

УДК 532.59

УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ КОНЕЧНОЙ АМПЛИТУДЫ В ДВУХСЛОЙНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. В. Гаврилов, В. Ю. Ляпидевский

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск
Новосибирский государственный университет, 630090 Новосибирск
E-mails: gavrilov@hydro.nsc.ru, liapid@hydro.nsc.ru

Проведено теоретическое и экспериментальное исследование нелинейных внутренних волн второй моды на тонкой границе раздела однородных слоев смешивающихся жидкостей с различной плотностью. Предложена математическая модель, описывающая генерацию, взаимодействие и затухание уединенных внутренних волн, возникающих при интрузии жидкости с промежуточной плотностью в прослойку. Построено точное решение, задающее форму уединенных волн, симметричных относительно невозмущенной границы раздела, и обоснован предельный переход для волн конечной амплитуды при толщине прослойки, стремящейся к нулю. Экспериментально изучены тонкая структура течения в окрестности уединенной волны и ее влияние на горизонтальный перенос массы при распространении коротких интрузий. Показано, что учет в математической модели трения на границах раздела позволяет адекватно описать изменение фазовых и амплитудных характеристик уединенных волн в процессе их распространения.

Ключевые слова: уединенная волна, двухслойная жидкость, уравнения мелкой воды, интрузия, гравитационное течение.

Введение. Одним из эффективных механизмов трансформации крупномасштабных течений в океане и атмосфере в движения более мелкого масштаба и последующей диссипации энергии волны является генерация внутренних волн в стратифицированной по плотности среде. В шельфовой зоне моря нелинейные внутренние волны, генерируемые приливами или возникающие в результате взаимодействия течений с рельефом дна, распространяются в сторону берега в виде пакетов уединенных волн. Характерной особенностью как придонных, так и приповерхностных внутренних волн большой амплитуды является их способность переносить частицы жидкости и примесей на значительные расстояния. В последнее время структура такого течения интенсивно изучается теоретически и экспериментально. В стратифицированных водоемах внутренние волны с “захваченным ядром” обнаружены в придонном [1] и поверхностном [2] слоях, а также на границе раздела однородных слоев жидкости различной плотности [3]. Интрузионные течения в виде симметричных уединенных волн на границе раздела жидкостей исследованы с использованием экспериментальных и теоретических методов [4–11]. Интерес к данному классу течений обусловлен их уникальной способностью переносить массу вдоль высокоградиентных прослоек в стратифицированной жидкости за счет начального горизонтального импульса. Течение в уединенной волне аналогично течению в вихревом кольце [12], причем вовлечение окружающей жидкости и вертикальная компонента скорости в вихревом движении эффективно подавляются устойчивой стратификацией.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ (код проекта 2.1.1/3543) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09-01-00427), а также в рамках Интеграционного проекта СО РАН № 65 и Программы РАН № 14.14.

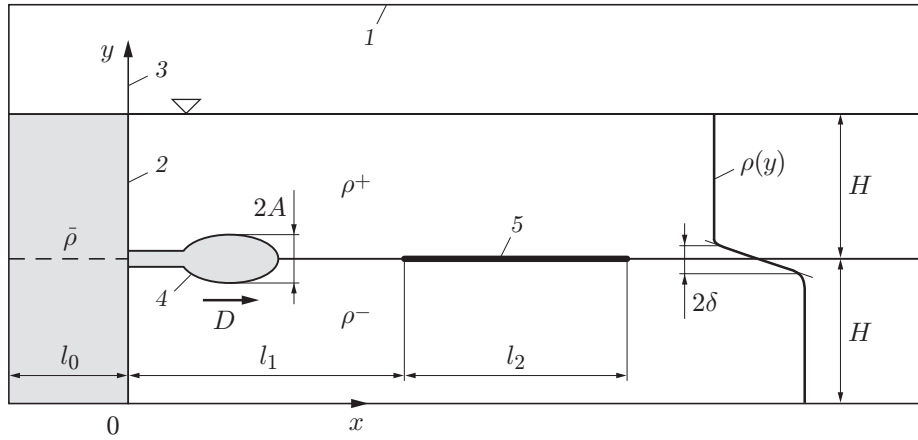


Рис. 1. Схема экспериментальной установки:
 1 — стенка лотка, 2 — торцевая часть лотка, 3 — герметичная перегородка,
 4 — уединенная волна, 5 — тонкая пластина

В настоящей работе проведено экспериментальное исследование симметричных уединенных волн на границе раздела двухслойной жидкости. На основе математической модели двухслойной мелкой воды [13], учитывающей влияние нелинейности и дисперсии, построены аналитические и численные решения задачи о распространении внутренних волн большой амплитуды в интрузионных и гравитационных течениях.

1. Экспериментальная установка. Опыты проводились в лабораторном лотке (рис. 1) длиной 140 см, шириной 20 см и глубиной 35 см, боковые стенки и дно которого изготовлены из прозрачного органического стекла [14]. Торцевая часть лотка длиной $l_0 = 20$ см отделена герметичной перегородкой, которая могла подниматься и опускаться для формирования уединенной волны.

Перед началом опыта перегородка поднималась, и установка заливалась слоями смешивающихся жидкостей, имеющих разную плотность ρ^+ , ρ^- . Толщина слоев H была одинаковой. В качестве рабочих жидкостей использовались пресная вода и слабый раствор сахара в воде. Во всех опытах относительная разность плотностей слоев $\varepsilon = (\rho^- - \rho^+)/\rho^+$ не превышала значения 0,005, что не приводило к существенному увеличению вязкости жидкостей. В качестве добавки для создания стратификации использовался сахар, так как его коэффициент диффузии существенно меньше, чем, например, коэффициент диффузии поваренной соли. Это позволяло уменьшить толщину размытой зоны. После заливки лотка между слоями устанавливалось распределение плотности, которое хорошо аппроксимируется формулой

$$\rho(y) = \bar{\rho} + \frac{\rho^- - \rho^+}{2} \operatorname{th} \left(\frac{y - H}{\delta} \right), \quad (1.1)$$

где $\bar{\rho} = (\rho^- + \rho^+)/2$; 2δ — характерная толщина пикноклина; y — вертикальная координата, направленная вверх относительно дна лотка; ρ^+ , ρ^- — асимптотические значения плотности в верхнем и нижнем слоях жидкости соответственно.

