

УДК 532.5

ХИМИЧЕСКИ АКТИВНОЕ ГИДРОМАГНИТНОЕ ТЕЧЕНИЕ НЕНЬЮТОНОВСКОЙ ЖИДКОСТИ ВТОРОГО КЛАССА В ПОЛУПОРИСТОМ КАНАЛЕ

З. Аббас, Б. Ахмад*, Ш. Али

Исламский университет Бахавалпура, 63100 Бахавалпур, Пакистан

* Университет г. Вах, Вах, Пакистан

E-mails: za_qau@yahoo.com, bilalahmadgondal@yahoo.com, shafgatmath@hotmail.com

Для изучения влияния массообмена и электропроводности на движение неньютоновской жидкости второго класса проведен анализ течения в полупористом канале с верхней пористой стенкой и нижней непроницаемой стенкой при наличии химической реакции. Преобразованием подобия основные управляющие уравнения течения преобразованы в систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений. С использованием метода гомотопического анализа построено приближенное аналитическое решение нелинейных дифференциальных уравнений. Анализируются поля течения и концентрации при различных значениях параметров задачи. Получены значения коэффициента поверхностного трения и скорости массообмена на стенке.

Ключевые слова: неньютоновская жидкость, магнитогидродинамическое течение, полупористый канал, химическая реакция.

DOI: 10.15372/PMTF20150515

Введение. В настоящее время большое внимание уделяется исследованию течений в пористых каналах или трубах, имеющих различные приложения в машиностроении и биоинженерии. Течения такого типа встречаются при диализе крови в искусственной почке, кровотоке в капиллярах, при эксплуатации фильтров, пористых и полупористых труб, а также при управлении охлаждением в пограничном слое. В то же время существует большое количество жидкостей, не удовлетворяющих линейному соотношению между напряжениями сдвига и скоростью деформации (неньютоновские жидкости). Поэтому одновременный учет вязкости и упругости усложняет дифференциальные уравнения, описывающие течения неньютоновских жидкостей [1–4]. В работе [5] изучено ламинарное течение в пограничном слое электрически проводящей вязкой жидкости в полупористом канале с подвижной границей и с использованием метода возмущений и численного метода получено решение задачи. В [6] рассмотрено аналитическое решение для гидромагнитного течения вязкоупругой жидкости в пористом канале с пористыми стенками, полученное методом гомотопического анализа (МГА). В [7] проведен анализ процесса теплообмена в магнитогидродинамическом (МГД) течении жидкости второго класса в пористом канале, а в [8] — анализ теплообмена с учетом теплового излучения в МГД-течении конвективной жидкости Максвелла в канале с пористыми стенками. В работе [9] с использованием МГА получено решение задачи о ламинарном вязком течении в полупористом канале при

наличии однородного магнитного поля. В [10] выполнен анализ процесса теплообмена в МГД-течении жидкости второго класса в канале с пористой стенкой и с помощью метода Рунге — Кутты четвертого порядка и квазилинейного метода стрельбы получены численные решения нелинейных уравнений. Точные решения уравнений Навье — Стокса в слое жидкости между движущимися параллельными пластинами исследованы в [11]. В [12] проведено моделирование поперечных автоколебаний круглого цилиндра в несжимаемом течении в плоском канале при наличии циркуляции. Точные решения уравнений Навье — Стокса для слоя жидкости, расположенного между параллельными пластинами, расстояние между которыми изменяется по произвольному степенному закону, при выполнении условия прилипания на границе изучены в [13]. В [14] рассмотрено течение вязкой несжимаемой жидкости в деформируемой трубке и получено решение при малых и умеренных числах Рейнольдса.

В данной работе с использованием МГА [15–24] изучается влияние массообмена и электропроводности на течение жидкости второго класса в полупористом канале при наличии химической реакции. Исследуется влияние различных параметров задачи на характер течения и концентрацию.

