

ЛИТЕРАТУРА

1. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1971, т. 35, вып. 4, с. 638—655.
2. Андрейчиков И. П., Юдович В. И. Об автоколебательных режимах, ответвляющихся от течения Пуазейля в плоском канале.— «Докл. АН СССР», 1972, т. 202, № 4, с. 791—794.
3. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М., «Наука», 1969, с. 742.
4. Гольдштик М. А., Саножников В. А., Штерн В. Н. Локальные свойства задачи гидродинамической устойчивости.— ПМТФ, 1970, № 2, с. 56—61.

УДК 532.516

**РАСЧЕТ АВТОКОЛЕБАНИЙ ТИПА АЗИМУТАЛЬНЫХ ВОЛН,
ВОЗНИКАЮЩИХ ПРИ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ТЕЧЕНИЯ
ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ
МЕЖДУ КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ЦИЛИНДРАМИ,
ВРАЩАЮЩИМИСЯ В РАЗНЫЕ СТОРОНЫ**

А. Л. Уринцев

(Ростов-на-Дону)

Методом Ляпунова — Шмидта на основе уравнений Навье — Стокса исследован характер потери устойчивости течения Куэтта между цилиндрами при переходе числа Рейнольдса через критическое значение. Рассмотрен случай вращения цилиндров в разные стороны при таком соотношении угловых скоростей, когда роль наиболее опасных возмущений переходит от вращательно-симметричных к невращательно-симметричным возмущениям. Ответвляющиеся нестационарные вторичные течения (автоколебания) разыскиваются в виде волн, бегущих по азимуту; продольное волновое число α и азимутальное число m предполагаются заданными. Для случая $m = 1$ рассчитаны амплитуда автоколебаний и скорость волн и показано, что в зависимости от значения α возможно как мягкое возбуждение устойчивых, так и жесткое — неустойчивых автоколебаний, причем волновому числу α , для которого критическое число Рейнольдса минимально, соответствует устойчивый волновой режим, существующий в закритической области.

Линейная задача устойчивости кругового течения вязкой жидкости относительно невращательно-симметричных возмущений рассматривалась в работах [1—3]. Ди Прима [1] численно решал задачу методом Галеркина, ограничиваясь случаем, когда зазор мал и цилиндры вращаются в одну сторону. Анализ Ди Прима распространен в работе [2] на случай цилиндров, вращающихся в разные стороны, а в работе [3] — на случай немалых зазоров. Нелинейная задача устойчивости рассмотрена в [4], где для фиксированного $\alpha = 3$ и вращающихся в разные стороны цилиндров рассчитано осесимметричное стационарное вторичное течение — вихри Тейлора. Образование азимутальных волн в жидкости между цилиндрами подробно исследовалось в экспериментах Коулза [5].

1. Постановка задачи. Пусть вязкая несжимаемая жидкость плотности ρ и кинематической вязкости ν заполняет пространство между двумя соосными цилиндрами, которые имеют радиусы r_1 и r_2 ($r_1 < r_2$) и вращаются с угловыми скоростями соответственно Ω_1 и Ω_2 . Примем за единицы длины, времени и массы величины $r_2 - r_1$, $(r_2 - r_1)^2 / \nu$, $(r_2 - r_1)^3 / \rho$ и введем безразмерные параметры: $Re = \Omega_1 r_1 (r_2 - r_1) / \nu$ — число Рейнольдса; $\mu = \Omega_2 / \Omega_1$

и $\xi = r_1/(r_2 - r_1)$ — геометрический параметр. Безразмерные уравнения движения жидкости, взятые в форме Громека — Ламба

$$(1.1) \quad \mathbf{v}'_t + \boldsymbol{\omega}' \times \mathbf{v}' + \text{grad } h' + \text{rot } \boldsymbol{\omega}' = 0, \quad \boldsymbol{\omega}' = \text{rot } \mathbf{v}', \quad \text{div } \mathbf{v}' = 0,$$

допускают в цилиндрической системе координат r, θ, z известное решение

$$(1.2) \quad \mathbf{v}' = \text{Re } \mathbf{V}, \quad \boldsymbol{\omega}' = \text{Re } \boldsymbol{\Omega}, \quad h' = h_0(r) = 0,5V_\theta^2 + \int V_\theta^2/r dr, \\ \mathbf{V} = (0, V_\theta, 0), \quad \boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega_z), \quad V_\theta = ar + b/r, \quad \Omega_z = 2a, \\ a = (\mu(1 + \xi)^2/\xi - \xi)/(1 + 2\xi), \quad b = \xi(1 - \mu)(1 + \xi)^2/(1 + 2\xi),$$