Слабый раствор сахара необходимой плотности получался путем тщательного смешивания соответствующего объема раствора достаточно большой плотности ($\varepsilon = 0,05$) с известным объемом пресной воды. Плотность концентрированного раствора измерялась с помощью стандартного ареометра с погрешностью 0,05 %. Опыты проводились сразу после заливки лотка, поэтому толщина прослойки 2δ была примерно одинаковой и перед началом опытов не превышала значения $2\delta = 1,2$ см, что контролировалось датчиком электропроводности с горизонтально расположенным чувствительным элементом [15].

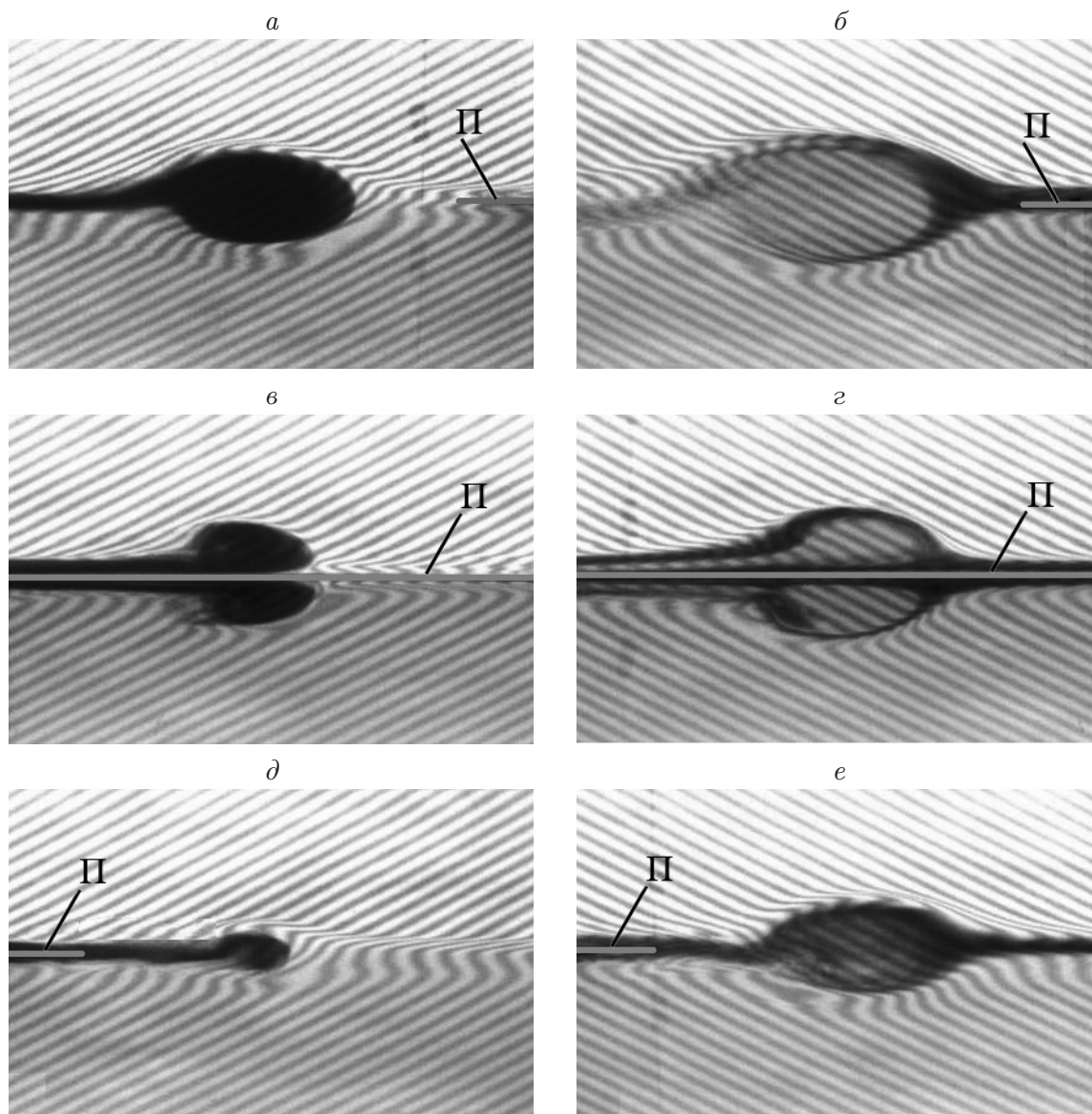


Рис. 2. Фотографии внутренних уединенных волн, набегающих на горизонтально расположенную пластину (П) ($H = 8$ см, $b = 2,5$ см/с²):

$a, в, д$ — распространение волны по невозмущенной прослойке ($\delta = 0,6$ см), $б, г, е$ — после прохождения первой волны ($\delta = 0,8$ см); $a, б$ — перед пластиной, $в, г$ — на пластине, $д, е$ — за пластиной

После заливки лотка герметичная перегородка опускалась. Жидкость в секции 2 (см. рис. 1) тщательно перемешивалась и слегка подкрашивалась, и в соответствии с формулой (1.1) в ней устанавливалась средняя плотность $\bar{\rho}$. При удалении перегородки жидкость из секции устремлялась вдоль границы раздела слоев в основную часть лотка, а жидкость из основной части лотка вдоль дна и свободной поверхности перетекала в торцевую секцию. Затем перегородка опускалась, и на некотором расстоянии от нее на границе раздела слоев формировалась уединенная волна второй моды 4. При изменении времени, в течение которого перегородка была открыта, реализовывались волны различной интенсивности.

Распространение уединенных волн фиксировалось с помощью цифровой видеокamеры (частота съемки 25 кадр/с), расположенной на расстоянии 2,5 м от лотка. Как и в экспериментах [16], визуализация картины течения осуществлялась следующим образом: сквозь толщу жидкости фотографировался равномерно освещенный экран с нанесенными на него наклонными линиями (рис. 2). В зонах с высоким градиентом плотности наблюдалось характерное искажение этих линий, а в зонах перемешивания происходило нарушение оптической прозрачности жидкости. Следует отметить, что в зонах увеличения градиента плотности линии как бы сгущаются, а в зонах уменьшения градиента плотности — расходятся. Вверху и внизу пикноклина и внутри уединенной волны линии не искажены, следовательно, в этих областях находится однородная по плотности жидкость. Жидкость промежуточной плотности, распространяющаяся в виде интрузии вдоль границы раздела, слегка подкрашена раствором чернил для визуализации процессов массообмена (см. рис. 2).

