7. **Hawke R. S., Scudder J. K.** Magnetic propulsion railguns: their design and capabilities // Megagauss physics and technology: Proc. conf., Washington, 1979.— N. Y.; L.: Plenum Press, 1980.
8. **Hawke R. S., Brooks A. C. et al.** Railguns for equation-of-state research.— S. l., 1981.— (Tech. Rep./UCRL — 85298); **Fowler C. M., Peterson D. R., Hawke R. S. et al.** Rail gun development for EOS research // Shock waves in condensed matter/Ed. by W. J. Nellis et al.— N. Y., 1982.
9. **Карслоу Г., Егер Д.** Теплопроводность твердых тел.— М.: Наука, 1964.
10. **Кнопфель Г.** Сверхсильные магнитные поля.— М.: Мир, 1972.
11. **Физические** свойства сталей и сплавов, применяемых в энергетике: Справочник/Под ред. Б. Е. Неймарка.— М.: Энергия, 1967.
12. **Шнеерсон Г. А.** Поверхностный эффект в сверхсильном магнитном поле // ЖТФ.— 1967.— Т. 37, вып. 3.
13. **Швецов Г. А., Титов В. М., Башкатов Ю. Л. и др.** Исследование работы рельсотронного ускорителя твердых тел с питанием от взрывного МГД-генератора // Сверхсильные магнитные поля. Физика. Техника. Применение/Под ред. В. М. Титова, Г. А. Швецова.— М.: Наука, 1984.
14. **Бронштейн И. Н., Семендяев К. А.** Справочник по математике.— М.: Наука, 1981.

Поступила 26/IX 1986 г.

УДК 527.535

МЕТОД РАСЧЕТА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК ГАЗОРАЗРЯДНЫХ КАМЕР С УЧЕТОМ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

В. В. Бреев, С. В. Двуреченский, А. Т. Кухаренко, С. В. Пашкин

(*Москва*)

Расчет протекания газа в канале с параллельными стенками [1] представляет самостоятельный интерес (в частности, в связи с описанием турбулентности [2]). Среди многочисленных методов решения таких задач (см., например, [3]) нет универсального.

Большой прикладной интерес представляют расчеты газоразрядных камер (ГРК), применяемых в плазмохимии и для создания технологических лазеров. Необходимо исследовать газодинамические уравнения совместно с уравнениями, описывающими колебательное возбуждение молекул газа тлеющим разрядом. Определенные трудности построения простого и эффективного способа расчета течения газа с учетом пограничного слоя при довольно больших числах Рейнольдса ($\sim 10^4$—10^5) дополняются специфическими, связанными с колебательной накачкой.

Построение метода численного решения задачи о ГРК с учетом погранслоя — цель настоящей работы.

Даже в условиях ламинарного погранслоя, который чаще всего имеет место при характерных параметрах потока газа в ГРК (давление $\sim$ 10 кПа, скорость потока газа в ГРК $\sim$ 100 м/с, $h \sim 5$ см, $L \sim 50$ см), ясна некорректность решения задачи в одномерном струйном приближении. Колебательное возбуждение молекул тлеющим разрядом при наличии погранслоев должно приводить к сильному нагреву газа в последних и значительной неоднородности газодинамических параметров. Другие причины необходимости рассмотрения задачи в двумерном приближении — отвод тепла от нагретого газа в стенку камеры и возможная гетерогенная (на элементах конструкции) релаксация колебательно-возбужденных молекул.

Существенные вычислительные трудности возникают вследствие геометрии ГРК (рис. 1): в используемых на практике камерах число «калибров» $L/h \gtrsim 15 \gg 1$. Необходимое для численного расчета погранслоя при характерных для ГРК параметрах число разбиений по оси y составляет $N_y \sim 10^2$, а по оси x $N_x \gtrsim 10^3$, т. е. число узлов пространственной сетки может достигать $\geqslant 10^5$, что уже делает проблематичным численное решение задачи традиционными методами. В условиях сильной неоднородности нужно использовать неравномерный шаг, что может быть реализовано далеко не во всех известных методах [3].