соответствующее ламинарному круговому течению Куэтта. Интересуясь периодическими по времени режимами течения, отвечающими от решения (1.2), положим в (1.1)

$$\mathbf{v}' = \text{Re } \mathbf{V} + \mathbf{v}(r, \tau, z), \quad \boldsymbol{\omega}' = \text{Re } \boldsymbol{\Omega} + \boldsymbol{\omega}(r, \tau, z), \quad h' = h_0 + h(r, \tau, z),$$

где $\tau = \theta - ct$ (c — неизвестная скорость азимутальных волн), и придем, заменяя $\partial/\partial\theta \rightarrow \partial/\partial\tau$, $\partial/\partial t \rightarrow -c\partial/\partial\tau$, к нелинейной задаче на собственные значения

$$(1.3) \quad -c\mathbf{v}_\tau + \text{Re}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{V}) + \text{grad } h + \text{rot } \boldsymbol{\omega} = \mathbf{v} \times \boldsymbol{\omega}, \\ \boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{v}, \quad \text{div } \mathbf{v} = 0,$$

ненулевое решение которой должно удовлетворять условию прилипания $v = 0$ ($r = \xi, 1 + \xi$) и иметь равный нулю поток скорости через поперечное сечение цилиндрической полости. Будем разыскивать такое решение, имеющее период $2\pi/m$ по τ и $2\pi/\alpha$ по z (m и α — заданные азимутальное и продольное волновые числа), для которого $v_r, v_\theta, h, \omega_z$ — четные, а $v_z, \omega_r, \omega_\theta$ — нечетные функции переменной z . Остальные решения могут быть получены из найденного посредством сдвига начала отсчета на оси цилиндров.

2. Метод Ляпунова — Шмидта. Разделение переменных. Для расчета автоколебательного вторичного течения воспользуемся методом Ляпунова — Шмидта [6, 7]. Полагая в (1.3)

$$(2.1) \quad (\mathbf{v}, h, \boldsymbol{\omega}) = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n (\mathbf{v}_n, h_n, \boldsymbol{\omega}_n), \quad c = \text{Re}_0 c_0/\xi + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n c_n,$$

где $\varepsilon = (\text{Re} - \text{Re}_0)^{1/2}$; Re_0 — критическое значение числа Рейнольдса; c_0 — вычисленная по линейной теории скорость азимутальных волн, отнесенная к угловой скорости вращения внутреннего цилиндра, приходим к серии линейных задач вида

$$(2.2) \quad \text{Re}_0(-c_0/\xi \mathbf{v}_{n\tau} + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_n + \boldsymbol{\omega}_n \times \mathbf{V}) + \text{grad } h_n + \text{rot } \boldsymbol{\omega}_n = \mathbf{f}_n, \\ \boldsymbol{\omega}_n = \text{rot } \mathbf{v}_n, \quad \text{div } \mathbf{v}_n = 0, \quad \mathbf{v}_n = 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi),$$

где \mathbf{f}_n — известные правые части. В частности,

$$\mathbf{f}_1 = 0, \quad \mathbf{f}_2 = \mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\omega}_1 + c_1 \mathbf{v}_{1\tau}, \quad \mathbf{f}_3 = c_1 \mathbf{v}_{2\tau} + c_2 \mathbf{v}_{1\tau} + \\ + \mathbf{v}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{v}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 - (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_1 + \boldsymbol{\omega}_1 \times \mathbf{V}).$$

При $n = 1$ получается линейная однородная задача для вычисления критических параметров Re_0 , c_0 и собственной функции. Введем обозначения

$$e_{k,s} = \exp i(km\tau + \alpha z), \quad \mathbf{W}_{k,s} = (\mathbf{v}^{(k,s)}(r), h^{(k,s)}(r), \omega^{(k,s)}(r))$$

и запишем решение в форме

$$(\mathbf{v}_1, h_1, \omega_1) = \beta(\mathbf{W}_{1,1}e_{1,1} + \bar{\mathbf{W}}_{1,1,1}\bar{e} + \mathbf{W}_{1,-1}e_{1,-1} + \bar{\mathbf{W}}_{1,-1}\bar{e}_{1,-1}),$$