Для изучения процессов перехода от короткой интрузии к гравитационному течению в некоторых опытах на границе раздела слоев горизонтально устанавливалась тонкая пластина 5 (см. рис. 1). (Расстояние от перегородки 3 до передней кромки пластины $l_1 = 45$ см, длина пластины $l_2 = 30$ см.) На рис. 2 приведены фотографии волны, полученные при ее распространении в опыте сразу после заливки лотка ($2\delta = 1,2$ см) и после прохождения первой волны ($2\delta = 1,6$ см). На рис. 2 видно, что при набегании уединенной волны на пластину течение резко перестраивается: профиль волны становится несимметричным, за головной частью волны наблюдается область интенсивного перемешивания, т. е. проявляются основные признаки гравитационного течения. Наиболее четко эти признаки выражены в случае тонкой начальной прослойки (см. рис. 2, *a, в, д*). Небольшого увеличения толщины прослойки после прохождения первой волны достаточно для того, чтобы следующая волна не подвергалась существенной деформации в окрестности пластины (см. рис. 2, *б, г, е*). На представленных на рис. 2 фотографиях также видно различие между интрузионными течениями на границе раздела жидкостей и гравитационными течениями в окрестности дна или твердой крышки канала, обусловленное влиянием трения на структуру течения. Ниже строятся точные решения, описывающие уединенную волну в рамках бездиссипативной модели, а также обсуждается влияние трения на эволюцию уединенных волн на границе раздела жидкостей и в окрестности пластины.

2. Математические модели двухслойной мелкой воды. Как отмечалось выше, при слабой стратификации ($(\rho^- - \rho^+)/\rho^+ \ll 1$) симметричные относительно средней линии канала течения могут быть реализованы при интрузии жидкости с промежуточной плотностью $\bar{\rho} = (\rho^- + \rho^+)/2$ в прослойку между однородными слоями. В этом случае достаточно рассмотреть течения только в нижней части канала ($0 < y < H$) и для описания эволюции волн применить двухслойную схему течения. В длинноволновом приближении нелинейные и дисперсионные эффекты учтены в модели [17]. Двухслойная модель определяется размерными величинами ρ^+ , H и $b = \varepsilon g/2$ (g — ускорение свободного падения). В безразмерных переменных $\rho^+ = 1$, $H = 1$, $b = 1$ примем, что h , u — глубина и средняя скорость движения нижнего слоя, ζ , w — глубина и скорость слоя в верхней части рассматриваемой области течения, p — давление на границе раздела. Примем также, что

$$\begin{aligned} \zeta &= 1 - h, & Q &= hu + \zeta w = 0, \\ \frac{d_1}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + w \frac{\partial}{\partial x}, & \frac{d_2}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

В приближении Буссинеска $((\rho^- - \rho^+)/\rho^+ \ll 1)$ модель [17] представлена следующей системой уравнений [18]:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{3h} \left(h^2 \frac{d^2 h}{dt^2} \right)_x + h_x + p_x &= 0, \\ w_t + ww_x + \frac{1}{3\zeta} \left(\zeta^2 \frac{d^2 \zeta}{dt^2} \right)_x + p_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.2)$$

При моделировании течений в двухслойной жидкости с достаточно тонкой начальной прослойкой между однородными слоями $\zeta_0 = 1 - h_0 \ll 1$ из закона сохранения массы в каждом слое следует, что скорость движения частиц в интрузии близка к скорости волны. Поэтому вертикальным ускорением частиц в этой области можно пренебречь и в соотношениях (2.2) давление в верхнем слое можно заменить гидростатическим давлением. При этом система (2.1), (2.2) упрощается [13]:

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + \frac{1}{3h} \left(h^2 \frac{d^2 h}{dt^2} \right)_x + h_x + p_x &= 0, \\ w_t + ww_x + p_x &= 0, \\ \frac{d}{dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x}. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Дальнейшее упрощение соотношений (2.3) возможно при $|u| \ll 1$, $|h - h_0| \ll 1$. Соответствующая слабонелинейная модель, пригодная для описания волн небольшой амплитуды, принимает вид [17]

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ u_t + uu_x + h_0 h_{ttx}/3 + h_x + p_x &= 0, \\ w_t + ww_x + p_x &= 0. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Далее аналитически исследуются решения (2.2)–(2.4), описывающие симметричные уединенные волны на границе раздела однородных слоев различной плотности.

Для трех моделей, представленных выше, рассмотрим бегущие волны, т. е. решения уравнений (2.2)–(2.4), зависящие от переменной $\xi = x - Dt$ ($D \equiv \text{const}$). Потребуем также, чтобы при $|\xi| \rightarrow \infty$

$$h \rightarrow h_0, \quad h' \rightarrow 0, \quad h'' \rightarrow 0 \quad (2.5)$$

(здесь и далее штрих означает производную по переменной ξ), т. е. решения представляли собой уединенные волны.

Сначала рассмотрим бегущие волны для слабонелинейной модели (2.4). Система (2.4) сводится к следующей системе обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} h(D - u) &= h_0 D, \quad (1 - h)(D - w) = (1 - h_0)D, \\ (u - D)^2/2 + h + h_0 D^2 h''/3 - (w - D)^2/2 &= h_0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

В силу (2.5) уравнения (2.6) можно проинтегрировать и представить в виде одного обыкновенного дифференциального уравнения для функции $h = h(\xi)$:

$$(h')^2 = G_1(h) = \frac{3(h - h_0)^2 (\text{Fr}^2 - h + h^2)}{\text{Fr}^2 h_0 h (1 - h)}. \quad (2.7)$$

Аналогично в силу (2.5) уравнения (2.2), (2.3) можно свести к следующим дифференциальным уравнениям:

$$(h')^2 = G_2(h) = \frac{3(h - h_0)^2(\text{Fr}^2 - h + h^2)}{\text{Fr}^2 h_0^2(1 - h)}; \quad (2.8)$$

$$(h')^2 = G_3(h) = \frac{3(h - h_0)^2(\text{Fr}^2 - h + h^2)}{\text{Fr}^2(h_0^2(1 - h) + (1 - h_0)^2 h)}, \quad (2.9)$$

где $\text{Fr} = D/\sqrt{bH} = D$ — число Фруда.