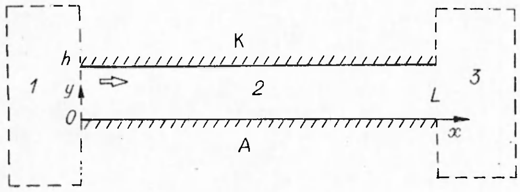

Рис. 1

В данной работе предлагается способ расчета энергетических характеристик ГРК с учетом пограничного слоя на основе метода суммарной аппроксимации [4]. Решение поставленной задачи актуально для уяснения влияния структуры газового потока на эффективность накачки в длинных каналах ГРК. Наиболее распространена схема ГРК, приведенная на рис. 1, где *1* — форкамера, *2* — собственно ГРК с тлеющим разрядом, *3* — выходная камера; стенки камеры служат одновременно электродами (А — анод, К — катод, стрелкой указано направление потока газа).

Рассмотрим газ, представляющий собой смесь ангармонических осцилляторов с инертными атомами (например, N_2 : He, CO : He и т. д.) с добавкой CO_2 до нескольких процентов (такие смеси используются в технологических лазерах). Сформулируем основные физические предположения. Колебательное возбуждение молекул производится тлеющим разрядом с заданной плотностью мощности $jE = W_p(x, y)$ и колебательным КПД разряда η_p; доля $1 - \eta_p$ идет непосредственно в нагрев газа. Тепло от нагретого газа поступает в стенку, теплоемкость которой будем считать бесконечно большой.

Уравнения, описывающие стационарный пограничный слой потока вязкого теплопроводного газа, в декартовых координатах имеют следующий вид (ρ, p, T — плотность, давление, температура газа, $\mathbf{V} = \{u, v, 0\}$ — вектор скорости):

уравнение непрерывности

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y + u\partial \ln \rho/\partial x + v\partial \ln \rho/\partial y = 0; \tag{1}$$

проекция закона сохранения импульса на ось x

$$\rho u\partial u/\partial x + \rho v\partial u/\partial y + dp/dx = \partial\tau/\partial y + F_x; \tag{2}$$

закон сохранения энергии

$$\rho c_p(u\partial T/\partial x + v\partial T/\partial y) - u dp/dx = Q_v; \tag{3}$$

$$Q_v = \partial q/\partial y + \tau\partial u/\partial y + Q_{\text{рел}} + (1 - \eta_p)jE, \tag{4}$$

$$Q_{\text{рел}} = \rho(E_N - E_{Np})/\tau_N,$$

где слагаемые теплового источника Q_v означают соответственно тепловыделение за счет теплопроводности, внутреннего трения, релаксации колебательной энергии и прямой нагрев газа разрядом;

$$\tau = \mu\partial u/\partial y; \tag{5}$$

коэффициент динамической вязкости

$$\mu = \mu_0(T/T_0)^{0,76}; \tag{6}$$

тепловой поток

$$q = \lambda\partial T/\partial y; \tag{7}$$

λ — коэффициент теплопроводности ($\lambda = \mu c_p/\mathrm{Pr}$); Pr — число Прандтля; F_x — объемная сила.

Получим следствие системы (1)—(3), удобное для построения процедуры расчета. Из (3) с учетом элементарных соотношений для совершенного газа вытекает $-(u\partial \ln \rho/\partial x + v\partial \ln \rho/\partial y) = (\gamma - 1)/\gamma \cdot Q_v/p - u/\gamma \cdot d \ln p/dx$. Складывая последнее с (1), получим

$$\partial u/\partial x + \partial v/\partial y = (\gamma - 1)/\gamma \cdot Q_v/p - u/\gamma p \cdot dp/dx. \tag{8}$$

Вычтем (2) из (8) и поделим полученное на u:

(9) $$\partial(v/u)/\partial y = (1 - \mathrm{M}^2)/\rho u^2 \cdot dp/dx + (\gamma - 1)/\gamma \cdot Q_v/pu - (\partial\tau/\partial y + F_x)/\rho u^2,$$