где $\beta > 0$ — амплитуда автоколебаний [6], черта означает операцию комплексного сопряжения. Условия четности — нечетности по переменной z переходят в условия четности — нечетности по индексу s для соответствующих компонент вектора $\mathbf{W}_{k,s}$. Отделяя затем переменные τ, z и обозначая $\mathbf{W}_{1,1} = (\varphi, g, \gamma)$, получаем непосредственно из (2.2) при $n = 1$ замкнутую систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} D\varphi_r &= -(\varphi_r + im\varphi_\theta)/r - i\alpha\varphi_z, & D\varphi_\theta &= (im\varphi_r - \varphi_\theta)/r + \gamma_z, \\ D\varphi_z &= i\alpha\varphi_r - \gamma_\theta, & Dg &= \text{Re}_0(imc_0/\xi\varphi_r + \Omega_z\varphi_\theta + V_\theta\gamma_z) - im/r\gamma_z + i\alpha\gamma_\theta, \\ (2.3) \quad D\gamma_\theta &= \text{Re}_0(imc_0/\xi\varphi_z - V_\theta\gamma_r) - i\alpha g + (im\gamma_r - \gamma_\theta)/r, \\ D\gamma_z &= \text{Re}_0(\Omega_z\varphi_r - imc_0/\xi\varphi_\theta) + im/r g + i\alpha\gamma_r, \\ \gamma_r &= im/r\varphi_z - i\alpha\varphi_\theta, & D &= d/dx, \quad x = r - \xi, \end{aligned}$$

для которой ставится задача отыскания ненулевого решения, удовлетворяющего граничным условиям $\varphi_r = \varphi_\theta = \varphi_z = 0$ ($x = 0, 1$). Вводя удобную нормировку $\gamma_z = 0,25$ при $x = 0$, отметим, что при малых ε главная часть касательного напряжения $p_{r\theta}$ на внутреннем цилиндре осциллирует по закону $p_{r\theta} = \varepsilon\beta \cos \alpha z \cos m(\theta - \text{Re}_0 c_0/\xi t)$ с амплитудой $\varepsilon\beta$.

Для построения сопряженной задачи умножим скалярно первое уравнение из (2.2) при $n = 1$ на соленоидальный вектор Ψ , исчезающий при $r = \xi, 1 + \xi$ и удовлетворяющий тем же самым условиям периодичности. Затем проинтегрируем по области $\{\xi \leq r \leq 1 + \xi, 0 \leq \tau \leq 2\pi/m, 0 \leq z \leq 2\pi/\alpha\}$ с весом r и перебросим, используя интегрирование по частям, производные с $\mathbf{v}_1, h_1, \omega_1$ на Ψ . В результате приведем к сопряженной задаче

$$\begin{aligned} \text{Re}_0(c_0/\xi\Psi\tau + \Psi \times \Omega) + \text{grad } Q + \text{rot } \Lambda &= 0, \quad \text{div } \Psi = 0, \\ \text{rot } \Psi + \text{Re}_0 \mathbf{V} \times \Psi &= \Lambda, \quad \Psi = 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi), \end{aligned}$$

которая после отделения переменных τ, z

$$(\Psi, Q, \Lambda) = (\psi, q, \lambda)e_{1,1}$$

сводится к обыкновенным дифференциальным уравнениям

$$\begin{aligned} D\psi_r &= -(\psi_r + im\psi_\theta)/r - i\alpha\psi_z, & D\psi_\theta &= (im\psi_r - \psi_\theta)/r + \text{Re}_0 V_\theta\psi_r + \lambda_z, & D\psi_z &= \\ &= i\alpha\psi_r - \lambda_\theta, & Dq &= -im \text{Re}_0 c_0/\xi\psi_r - \text{Re}_0 \Omega_z\psi_\theta - im/r\lambda_z + i\alpha\lambda_\theta, \\ (2.4) \quad D\lambda_\theta &= -im \text{Re}_0 c_0/\xi\psi_z - i\alpha q + (im\lambda_r - \lambda_\theta)/r, \\ D\lambda_z &= im \text{Re}_0 c_0/\xi\psi_\theta - \text{Re}_0 \Omega_z\psi_r + im/r q + i\alpha\lambda_r, \\ \lambda_r &= (im/r + \text{Re}_0 V_\theta)\psi_z - i\alpha\psi_\theta \end{aligned}$$

с граничными условиями $\psi_r = \psi_\theta = \psi_z = 0$ ($x = 0, 1$) и дополнительным условием нормировки $\lambda_z = 0,25$ ($x = 0$). Условие разрешимости неоднородных задач (2.2), имеющее вид

$$(2.5) \quad \int_0^{2\pi/\alpha} \int_0^{2\pi/m} \int_{\xi}^{1+\xi} (\mathbf{f}_n, \Psi) \bar{e}_{1,1} r dr d\tau dz = 0 \quad (n = 2, 3, 4, \dots),$$