Заметим, что уравнение (2.7) непосредственно следует из (2.6), уравнение (2.8) получено в работе [13], а уравнение (2.9) выводится в приближении Буссинеска из соответствующего представления для бегущих волн в [17] (см., например, формулу (13) в работе [18]). Заметим также, что параметр

$$h_m = (1 + \sqrt{1 - 4\text{Fr}^2})/2 \quad (2.10)$$

не зависит от начальной толщины верхнего слоя $\zeta_0 = 1 - h_0$, поэтому функции G_i ($i = 1, 2, 3$) различаются только знаменателями, а общий числитель обращается в нуль при $h = h_0$ и $h = h_m$ ($0 < h < 1$). При $h_0 \rightarrow 1$ функции G_i ($i = 2, 3$) имеют общий предел

$$G_0(h) = 3(1 - h)(\text{Fr}^2 - h + h^2)/\text{Fr}^2.$$

Уравнение

$$(h')^2 = G_0(h) \quad (2.11)$$

задает для моделей (2.2), (2.3) форму симметричной уединенной волны, распространяющейся по границе раздела между однородными слоями ($\zeta_0 = 0$). Для рассмотренных выше моделей включая предельный случай $h_0 \rightarrow 1$ профили волн находятся из соотношений (2.7)–(2.9), (2.11) в квадратурах

$$\xi = \xi_i(h) = \pm \int_{h_m}^h \frac{ds}{\sqrt{G_i(s)}}, \quad i = 0, 1, 2, 3. \quad (2.12)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением случая $h_m < h_0$, соответствующего классу интрузионных течений, описанных в п. 1. На рис. 3 для $h_0 = 0,95$ и $\text{Fr} = 0,40; 0,48$ приведены зависимости $y = G_i(h)$ ($i = 0, 1, 2, 3$). Из рис. 3 следует, что при относительно тонких начальных прослойках между однородными слоями, полученных экспериментально, графики функций $y = G_2(h)$ и $y = G_3(h)$ практически совпадают. Следовательно, соответствующие модели дают близкие профили уединенных симметричных волн, распространяющихся вдоль границы раздела жидкостей различной плотности. Поэтому при численной реализации нестационарных интрузионных течений в канале в дальнейшем используется более простая модель (2.3).

Заметим, что для бегущих волн из (2.10) следуют ограничение $\text{Fr} < \text{Fr}_* = 0,5$ и независимость амплитуды уединенной волны $A = 2(1 - h_m)$ от начальной толщины прослойки $\zeta_0 = 1 - h_0$. В равной мере это относится ко всем рассмотренным выше моделям. Так как корень $h = h_0$ уравнения $G_i(h) = 0$ является кратным при $h_0 < 1$, то зависимость $h = h_i(\xi)$, полученная из (2.12), описывает солитоноподобное решение соответствующей системы уравнений при $i = 1, 2, 3$ и $h(\xi) < h_0$ при всех значениях ξ .

При $h_0 \rightarrow 1$ предельная функция $(G_0(h))^{-1/2}$ имеет интегрируемую особенность в (2.12), следовательно, для достаточно больших значений $|\xi|$ имеем $h_0(\xi) \equiv 1$, т. е. решение $h = h_0(\xi)$, соответствующее бесконечно тонкой прослойке $\zeta_0 = 0$, представляет

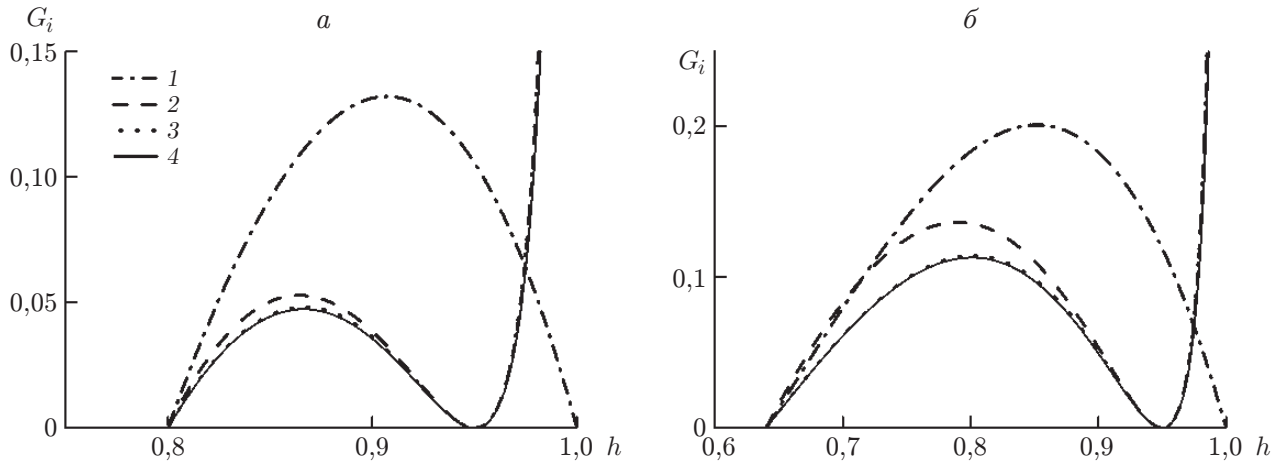


Рис. 3. Зависимости $y = G_i(h)$ при $h_0 = 0,95$, $Fr = 0,40$ (а), $Fr = 0,48$ (б) и различных значениях i :

1 — $i = 0$, 2 — $i = 1$, 3 — $i = 2$, 4 — $i = 3$

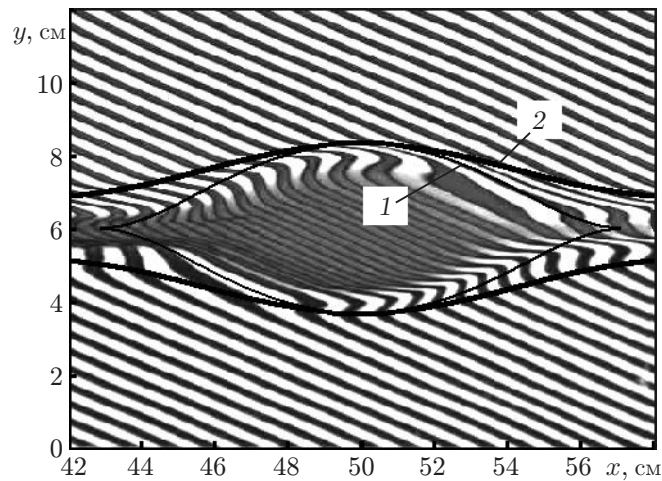


Рис. 4. Фотография уединенной волны, движущейся слева направо, на границе раздела жидкостей ($Fr = 0,488$):