1. Постановка задачи. Рассмотрим двумерное ламинарное стационарное течение электрически проводящей несжимаемой вязкоупругой жидкости второго класса в полупористом канале шириной H (рис. 1). Предполагается, что верхняя стенка канала пористая, а нижняя непроницаема. Ось x направлена параллельно стенке канала, ось y — перпендикулярно ей. Постоянное магнитное поле с напряженностью \mathbf{B}_0 ориентировано вдоль оси y , а напряженность электрического поля полагается равной нулю в силу предположения о малости магнитного числа Рейнольдса. Массообмен вызван течением жидкости, содержащей примесь, вдоль стенки канала и наличием поля с напряженностью \mathbf{B} . Пусть c_1 — концентрация примеси на нижней стенке, c_0 — концентрация примеси на верхней стенке при $y = H$. При этих предположениях в приближении пограничного слоя управляющие уравнения для жидкости второго класса и поля концентрации имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \quad (1)$$

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(u \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + v \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} \right) - \sigma \frac{B_0^2 u}{\rho}, \quad (2)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y};$$

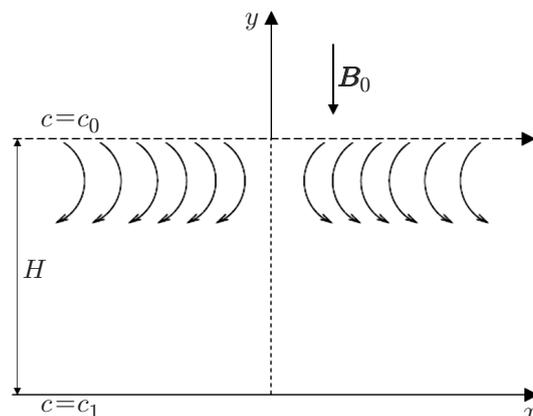


Рис. 1. Схема течения

$$u \frac{\partial c}{\partial x} + v \frac{\partial c}{\partial y} = D \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} - k_1 c, \quad (3)$$

где u, v — компоненты скорости в направлениях x, y соответственно; ρ — плотность жидкости; p — давление; α_1 — параметр вязкоупругости, определяющий тип неньютоновской жидкости; σ — электропроводность жидкости; ν — кинематическая вязкость; D — коэффициент диффузии примеси в жидкости; k_1 — постоянная скорости гомогенной необратимой реакции первого порядка; c — концентрация примеси в жидкости.

Исключая градиент давления $\partial p/\partial x$ и $\partial p/\partial y$ из уравнений (2) путем перекрестного дифференцирования, получаем дифференциальное уравнение в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial x} + u \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \nu \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} - \sigma \frac{B_0^2 u}{\rho} \frac{\partial u}{\partial y} + \\ + \frac{\alpha_1}{\rho} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + u \frac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^3} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + \right. \\ \left. + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3} + v \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \right). \quad (4) \end{aligned}$$

Граничные условия для полей скорости и концентрации имеют вид

$$\begin{aligned} y = 0: \quad u = 0, \quad v = 0, \quad c = c_1, \\ y = H: \quad u = 0, \quad v = -U, \quad c = c_0. \end{aligned}$$

Чтобы получить решение рассматриваемой задачи, вычислим поле скорости, а затем найдем решение уравнения для концентрации. Уравнения пограничного слоя (3), (4) являются нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных, и их решение можно получить только численно. Однако в частном случае уравнения этого типа допускают автомодельное решение. Поэтому путем преобразований данные уравнения можно свести к системе нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, которая решается аналитически и численно. Следуя [10, 25], будем искать автомодельное решение, удовлетворяющее (1), в виде

$$u = \frac{U}{H} x f'(\eta), \quad v = -U f(\eta), \quad \eta = \frac{y}{H}, \quad (5)$$

где штрих обозначает дифференцирование по η . Для уравнения концентрации (3) используем следующее преобразование:

$$c = c_0 + (c_1 - c_0)\varphi(\eta). \quad (6)$$

С помощью уравнений (5), (6) уравнение закона сохранения массы удовлетворяется тождественно, уравнения (3), (4) принимают вид

$$\text{Re} (f' f'' - f f''') = f^{\text{IV}} + K \text{Re} (f' f^{\text{IV}} - f f^{\text{V}}) - M^2 f''; \quad (7)$$

$$\varphi'' + \text{Re Sc} f \varphi' = \text{Sc} \gamma \varphi \quad (8)$$

и удовлетворяют граничным условиям

$$\begin{aligned} \eta = 0: \quad f = 0, \quad f' = 0, \quad \varphi = 1, \\ \eta = 1: \quad f = 1, \quad f' = 0, \quad \varphi = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

Здесь $\text{Re} = \rho U H / \mu$ — число Рейнольдса; $K = \alpha_1 / (\rho H^2)$ — безразмерный параметр вязкоупругости; $M = H B_0 (\sigma / \mu)^{1/2}$ — число Гартмана (магнитный параметр); $\text{Sc} = \nu / D$ — число Шмидта; $\gamma = k_1 H^2 / \nu$ — параметр скорости химической реакции жидкости.