позволяет заключить при $n = 2$, что $c_1 = 0$, если величина

$$I_1 = \int_{\xi}^{1+\xi} (\Phi, \Psi) r dr$$

отлична от нуля. Предполагая это условие выполненным, ищем решение задачи (2.2) при $n = 2$ в соответствии с видом правой части \mathbf{f}_2 в форме

$$(2.6) \quad (\mathbf{v}_2, h, \omega_2) = \beta^2 (W_{0,0} e_{0,0} + W_{2,2} e_{2,2} + \bar{W}_{2,2} \bar{e}_{2,2} + W_{2,-2} e_{2,-2} + \bar{W}_{2,-2} \bar{e}_{2,-2} + W_{2,0} e_{2,0} + \bar{W}_{2,0} \bar{e}_{2,0} + W_{0,2} e_{0,2} + \bar{W}_{0,2} \bar{e}_{0,2}),$$

где предполагается, что компоненты векторов $W_{h,s}$ имеют ту же четность по индексу s , какая была по z до разделения переменных. Заметим, что в правую часть равенства (2.6) следовало бы добавить решение линейной однородной задачи с некоторым числовым множителем β' , однако, как доказано в [7] для общего случая ветвления, $\beta' = 0$. Свойство четности — нечетности по второму индексу позволяет ограничиться нахождением только четырех вектор-функций: $W_{0,0}$, $W_{2,2}$, $W_{2,0}$, $W_{0,2}$. Компоненты первой удовлетворяют уравнениям

$$(2.7) \quad \begin{aligned} Dv_\theta^{(0,0)} &= \omega_z^{(0,0)} - v_\theta^{(0,0)}/r, \quad D\omega_z^{(0,0)} = -A_\theta^{(0,0)}, \quad v_\theta^{(0,0)} = 0 \quad (x = 0, 1), \\ Dh^{(0,0)} &= \text{Re}_0 (\Omega_z v_\theta^{(0,0)} + V_\theta \omega_z^{(0,0)}) + A_r^{(0,0)}, \quad v_r^{(0,0)} = v_z^{(0,0)} = \\ &= \omega_r^{(0,0)} = \omega_\theta^{(0,0)} \equiv 0, \\ (A_r^{(0,0)}, A_\theta^{(0,0)}, 0) &= \mathbf{v}^{(1,1)} \times \bar{\omega}^{(1,1)} + \bar{\mathbf{v}}^{(1,1)} \times \omega^{(1,1)} + \mathbf{v}^{(1,-1)} \times \\ &\times \bar{\omega}^{(1,-1)} + \bar{\mathbf{v}}^{(1,-1)} \times \omega^{(1,-1)}. \end{aligned}$$

Произвольную постоянную в определении полного давления удобно зафиксировать, положив $h^{(0,0)} = 0$ ($x = 1$).

Для компонент вектора $W_{2,2}$ получаем задачу

$$(2.8) \quad \begin{aligned} Dv_r^{(2,2)} &= -(v_r^{(2,2)} + 2imv_\theta^{(2,2)})/r - 2i\alpha v_z^{(2,2)}, \\ Dv_\theta^{(2,2)} &= (2imv_r^{(2,2)} - v_\theta^{(2,2)})/r + \omega_z^{(2,2)}, \\ Dv_z^{(2,2)} &= 2i\alpha v_r^{(2,2)} - \omega_\theta^{(2,2)}, \quad Dh^{(2,2)} = 2im \text{Re}_0 c_0 / \xi v_r^{(2,2)} + \text{Re}_0 (\Omega_z v_\theta^{(2,2)} + \\ &+ V_\theta \omega_z^{(2,2)}) - 2im/r \omega_z^{(2,2)} + 2i\alpha \omega_\theta^{(2,2)} + A_r^{(2,2)}, \\ D\omega_\theta^{(2,2)} &= 2im \text{Re}_0 c_0 / \xi v_z^{(2,2)} - \text{Re}_0 V_\theta \omega_r^{(2,2)} - 2i\alpha h^{(2,2)} + (2im\omega_r^{(2,2)} - \\ &- \omega_\theta^{(2,2)})/r + A_z^{(2,2)}, \\ D\omega_z^{(2,2)} &= -2im \text{Re}_0 c_0 / \xi v_\theta^{(2,2)} + \text{Re}_0 \Omega_z v_r^{(2,2)} + 2im/r h^{(2,2)} + \\ &+ 2i\alpha \omega_r^{(2,2)} - A_\theta^{(2,2)}, \\ \omega_r^{(2,2)} &= 2im/r v_z^{(2,2)} - 2i\alpha v_\theta^{(2,2)}, \quad A^{(2,2)} = \mathbf{v}^{(1,1)} \times \omega^{(1,1)}, \quad v_r^{(2,2)} = v_\theta^{(2,2)} = \\ &= v_z^{(2,2)} = 0 \quad (x = 0, 1). \end{aligned}$$