1 — решение (2.12) при $i = 0$, $\zeta_0 = 0$; 2 — решение (2.12) при $i = 2$, $\zeta_0 = 0,15$

собой “компактон”. Решения (2.12) могут быть использованы как для описания симметричных уединенных волн, так и для представления фронта интрузионных течений на границе раздела жидкостей. На рис. 4 показаны стационарные решения (2.12) при $\zeta_0 = 0$, $\zeta_0 = 0,15$, а также фотография симметричной уединенной волны, реализованной в эксперименте ($Fr = 0,488$, $\zeta_0 = 0,15$). При этом решение с ненулевой начальной толщиной прослойки (кривая 2) точно определяет внешнюю границу возмущений поля плотности. Заметим, что модель (2.3) получена при условии $A/\zeta_0 \gg 1$, поэтому может быть использована при описании волн конечной амплитуды только для относительно тонкой прослойки. В то же время рассматриваемая волна имеет умеренную относительно толщины прослойки амплитуду $A/\zeta_0 = 5,2$, и уравнения (2.3) адекватно описывают профиль уединенной волны как для тонких прослоек, так и для прослоек конечной толщины.

При построении бегущих волн в рассматриваемых моделях не учитывались диссипативные эффекты. В реальной стратифицированной жидкости уединенные волны, распро-

страняющиеся с постоянной скоростью, не могут быть реализованы. Влияние трения приводит к замедлению распространения уединенной волны и соответствующей перестройке ее профиля. Тем не менее в системе координат, связанной с уединенной волной, течение является квазистационарным: в каждый момент времени форма уединенной волны совпадает с формой стационарной волны такой же амплитуды, что позволяет провести сравнение точного решения с экспериментальными данными. Для рассматриваемого класса течений в силу симметрии течения трение на оси канала ($y = 1$) равно нулю и основной вклад в диссипацию энергии вносят процессы на границе раздела интрузии и окружающей жидкости ($y = h(t, x)$), обусловленные развитием неустойчивости и турбулентным перемешиванием в области больших градиентов скорости и плотности. В рамках двухслойной модели эти эффекты можно учесть, только введя в соотношения (2.3) члены, учитывающие турбулентное трение на границе раздела однородных слоев. Заметим также, что диссипация энергии в уединенной волне обусловлена не только трением на ее границах, но и потерей массы интрузии при ее распространении, так как при убывании амплитуды волны общая масса жидкости промежуточной плотности, переносимая волной, уменьшается. Непосредственно за волной толщина прослойки увеличивается по сравнению с невозмущенным состоянием, и различия между точным решением и экспериментальными данными проявляются лишь на небольшом участке, примыкающем к области постоянного течения за волной (см. рис. 4).

Далее с использованием модели (2.3), модифицированной с учетом трения, проводится численный анализ нестационарной задачи эволюции симметричных уединенных волн в двухслойной жидкости.

3. Затухание уединенных волн. Сравнение моделей (2.2), (2.3) на стационарных решениях, представляющих собой бегущие волны различной амплитуды, показывает, что для рассматриваемых интрузионных течений эти модели позволяют получить близкие профили волн в широком диапазоне определяющих параметров. Поэтому для анализа нестационарных течений ограничимся системой (2.3), которая по своей структуре аналогична уравнениям Грина — Нагди для однослойной жидкости. В частности, для численной реализации данной модели можно использовать обобщение метода расчета нестационарных течений, предложенного в работе [19]. С учетом диссипативных эффектов, обусловленных турбулентным трением на внутренних и внешних границах двухслойного течения, при $h + \zeta = 1$, $Q = hu + \zeta w = 0$ система (2.3) принимает вид

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, & w_t + (w^2/2 + p)_x &= (f_i - f^+)/\zeta, \\ \left(hu^2 + \zeta w^2 + \frac{1}{2} h^2 + \frac{1}{3} h^2 \frac{d^2 h}{dt^2} + p \right)_x &= -f^+ - f^-, \\ f_i &= c_i(u - w)|u - w|, & f^+ &= c_w^+ w|w|, & f^- &= c_w^- u|u|, \\ c_i &\equiv \text{const}, & c_w^\pm &\equiv \text{const}, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где f_i , f^\pm — сдвиговые напряжения на границе раздела жидкостей и внешних границах рассматриваемой области течения соответственно. Как отмечалось выше, специфика симметричного интрузионного течения состоит в том, что на оси симметрии канала $y = 1$ напряжение сдвига отсутствует и $f^+ = 0$. Только в экспериментах с горизонтально расположенной пластиной, помещенной в центр канала (см. п. 1), этот член будет иметь существенное значение. Заметим также, что в представленных ниже расчетах учет трения на дне канала не влияет на картину течения и можно положить $f^- = 0$. Значения коэффициентов c_i и c_w^\pm выбираются эмпирически и характеризуют интенсивность процессов перемешивания на внутренних границах раздела и в окрестности пластины.

Дифференциальным следствием (3.1) являются неоднородные законы сохранения

$$\left(w^2 + h^2 + \frac{1}{3}h\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right)_t + \left(hu\left(u^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right) + \zeta w^3 + 2h^2u + \frac{2}{3}h^2u\frac{d^2h}{dt^2}\right)_x = -c_i|u-w|^3 - c_w^+|w|^3 - c_w^-|u|^3; \quad (3.2)$$

$$\left(Kh - hw\right)_t + \left(Khu + \left(\frac{1}{2} - h\right)w^2 + \frac{1}{2}h^2 - \frac{2}{3}h\left(\frac{dh}{dt}\right)^2\right)_x = -\frac{c_i(u-w)|u-w|}{\zeta} - c_w^-u|u| + \frac{c_w^+hw|w|}{\zeta}, \quad (3.3)$$

$$K = u + \frac{1}{3h}\left(h^2\frac{dh}{dt}\right)_x = u - \frac{1}{3h}(h^3u_x)_x.$$

В отсутствие диссипации ($c_i = 0$, $c_w^\pm = 0$) дополнительный закон сохранения энергии (3.2) можно использовать для построения уединенных волн (см. п. 2). Уравнение

$$h_t + (hu)_x = 0 \quad (3.4)$$

и уравнение (3.3) образуют замкнутую систему законов сохранения, эквивалентную исходной системе (3.1). Для численного решения нестационарной задачи о затухании уединенной волны в рамках модели (3.3), (3.4) в качестве искоемых переменных удобно рассматривать функции h и $\Phi = h(K - w)$. В этих переменных система принимает вид, аналогичный форме записи уравнений Грина — Нагди для однослойной жидкости (см. уравнение (10) в [19]). Поэтому ниже приведем только основные этапы построения разностной схемы.