где число Маха

(10) $$\mathrm{M} = u/\sqrt{\gamma RT}.$$

Из (9) следует важное соотношение: приняв во внимание, что

(11) $$\lim_{\substack{y\to 0+0\\ y\to h-0}} (v/u) = \lim_{\substack{y\to 0+0\\ y\to h-0}} (\partial v/\partial y)/(\partial u/\partial y) = 0,$$

проинтегрируем (9) от 0 до h:

$$0 = dp/dx \int_0^h (1 - \mathrm{M}^2)/\rho u^2 \cdot dy - \int_0^h [(\partial\tau/\partial y)/\rho u^2 - (\gamma - 1)/\gamma \cdot Q_v/pu]\, dy,$$

откуда

(12) $$dp/dx = \int_0^h [(\partial\tau/\partial y)/\rho u^2 - (\gamma - 1)/\gamma \cdot Q_v/pu]\, dy \Bigg/ \int_0^h (1 - \mathrm{M}^2)/\rho u^2 \cdot dy.$$

Для удельной (на единицу массы газа) колебательной энергии E_N имеем

(13) $$\rho u \partial E_N/\partial x + \rho v \partial E_N/\partial y = \partial J_v/\partial y - \rho(E_N - E_{N_\mathrm{p}})/\tau_N + \eta_\mathrm{p} jE,$$

где

(14) $$J_v = \rho D^* \partial E_N/\partial y$$

— диффузионный поток колебательной энергии; E_{N_p} — равновесное значение E_N:

(15) $$E_{N_\mathrm{p}} = X_{\mathrm{N}_2} R T_1/(\exp(T_1/T) - 1);$$

$T_1 = 3380$ K — энергия первого колебательного уровня молекулы N_2;

(16) $$R = 83{,}14 \Big/ \sum_i \mu_i X_i;$$

μ_i — молекулярный вес в атомных единицах; X_i — доля i-го газа в смеси.

Итак, для численного решения будем использовать систему (2), (9), (13) и

(17) $$\rho u c_p \partial T^*/\partial x + \rho c_p \partial T^*/\partial y = \partial(q + u\tau)/\partial y + Q_{\text{рел}} + (1 - \eta_\mathrm{p}) jE + uF_x,$$
$$T^* = T + u^2/2c_p,$$

а также соотношения (4)—(7), (10)—(16) и краевые условия на входе и стенках камеры:

$$v(x, 0) = v(x, h) = 0,\ u(x, 0) = u(x, h) = 0,\ v(0, y) = 0.$$

Здесь $u(0, y)$ — заданная функция; $T^*(x, 0) = T^*(x, h) = T_0^*$ — заданная величина; $T^*(0, y) = T_0^*$; $p(0, y)$ — давление на входе.

Опишем алгоритм численного решения. Задавшись $u(x_0, y)$, $p(x_0, y)$, $T^*(x_0, y)$ (на входе камеры $x_0 = 0$, $T^*(0, y) = T_0^*$), а) определим для данного x_0 dp/dx из (12); б) из (9) найдем $v(x_0, y)$ (поперечную составляющую скорости в данном сечении; в качестве краевых условий возьмем (11)); в) зная dp/dx и профиль поперечной составляющей скорости, делаем шаг по $x (x \to x_0 + \Delta x)$: находим из решения системы (2), (13), (17) с соответствующими краевыми условиями $T^*(x_0 + \Delta x, y)$, $E_N(x_0 + \Delta x, y)$, $u(x_0 + \Delta x, y)$.

Система уравнений (2), (13), (17) решается относительно T^*, E_N, u методом суммарной аппроксимации [4], т. е. разбивается на ряд последовательно решаемых подсистем, а именно (краевые условия везде опущены):

$$\text{I) } dT^*/dx = 0, \quad dy/dx = v/u, \quad du/dx = 0, \quad dy/dx = v/u, \quad dE_N/dx = 0,$$
$$d/dx = \partial/\partial x + dy/dx \cdot \partial/\partial y;$$

$$\text{II) } \rho u c_p \partial T^*/\partial x = \partial(q + u\tau)/\partial y, \; \rho u \partial u/\partial x = \partial \tau/\partial y, \; \rho u \partial E_N/\partial x = \partial J_v/\partial y,$$
$$q = \lambda \partial T/\partial y;$$