Составляющие вектора $W_{2,0}$ находим, решая задачу

$$(2.9) \quad \begin{aligned} Dv_r^{(2,0)} &= -(v_r^{(2,0)} + 2imv_\theta^{(2,0)})/r, \\ Dv_\theta^{(2,0)} &= (2imv_r^{(2,0)} - v_\theta^{(2,0)})/r + \omega_z^{(2,0)}, \\ Dh^{(2,0)} &= 2im \operatorname{Re}_0 c_0 / \xi v_r^{(2,0)} + \operatorname{Re}_0 (\Omega_z v_\theta^{(2,0)} + V_\theta \omega_z^{(2,0)}) - 2im/r \omega_z^{(2,0)} + A_r^{(2,0)}, \\ D\omega_z^{(2,0)} &= -2im \operatorname{Re}_0 c_0 / \xi v_\theta^{(2,0)} + \operatorname{Re}_0 \Omega_z v_z^{(2,0)} + 2im/r h^{(2,0)} - A_\theta^{(2,0)}, \\ \omega_r^{(2,0)} = \omega_\theta^{(2,0)} = v_z^{(2,0)} &\equiv 0, (A_r^{(2,0)}, A_\theta^{(2,0)}, 0) = \mathbf{v}^{(1,1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(1,-1)} + \\ &+ \mathbf{v}^{(1,-1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(1,1)} \end{aligned}$$

с граничными условиями $v_r^{(2,0)} = v_\theta^{(2,0)} = 0$ ($x = 0, 1$). Для компонент вектора $W_{0,2}$ получаем уравнения

$$(2.10) \quad \begin{aligned} Dv_r^{(0,2)} &= -v_r^{(0,2)}/r - 2i\alpha v_z^{(0,2)}, Dv_\theta^{(0,2)} = -v_\theta^{(0,2)}/r + \omega_z^{(0,2)}, \\ Dv_z^{(0,2)} &= 2i\alpha v_r^{(0,2)} - \omega_\theta^{(0,2)}, Dh^{(0,2)} = \operatorname{Re}_0 (\Omega_z v_\theta^{(0,2)} + V_\theta \omega_z^{(0,2)}) + \\ &+ 2i\alpha \omega_\theta^{(0,2)} + A_r^{(0,2)}, \\ D\omega_\theta^{(0,2)} &= -\operatorname{Re}_0 V_\theta \omega_r^{(0,2)} - 2i\alpha h^{(0,2)} - \omega_\theta^{(0,2)}/r + A_z^{(0,2)}, \\ D\omega_z^{(0,2)} &= \operatorname{Re}_0 \Omega_z v_r^{(0,2)} + 2i\alpha \omega_r^{(0,2)} - A_\theta^{(0,2)}, \omega_r^{(0,2)} = -2i\alpha v_\theta^{(0,2)}, \\ A^{(0,2)} &= \mathbf{v}^{(1,1)} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}^{(1,-1)} + \bar{\mathbf{v}}^{(1,-1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(1,1)}, v_r^{(0,2)} = v_\theta^{(0,2)} = v_z^{(0,2)} = 0 \quad (x=0,1), \end{aligned}$$

причем оказывается, что величины $v_r^{(0,2)}$, $v_\theta^{(0,2)}$, $h^{(0,2)}$, $\omega_z^{(0,2)}$ вещественные, а $v_z^{(0,2)}$, $\omega_r^{(0,2)}$, $\omega_\theta^{(0,2)}$ чисто мнимые. Полагая в условии разрешимости (2.5) $n = 3$, приходим к уравнению для определения вещественных постоянных β и c_2

$$imc_2 I_1 + \beta^2 I_2 = I_3,$$

$$I_2 = \int_{\xi}^{1+\xi} (\chi, \Psi) r dr, \quad I_3 = \int_{\xi}^{1+\xi} (\Omega \times \varphi + \gamma \times \mathbf{V}, \Psi) r dr,$$