Разностная схема, реализующая численное решение начально-краевой задачи для уравнений (3.3), (3.4), формально является вариантом схемы Годунова, в которой для вычисления потоков через боковые границы ячеек используется линеаризованная задача о распаде произвольного разрыва. При этом для построения задачи о распаде произвольного разрыва и выбора шага по времени используются характеристики равновесной системы без дисперсионных членов. Для соотношений (3.3), (3.4) равновесной системой являются уравнения двухслойной мелкой воды [20. Гл. 4]

$$\begin{aligned} h_t + (hu)_x &= 0, \\ (u - w)_t + (u^2/2 - w^2/2 + h)_x &= 0, \\ hu + (1 - h)w &= 0. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Уравнения для характеристик (3.5) имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = (1 - 2h)(u - w) \pm \sqrt{h(1 - h)(1 - (u - w)^2)}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) следует, что при $|u - w| < 1$ система (3.5) является системой гиперболического типа. Заметим, что исходная система (3.3), (3.4) не является гиперболической. Бесконечная скорость распространения возмущений для системы (3.3), (3.4) реализуется при восстановлении скорости u по известным переменным h , Φ из линейного уравнения

$$\frac{1}{3}h^3u_{xx} + h^2h_xu_x - \frac{hu}{1 - h} + \Phi = 0,$$

разностное решение которого находится методом прогонки. Естественными граничными условиями для системы (3.3), (3.4) являются условия непротекания ($u = 0$) на боковых границах рассматриваемой области течения. В качестве начальных условий выбирается точное решение, описывающее уединенную волну для модели (2.3). На рис. 5 в размерных

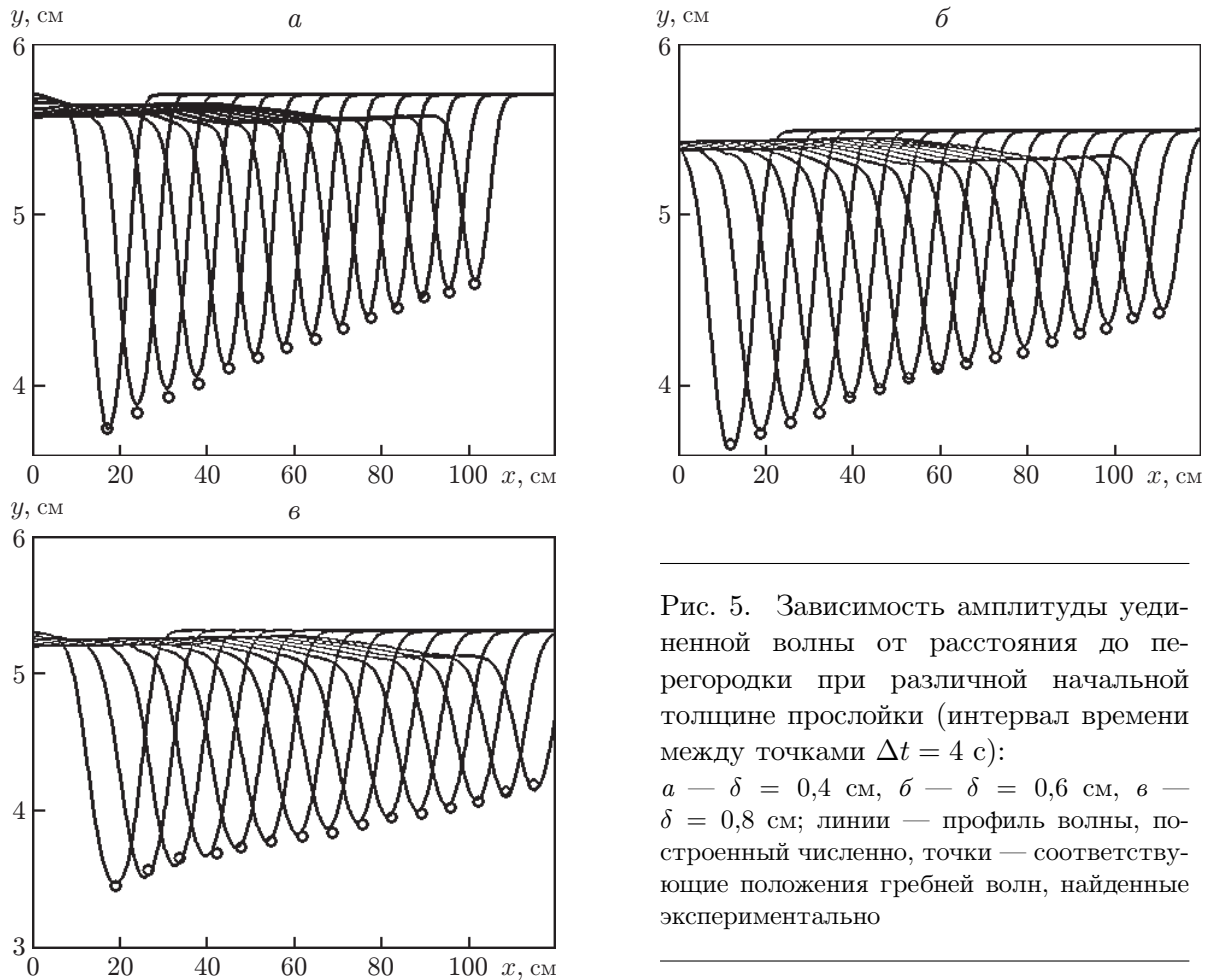


Рис. 5. Зависимость амплитуды уединенной волны от расстояния до перегородки при различной начальной толщине прослойки (интервал времени между точками $\Delta t = 4$ с):
a — $\delta = 0,4$ см, *б* — $\delta = 0,6$ см, *в* — $\delta = 0,8$ см; линии — профиль волны, построенный численно, точки — соответствующие положения гребней волн, найденные экспериментально

