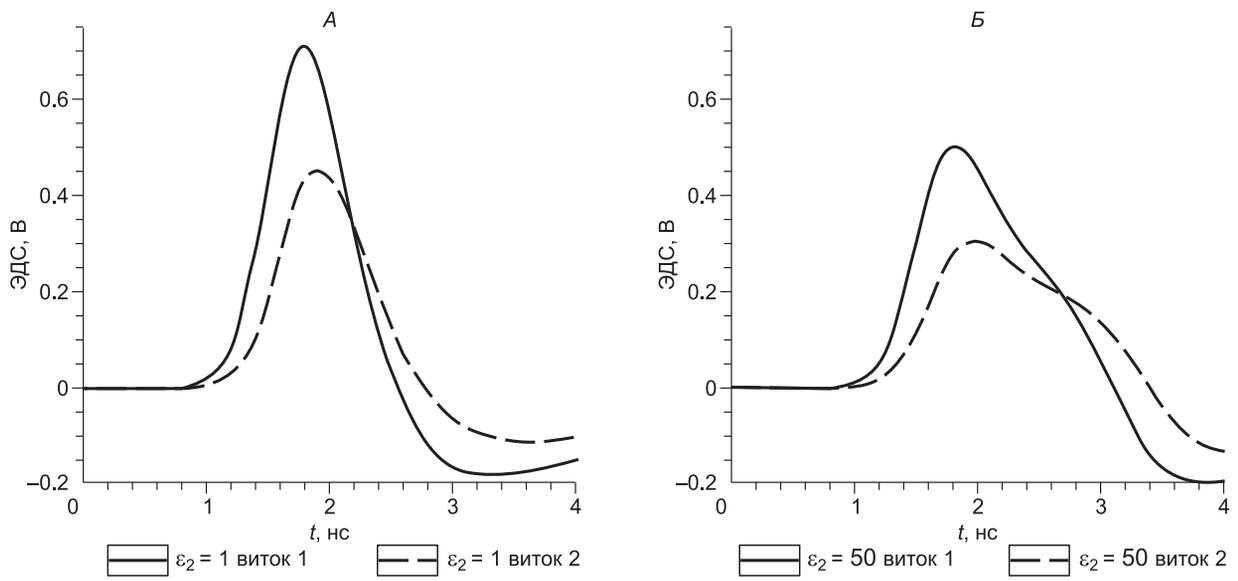


Рис. 20. ЭДС в приемных витках при $\epsilon_2 = 1$ (А) и при $\epsilon_2 = 50$ (Б).

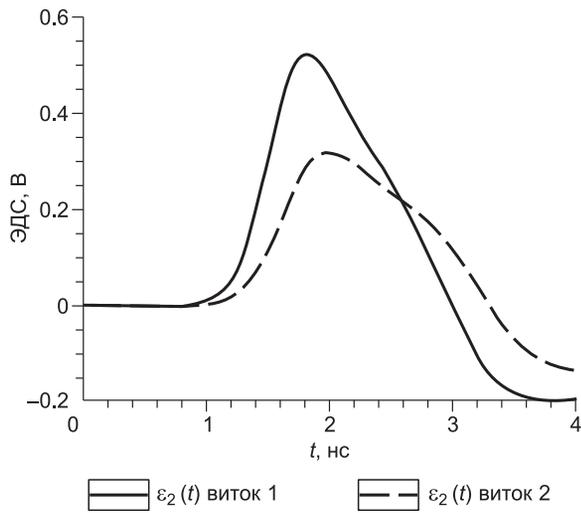


Рис. 21. ЭДС в приемных витках при зависимости ϵ_2 от времени.

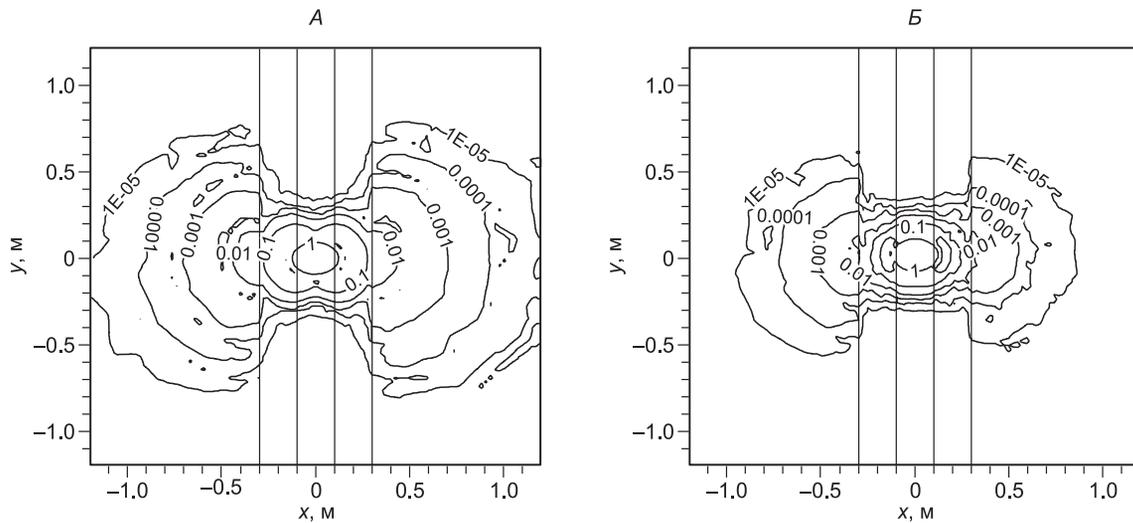


Рис. 22. $|E|$ в сечении $z = 0$, $\epsilon_2 = 1$, $t = 3.16$ нс (А) и $z = 0$, $\epsilon_2 = 50$, $t = 3.16$ нс (Б).

ЛИТЕРАТУРА

Джордж А., Лю Дж. Численное решение больших разреженных систем уравнений. М., Мир, 1984, 333 с.

Светов Б.С. Основы геоэлектрики. М., Изд-во ЛКИ, 2008, 656 с.

Cole K.S., Cole R.H. Dispersion and absorption in dielectrics. Alternating current characteristics // J. Chem. Phys., 1941, v. 9, № 4, p. 341—351.

Nedelek J. A new family of mixed finite elements in R³ // Numer. Math., 1986, v. 50, p. 57—81.

Paige C., Saunders M. Solution of sparse indefinite systems of linear equations // SIAM J. Numer. Anal., 1975, v. 12, p. 617—629.

Solin P. Partial differential equations and finite element method. John Wiley & Sons, Inc., 2005, 504 p.

Solin P., Segeth K., Dolezel I. Higher-order finite element methods. Chapman & Hall/CRC Press, 2003, 408 p.

Webb J. Hierarchical vector basis functions of arbitrary order for triangular and tetrahedral finite elements // IEEE Trans. Ant. Prop., 1999, v. 47, № 8, p. 1244—1253.

Рекомендована к печати 29 апреля 2009 г.

А.Д. Дучковым

Поступила в редакцию 28 августа 2008 г.,

после доработки — 12 марта 2009 г.