$$\begin{aligned} \chi &= \mathbf{v}^{(1,1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(0,0)} + \bar{\mathbf{v}}^{(1,1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(2,2)} + \mathbf{v}^{(1,-1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(0,2)} + \bar{\mathbf{v}}^{(1,-1)} \times \boldsymbol{\omega}^{(2,0)} + \\ &+ \mathbf{v}^{(0,0)} \times \boldsymbol{\omega}^{(1,1)} + \mathbf{v}^{(2,2)} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}^{(1,1)} + \mathbf{v}^{(0,2)} \times \boldsymbol{\omega}^{(1,-1)} + \mathbf{v}^{(2,0)} \times \bar{\boldsymbol{\omega}}^{(1,-1)}, \end{aligned}$$

откуда находим

$$\beta^2 = d_1 \equiv \operatorname{Real} (I_3 \bar{I}_1) / \operatorname{Real} (I_1 \bar{I}_2), \quad c_2 = d_2 \equiv \operatorname{Im} (I_3 \bar{I}_2) / m \operatorname{Real} (I_1 \bar{I}_2).$$

Если постоянная d_1 больше нуля, то автоколебание отвечается при $\operatorname{Re} > \operatorname{Re}_0$ (сверхкритическое автоколебание). При $d_1 < 0$ формула для β^2 становится противоречивой. В этом случае следует рассмотреть докритические значения числа Рейнольдса, положив при выводе цепочки уравнений (2.2) $\bar{\operatorname{Re}} = \operatorname{Re}_0 - \varepsilon^2$, вследствие чего $I_3 \rightarrow -I_3$. Это даст правильное значение квадрата амплитуды, соответствующее теперь докритическим автоколебаниям. Оба варианта ветвления можно описать одновременно, если вычислять константы d_1 , d_2 , исходя из предположения $\operatorname{Re} = \operatorname{Re}_0 + \varepsilon^2$, а затем положить

$$\beta = |d_1|^{1/2}, \quad c_2 = d_2 \operatorname{sgn} d_1, \quad \operatorname{Re} = \operatorname{Re}_0 + \varepsilon^2 \operatorname{sgn} d_1.$$

Для исследования устойчивости кругового течения Куэтта и ответвившегося автоколебания воспользуемся методом линеаризации (законность линеаризации в задачах устойчивости стационарных и периодических движений жидкости доказана в работах [8—10]). Это приводит к спектральной задаче

$$\begin{aligned} \sigma \mathbf{u} - \text{Re}_0 c_0 / \xi \mathbf{u}_\tau + \text{Re} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} + \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{V}) + \text{grad } p + \text{rot rot } \mathbf{u} &= 0, \\ \text{div } \mathbf{u} = 0, \mathbf{u} = 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi) \end{aligned}$$

для течения Куэтта и к задаче

$$\begin{aligned} \sigma' \mathbf{u}' - c \mathbf{u}'_\tau + \text{Re} (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}' + \text{rot } \mathbf{u}' \times \mathbf{V}) + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}' + \text{rot } \mathbf{u}' \times \mathbf{v} + \text{grad } p' + \\ + \text{rot rot } \mathbf{u}' = 0, \text{div } \mathbf{u}' = 0, \mathbf{u}' = 0 \quad (r = \xi, 1 + \xi) \end{aligned}$$

для автоколебательного режима. Здесь c , \mathbf{v} и $\boldsymbol{\omega}$ определены согласно (2.1). Применяя при числах Рейнольдса, близких к критическому, метод возмущений [7], находим собственные значения σ , σ'

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \sigma = \sigma_2 (\text{Re} - \text{Re}_0) + 0 (|\text{Re} - \text{Re}_0|^2), \quad \sigma' = \sigma'_2 \varepsilon^2 + 0 (\varepsilon^4), \\ \sigma_2 = -I_3 / I_1, \quad \text{Real } \sigma'_2 = -\text{Real } \sigma_2 \text{sgn } d_1, \quad \text{Re} = \text{Re}_0 + \varepsilon^2 \text{sgn } d_1, \end{aligned}$$

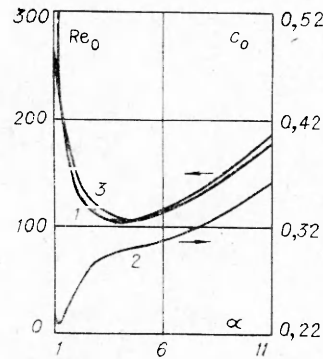
по вещественной части которых можно судить об устойчивости соответствующего течения.