переменных приведены последовательные положения волн, вычисленные через равные промежутки времени $\Delta t = 4$ с ($H = 6$ см, $b = 2$ см/с²). Точками показаны положения гребней волн, полученные экспериментально для тех же моментов времени. Рис. 5, *a–в* различаются начальной толщиной прослойки δ . Для всех расчетов коэффициенты трения выбраны одинаковыми ($c_i = 0,12$, $c_w^\pm = 0$). Результаты расчетов показывают, что скорости распространения и затухания уединенных волн на границе раздела адекватно представлены диссипативными членами системы (3.3), (3.4). Более того, влияние трения на границе раздела между слоями различной плотности приводит к несимметричности профиля уединенной волны относительно вертикальной оси, проходящей через гребень. Толщина прослойки за волной, построенной численно, увеличивается, а амплитуда волны и масса переносимой жидкости уменьшаются. За волной возникает расширяющееся плато, которое переходит в нестационарную волну понижения. На рис. 6 приведены точное решение (2.12) при $i = 2$ для бездиссипативной модели (кривая 1) и численное решение (3.3), (3.4) (кривая 2), представляющее собой одну из реализаций уединенной волны, показанных на рис. 5, *a*. На рис. 6 приведена также фотография внутренней уединенной волны, полученной экспериментально. Как и на рис. 4, внешней границей волны является граница деформации наклонных полос, обусловленной возмущением поля плотности при прохождении волны. Сравнение стационарного и нестационарного решений (кривые 1 и 2 на рис. 4) показывает, что на переднем фронте волны эти решения практически совпадают и диссипация энергии су-

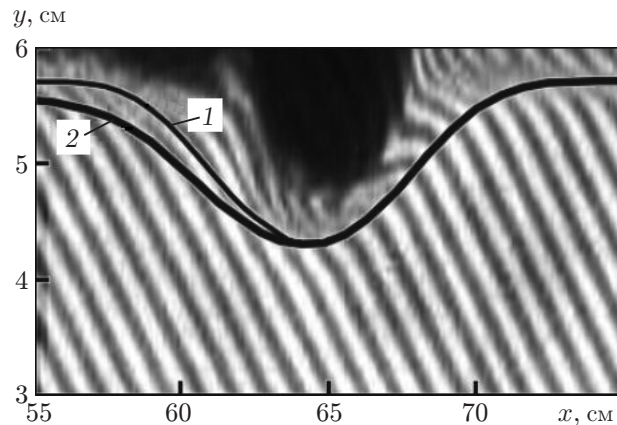


Рис. 6. Фотография одной из реализаций уединенной внутренней волны, показанной на рис. 5, а:

1 — решение (2.12) при $i = 2$; 2 — численное решение нестационарной задачи

щественно влияет на течение только за ее гребнем. Заметим, что построенное численное решение позволяет также найти такую важную характеристику течения, как скорость выноса массы из волны. Поэтому рассматриваемая модель может быть использована и при описании снарядного режима течения в каналах и трубах.

Построенные выше стационарные и нестационарные решения задачи об уединенной волне формально описывают и эволюцию гравитационных течений в горизонтальном канале под действием начального импульса. Однако экспериментальные исследования взаимодействия уединенной волны с пластиной, горизонтально установленной в плоскости симметрии канала (см. п. 1), показывают существенное различие между интрузией и гравитационным течением в окрестности пластины (см. рис. 2), обусловленное интенсификацией процесса перемешивания в результате развития пограничного слоя над пластиной и под ней. Следовательно, процесс трансформации волны вблизи пластины существенно зависит от начальной толщины прослойки (ср. рис. 2, а, в, д и рис. 2, б, г, е) и в рамках двухслойной схемы течения гипотеза о постоянстве коэффициента трения c_w^+ неприменима к течению под пластиной. Поэтому для интерпретации результатов экспериментального исследования эволюции солитона за пластиной коэффициент трения в окрестности пластины выбирался в зависимости от начальной толщины прослойки таким образом, чтобы обеспечить соответствующую диссипацию энергии гравитационного течения и тем самым неявно учесть влияние турбулентного перемешивания.

На рис. 7 показана эволюция профиля уединенной волны при ее взаимодействии с пластиной, вычисленного по модели (3.3), (3.4) через равные промежутки времени $\Delta t = 2$ с ($H = 8$ см, $b = 2$ см/с², $c_i = 0,012$). На рис. 7 показаны также экспериментально найденные для тех же моментов времени положения гребней волн при движении по границе раздела жидкостей (точки 1) и в гравитационном течении в окрестности пластины $l_1 < x < l_1 + l_2$ (точки 2). Из рис. 7 следует, что рассматриваемая модель достаточно точно описывает амплитудные и фазовые характеристики уединенной волны перед и за пластиной, однако для корректного представления гравитационного течения в окрестности пластины необходимо учитывать процесс турбулентного перемешивания, что выходит за рамки данной модели.

Заключение. Симметричные внутренние уединенные волны, распространяющиеся вдоль границы раздела жидкостей различной плотности, представляют интерес как при физическом, так и при математическом моделировании. Изучение основных особенностей