$$\text{III) } \partial T^*/\partial x = 0, \; c_p \partial T/\partial x + u \partial u/\partial x = 0, \; \rho u \partial u/\partial x + dp/dx = 0, \; u \partial u/\partial x +$$
$$+ 1/\rho \cdot dp/dx = 0, \; \rho u \partial E_N/\partial x = 0;$$

$$\text{IV) } \rho u c_p \partial T^*/\partial x = Q_{\text{рел}} + (1 - \eta_{\text{р}}) jE, \; \rho u \partial u/\partial x = 0, \; \rho u \partial E_N/\partial x =$$
$$= -\rho(E_N - E_{N_{\text{р}}})/\tau_N + \eta_{\text{р}} jE.$$

Определив u, E_N, $T^*(x_0 + \Delta x, y)$ и в соответствии с пп. «а», «б» v, $dp/dx(x_0 + \Delta x, y)$, делаем следующий шаг по x и т. д. Разбиение по оси y равномерное и составляло $N_y = h/\Delta y = 50$—100 интервалов. Шаг по x выбирался из условий устойчивости численного интегрирования подзадач I—IV; число таких неравномерных разбиений по оси x $N_x \gtrsim 10^3$. Очевидное преимущество предложенного метода состоит в возможности рассчитывать характеристики ГРК сколь угодно большой длины, точнее, такой, что $L/h \gg 1$.

Численное решение системы уравнений проверялось подсчетом расхода газа на входе в разных поперечных сечениях и на выходе камеры, а также баланса энергии. Хотя расчет не использует разностные аналоги законов сохранения, балансы массы и энергии сходятся с вполне удовлетворительной точностью $\leqslant 3\%$.

Другая проверка состояла в расчете стационарного распределения газодинамических параметров в камере в отсутствие тлеющего разряда. Для произвольного профиля скорости на входе ГРК $u(0, y)$ расчет дает при $L \to \infty$ зависимость на выходе $u(L, y)$, приближающуюся к пуазейлевской.

Применимость используемого приближения ламинарного погранслоя на первый взгляд вызывает сомнение, поскольку в типичных для быстропроточных лазеров условиях $\mathrm{Re} \sim 10^5$ и более. Однако тщательное изучение вопроса показало, что при исследуемых параметрах потока газа $\mathrm{Re} < \mathrm{Re}_{\text{кр}}$ и, по-видимому, нет оснований считать неверным используемое приближение.

В качестве примера рассмотрим расчет газоразрядной камеры с характерными параметрами: $L/h = 25$, удельный расход газа 2 г/(см^2·с), симметричный на входе профиль продольной составляющей скорости потока газа (рис. 2), средняя скорость $\bar{u} = \frac{1}{h}\int_0^h u(0, y)\,dy = 100$ м/с. Объемную мощность разряда зададим однородной по пространству ГРК (за исключением приэлектродных областей), $jE = 3 \cdot 10^6$ Вт/м^3, КПД разряда $\eta_{\text{р}} = 0{,}95$ [5]. Для смеси $CO_2 : N_2 :$ He = 2 : 49 : 49 константы релаксации взяты такими, что $(p\tau_{N_2-N_2})^{-1} = 10^{-3}$ (Па·с)$^{-1}$, $(p\tau_{N_2-\mathrm{He}})^{-1} = 5{,}1 \cdot 10^{-5}$ (Па·с)$^{-1}$ при 300 К.

На рис. 2 изображена продольная составляющая скорости потока газа $u(x, y)$ в различных сечениях ГРК, указаны значения скорости на оси симметрии камеры. Видно, что профиль скорости сглаживается к выходу камеры, растет размер пограничного слоя. По мере движения к выходу ГРК газ подогревается и давление возрастает. В расчетах также учтено наличие приэлектродных областей разряда — jE задано в узкой области у электродов в соответствии с известными величинами анодного и катодного падений потенциала, а КПД разряда у катода $\eta_{\text{р}}|_{\text{К}} = 0$.