Пусть выполнены условия

$$(2.12) \quad \text{Real } \sigma_2 > 0, \quad \text{Real} (I_3 \bar{I}_1) \neq 0, \quad \text{Real} (I_1 \bar{I}_2) \neq 0,$$

тогда на основании теорем 2.2 и 3.1 работ [6, 7] можно утверждать, что при $\text{Re} > \text{Re}_0$ течение Куэтта теряет устойчивость и что в точке $\text{Re} = \text{Re}_0$ от него ответвляется автоколебательный режим, имеющий вид волн, бегущих по азимуту. Ответвление цикла происходит в закритическую область $\text{Re} > \text{Re}_0$, если $d_1 > 0$ или докритическую $\text{Re} < \text{Re}_0$, если $d_1 < 0$. При этом, как видно из (2.11), сверхкритические автоколебания устойчивы, а докритические — неустойчивы.

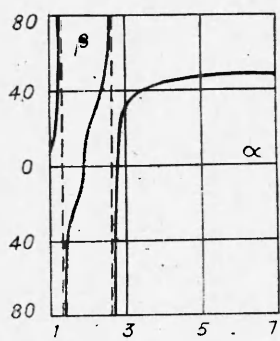
3. Результаты расчетов. Вычисления вторичного волнового режима были проведены на ЭВМ «ODRA-1204» для моды $m = 1$ при фиксированных значениях параметров $\xi = 1$, $\mu = -0,45$ и различных продольных волновых числах $1 \leq \alpha \leq 7$ (в общей сложности в 58 точках). Предварительно с помощью прямого численного интегрирования задачи (2.3) были найдены с высокой точностью критические значения параметров Re_0 , c_0 для $m = 1$ и $m = 0$. Применялся принцип движения по параметру α в сочетании с методом Ньютона для решения системы двух трансцендентных уравнений с использованием аппроксимации частных производных конечными разностями. Результаты расчетов приведены на фиг. 1, где цифрами 1 и 2 обозначены кривые $\text{Re}_0(\alpha)$ и $c_0(\alpha)$ при $m = 1$; цифрой 3 помечена нейтральная кривая $\text{Re}_0(\alpha)$, соответствующая вращательно-симметричным возмущениям с $m = 0$, $c_0 \equiv 0$. Как видно из фиг. 1, при выбранном отношении угловых скоростей цилиндров невращательно-симметричные воз-



Фиг. 1

мущения оказываются опаснее вращательно-симметричных: на кривой 1 ($m = 1$) минимум достигается в точке $\alpha = 3,93$, $Re_0 = 103,52$, а на кривой 3 ($m = 0$) — в точке $\alpha = 4,51$, $Re_0 = 105,95$. После нахождения собственных значений Re_0, c_0 проводилось решение краевых задач (2.3), (2.4), (2.7)–(2.10) и вычислялись величины β , c_2 , σ_2 , $Real \sigma_2$.

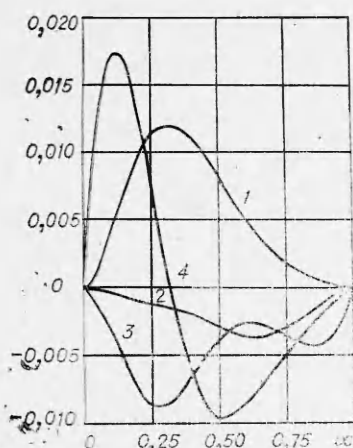
Одновременно с этим проверялось выполнение условий (2.12). Для решения всех краевых задач ввиду небольшой величины чисел Рейнольдса применялся метод линейной комбинации частных решений, полученных путем интегрирования нескольких задач Коши из точки $x = 1$ к точке



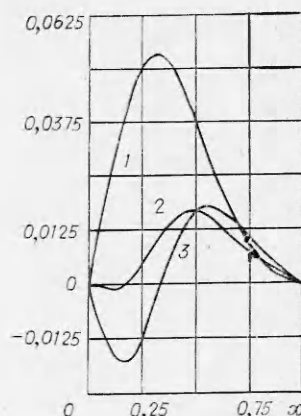
Фиг. 2

Зависимость постоянной β от числа α представлена графически на фиг. 2, где ниже оси α в целях наглядности условно отложены положительные значения β , соответствующие докритическим автоколебаниям. График имеет две асимптоты вида $\alpha = \alpha_a$, при приближении к которым постоянная β неограниченно возрастает $\beta \sim \text{const} |\alpha - \alpha_a|^{-1/2}$, в двух точках $\alpha = \alpha_k$ ($k = 1, 2$) амплитуда обращается в нуль: $\beta \sim \text{const}_k |\alpha - \alpha_k|^{1/2}$ ($\alpha \rightarrow \alpha_k, k = 1, 2$). В этих четырех исключительных точках условия (2.12) не выполняются и разложения (2.1) теряют силу. Некоторые численные результаты содержатся в таблице, где звездочкой