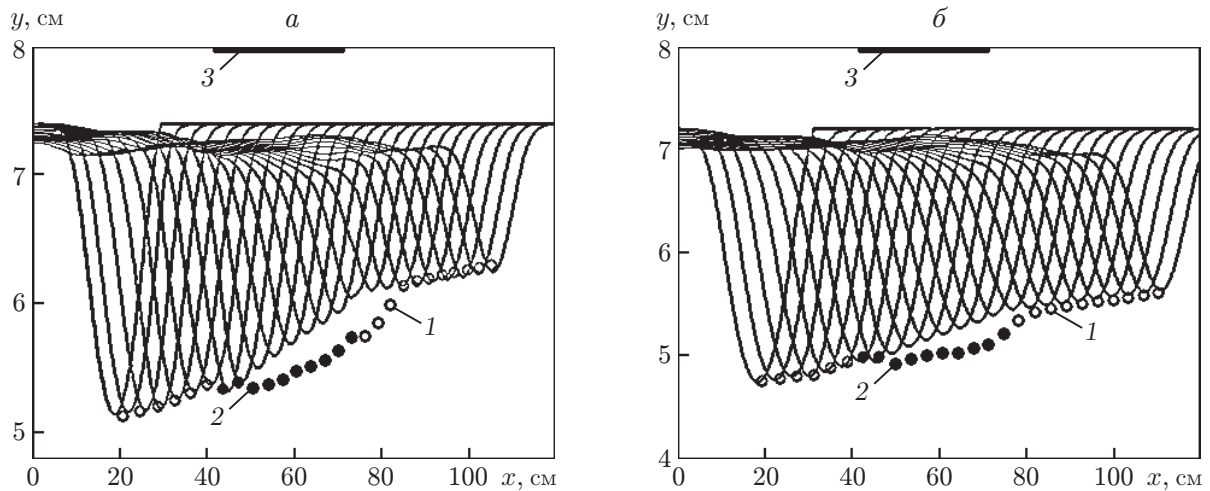


Рис. 7. Зависимость амплитуды уединенной волны, набегающей на пластину, от расстояния до перегородки при различных начальной толщине прослойки и коэффициенте трения (интервал времени между точками $\Delta t = 2$ с):
a — $\delta = 0,6$ см, $c_w^+ = 0,1$, *б* — $\delta = 0,8$ см, $c_w^+ = 0,05$; линии — численный расчет, точки — положения гребней уединенных волн на границе раздела (1) и под пластиной (2), определенные экспериментально; 3 — пластина

эволюции этих волн под действием начального импульса позволяет понять некоторые механизмы переноса массы и импульса в реальных течениях в атмосфере и океане. Математические модели (2.2)–(2.4) показывают, что формирование уединенных волн большой амплитуды на границе раздела двухслойной жидкости в канале конечной глубины обусловлено дисперсионными эффектами в окружающей интрузию жидкости. Поэтому для рассмотренных выше моделей солитонобразные решения имеют предел при толщине прослойки, стремящейся к нулю. Таким образом, модели (2.2)–(2.4) можно использовать для построения внутренних волн большой амплитуды, если под амплитудой понимать отношение A/δ .

В отличие от механизма диссипации энергии поверхностных уединенных волн в однородной жидкости механизм диссипации энергии волны, вызванной развитием неустойчивости сдвигового течения в окрестности внутренних границ раздела, является достаточно эффективным. Поэтому адекватная модель внутренней уединенной волны должна учитывать трение на границах интрузионного течения. Сравнение экспериментальных данных с результатами нестационарных численных расчетов, выполненных для модели (3.1) с постоянным коэффициентом турбулентного трения, показывает, что затухание уединенных волн на границе раздела может быть корректно представлено в рамках этой модели. В то же время структура гравитационного течения в окрестности пластины (см. рис. 2) существенно зависит от начальной толщины прослойки, и для его описания необходима более полная модель, учитывающая процесс турбулентного перемешивания в окрестности фронта волны.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Scotti A., Pineda J.** Observation of very large and steep internal waves of elevation near the Massachusetts coast // *Geophys. Res. Lett.* 2004. V. 31, L22307. P. 1–5.
2. **Helfrich K. R., Melville W. K.** Long nonlinear internal waves // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 2006. V. 38. P. 395–425.

3. **Stevens C. L., Fisher T. S. R., Lawrence G. A.** Turbulent layering beneath the pycnocline in a strongly stratified pit lake // *Limnol. Oceanogr.* 2005. V. 50, N 1. P. 197–206.
4. **Benjamin T. B.** Internal waves of permanent form in fluids of great depth current // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29. P. 559–592.
5. **Davis R. E., Acrivos A.** Solitary internal waves in deep water // *J. Fluid Mech.* 1967. V. 29. P. 593–608.
6. **Maxworthy T.** On the formation of nonlinear internal waves from the gravitational collapse of mixing regions in two and three dimensions // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 96. P. 47–64.
7. **Kao T. W., Pao K. H.-P.** Wave collapse in the thermocline and internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1980. V. 97. P. 115–128.
8. **Tung K.-K., Chan T. F., Kubota T.** Large amplitude internal waves of permanent form // *Studies Appl. Math.* 1982. V. 66. P. 1–44.
9. **Hohji H., Matsunaga N., Sugihara Y., Sakai K.** Experimental observation of internal symmetric solitary waves in a two-layer fluid // *Fluid Dynamics Res.* 1995. V. 15. P. 89–102.
10. **Stamp A. P., Jacka M.** Deep-water internal solitary waves // *J. Fluid Mech.* 1995. V. 305. P. 347–371.
11. **Schmidt N. P., Spigel R. H.** Second mode internal waves I, II // *Proc. of the 5th Intern. symp. on stratified flows, Vancouver (Canada), 10–13 July 2000.* Vancouver: Univ. of British Columbia, 2000. P. 809–820.
12. **Ахметов Д. Г.** Вихревые кольца. Новосибирск: Гео, 2007.
13. **Гаврилов Н. В., Ляпидевский В. Ю.** Симметричные уединенные волны на границе раздела жидкостей // *Докл. АН.* 2009. Т. 429, № 2. С. 187–190.
14. **Ermanyuk E. V., Gavrilov N. V.** A note on the propagation speed of a weakly dissipative gravity current // *J. Fluid Mech.* 2007. V. 574. P. 393–403.
15. **Гаврилов Н. В., Ерманюк Е. В.** Дифракция внутренних волн на круговом цилиндре, расположенном вблизи пикноклина // *ПМТФ.* 1999. Т. 40, № 2. С. 79–85.
16. **Ерманюк Е. В., Гаврилов Н. В.** Взаимодействие внутреннего гравитационного течения с погруженным круговым цилиндром // *ПМТФ.* 2005. Т. 46, № 2. С. 81–90.
17. **Choi W., Camassa R.** Fully nonlinear internal waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.* 1999. V. 396. P. 1–36.
18. **Helfrish K. R.** Decay and return of internal waves with rotation // *Phys. Fluids.* 2007. V. 19, N 2. P. 026601.
19. **Le Métayer O., Gavrilyuk S., Hank S.** A numerical scheme for the Green — Naghdi model // *J. Comput. Phys.* 2010. V. 229, iss. 6. P. 2034–2045.
20. **Ляпидевский В. Ю.** Математические модели распространения длинных волн в неоднородной жидкости / В. Ю. Ляпидевский, В. М. Тешуков. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.

Поступила в редакцию 25/1 2010 г.