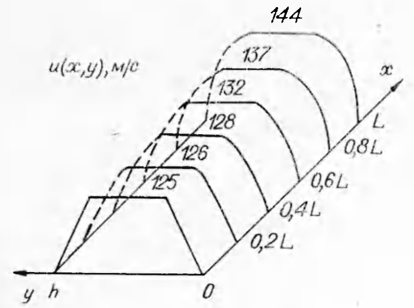

Рис. 2

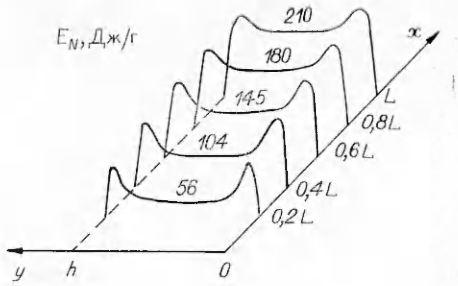

Рис. 3

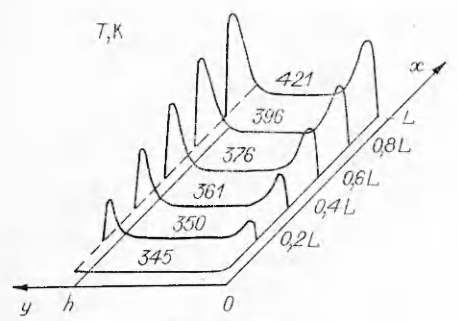

Рис. 4

Принята во внимание зависимость τ_N от $\Theta = T_N/T$ — отношения колебательной температуры к поступательной, когда при достижении некоторого порогового значения $\Theta_{\text{кр}}\tau_N$ падает на два и более порядков [5]. Релаксация колебательно-возбужденных молекул на стенках ГРК учитывается условием на стенке

$$D_v^* \partial E_N/\partial y \Big|_{\substack{y=0\\ y=h}} = -2\varepsilon_v/(2-\varepsilon_v)\times \times \sqrt{\gamma RT}/4\cdot E_N \Big|_{\substack{y=0\\ y=h}},$$

возбужденные молекулы достигают стенки в результате диффузии и релаксируют с коэффициентом аккомодации ε_v [6] (полагалось $\varepsilon_v = 1$).

За счет меньшей скорости потока у стенок газ здесь дольше пребывает в камере и «накачивается» сильнее (рис. 3, где изображено распределение плотности колебательной энергии $E_N(x, y)$ по ГРК, указаны значения E_N на оси симметрии камеры). На рис. 4 приведено распределение температуры $T(x, y)$ по ГРК, даны значения температуры на оси симметрии. Видно, что газ больше нагревается в пограничном слое в результате релаксации. В непосредственной близости у стенки газ холоднее из-за теплоотвода в нее. Несмотря на задаваемый высокий КПД разряда ($\eta_{\text{р}} = 0{,}95$), с учетом наличия пограничного слоя доля колебательной энергии довольно низка и составляет $\leqslant 0{,}6$ в общем балансе энергии камеры.

В рамках рассматриваемой в работе системы уравнений можно провести аналогичное исследование и при наличии турбулентности, для этого достаточно добавить в уравнения, где требуется, турбулентные коэффициенты переноса.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Конт-Белло Ж.** Турбулентное течение в канале с параллельными стенками.— М.: Мир, 1968.
2. **Шлихтинг С.** Теория пограничного слоя.— М.: Наука, 1974.
3. **Труды** IX Всесоюзной школы-семинара «Численные методы динамики вязкой жидкости».— Новосибирск, 1983.
4. **Самарский А. А.** Введение в теорию разностных схем.— М.: Наука, 1971.
5. **Гордиец Б. Ф., Осипов А. И., Шелепин Л. А.** Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры.— М.: Наука, 1980.
6. **Гершензон Ю. М., Розенштейн В. Б., Уманский С. Я.** Гетерогенная релаксация колебательной энергии молекул // Химия плазмы.— М.: Атомиздат, 1977.— Вып. 4.

Поступила 26/V 1986 г.