α	Re_0	c_0	β	c_2	$Real \sigma_2$	$Im \sigma_2$
3,930	103,52	0,29672	43,31	0,303	0,4165	−0,3229
1,075	367,09	0,23007	7,846	0,236	0,0590	−0,2944
1,275	231,72	0,23042	40,53	−0,200	0,1028	−0,2816
1,325	215,89	0,23231	94,01	−2,15	0,1131	−0,2824
1,350	209,14	0,23333	115,2*	−3,88	0,1180	−0,2830
1,600	165,58	0,24428	24,87*	−0,472	0,1614	−0,2917
1,850	142,93	0,25472	11,45*	−0,492	0,1973	−0,3004
1,950	136,65	0,25857	13,66	0,103	0,2103	−0,3034
2,300	121,58	0,27040	33,85	−0,077	0,2520	−0,3115
2,600	113,88	0,27852	65,74	−1,90	0,2847	−0,3159
2,700	111,99	0,28084	81,83*	−5,65	0,2952	−0,3170
2,800	110,38	0,28296	20,09*	−1,47	0,3055	−0,3179
3,000	107,82	0,28668	29,89	0,715	0,3258	−0,3192
5,000	106,95	0,30123	46,38	0,204	0,5139	−0,3320
6,600	120,66	0,30998	47,98	0,177	0,6389	−0,3584



Фиг. 3



Фиг. 4

отмечены числа, соответствующие докритическому случаю. В наиболее интересной точке нейтральной кривой — точке минимума, при переходе через которую происходит первая потеря устойчивости, ответвляется устойчивый периодический режим, имеет место мягкое возбуждение автоколебаний типа азимутальных волн с параметрами, приведенными в первой строке таблицы. Графики некоторых компонент решения, соответствующего числам этой строки, представлены на фиг. 3 (1 — $\text{Real } \varphi_r$, 2 — $\text{Im } \varphi_r$, 3 — $\text{Real } \varphi_z$, 4 — $\text{Im } \varphi_z$) и фиг. 4 (1 — $\text{Real } \varphi_\theta$, 2 — $\text{Im } \varphi_\theta$, 3 — $100v_\theta^{(0,0)}$).

Поступила 19 II 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. Di Prima R. C. Stability of nonrotating symmetric disturbance for viscous flow between rotating cylinders.—«Phys. Fluids», 1961, vol. 4, p. 751—755.
2. Krueger E. R. The stability of Couette flow and spiral flow. Ph. D. Thesis, Rensselaer Polytechnic Institute, Troy, N. Y., June 1962.
3. Krueger E. R., Gross A., Di Prima R. C. On the relative importance of Taylor — vortex and non-axisymmetric modes in flow between rotating cylinders.—«J. Fluid Mech.», 1966, vol. 24, pt 3, p. 521—538.
4. Овчинникова С. И. Исследование ветвления течения Куэтта между вращающимися цилиндрами. Труды IV Всесоюзного семинара по численным методам механики вязкой жидкости. Новосибирск, 1973, с. 55—61.
5. Coles D. Transition in circular Couette flow.—«J. Fluid Mech.», 1965, vol. 21, p. 385—425.
6. Юдович В. И. Возникновение автоколебаний в жидкости.— ПММ, 1974, т. 35, вып. 4, с. 638—655.
7. Юдович В. И. Исследование автоколебаний сплошной среды, возникающих при потере устойчивости стационарного режима.— ПММ, 1972, т. 36, вып. 3, с. 450—459.
8. Юдович В. И. Об устойчивости стационарных течений вязкой несжимаемой жидкости.—«Докл. АН СССР», 1965, т. 161, № 5, с. 1037—1040.
9. Юдович В. И. Об устойчивости вынужденных колебаний жидкости.—«Докл. АН СССР», 1970, т. 195, № 2, с. 292—295.
10. Юдович В. И. Об устойчивости автоколебаний жидкости.—«Докл. АН СССР», 1970, т. 195, № 3, с. 574—576.