Выражения для параметра поверхностного трения $f''(0)$ и скорости массообмена $\varphi'(0)$ на непроницаемой стенке имеют вид

$$\tau_{yx} = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0}, \quad \text{Sh} = \frac{1}{c_0 - c_1} \left. \frac{\partial c}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (10)$$

(Sh — число Шервуда). В безразмерной форме уравнения (10) записываются следующим образом:

$$\tau_w = \frac{\mu \nu^n}{H^2} f''(0), \quad \text{Sh} = -\varphi'(0).$$

Следует отметить, что при наличии в уравнениях члена упругости K они являются дифференциальными уравнениями четвертого-пятого порядка [10]. Поэтому для получения решения требуется использовать дополнительные граничные условия. При решении нелинейного уравнения (8) целесообразно применить метод возмущений. Впервые этот метод был использован в [10] при $K \ll 1$, причем полученная система уравнений решалась численно. В данной работе с использованием МГА построено аналитическое решение в виде ряда при различных значениях K и других параметров в области $0 \leq \eta \leq 1$.

2. Решение методом гомотопического анализа и его сходимости. Для получения решения методом гомотопического анализа можно выразить поля скорости $f(\eta)$ и концентрации $\varphi(\eta)$ через ряды основных функций η^m ($m = 0, 1, 2, \dots$) в следующем виде:

$$f(\eta) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \eta^m, \quad \varphi(\eta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \eta^n$$

(a_m, b_m — константы, которые необходимо определить). С помощью граничных условий (9) задаются функции

$$f_0(\eta) = 2\eta^2 - \eta^4, \quad \varphi_0(\eta) = 1 - \eta \quad (11)$$

в качестве начального приближения для функций $f(\eta)$ и $\varphi(\eta)$. Введем вспомогательные линейные операторы

$$L_f(f) = \frac{\partial^4 f}{\partial \eta^4}, \quad L_\varphi(f) = \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2},$$

удовлетворяющие соотношениям

$$L_f[C_1\eta^3 + C_2\eta^2 + C_3\eta + C_4] = 0, \quad L_\varphi[C_5\eta + C_6] = 0,$$

где C_i ($i = 1, \dots, 6$) — произвольные постоянные, которые могут быть определены при использовании граничных условий. Вводя ненулевые вспомогательные параметры h_f, h_φ , задачу о деформации нулевого порядка можно сформулировать следующим образом:

$$\begin{aligned} (1-q)L_f[\hat{f}(\eta; q) - f_0(\eta)] &= qh_f N_f[\hat{f}(\eta; q)], \\ (1-q)L_\varphi[\hat{\varphi}(\eta; q) - \varphi_0(\eta)] &= qh_\varphi N_\varphi[\hat{\varphi}(\eta; q), \hat{f}(\eta; q)]; \\ \hat{f}(0, q) = 0, \quad \frac{\partial \hat{f}(0; q)}{\partial \eta} &= 0, \quad \hat{\varphi}(0, q) = 1, \\ \hat{f}(1, q) = 1, \quad \frac{\partial \hat{f}(1; q)}{\partial \eta} &= 0, \quad \hat{\varphi}(1, q) = 0. \end{aligned} \quad (12)$$

Здесь $q \in [0, 1]$ — параметр вложения; N_f, N_φ — нелинейные операторы:

$$\begin{aligned}
 N_f[\hat{f}(\eta, q)] &= \frac{\partial^4 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^4} - \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta} \frac{\partial^3 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^3} \right) + \\
 &+ K \operatorname{Re} \left(\frac{\partial \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta} \frac{\partial^4 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^4} - \frac{\partial \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta} \frac{\partial^5 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^5} \right)^2 - M^2 \frac{\partial^2 \hat{f}(\eta, q)}{\partial \eta^2}, \\
 N_\varphi[\hat{\varphi}(\eta, q), \hat{f}(\eta, q)] &= \frac{\partial^2 \hat{\varphi}(\eta, q)}{\partial \eta^2} + \operatorname{Re} \operatorname{Sc} \hat{f}(\eta, q) \frac{\partial \hat{\varphi}(\eta, q)}{\partial \eta} - \operatorname{Sc} \gamma \hat{\varphi}(\eta, q).
 \end{aligned}$$

Разлагая $\hat{f}(\eta; q)$ и $\hat{\varphi}(\eta, q)$ в ряд Тейлора относительно q , имеем

$$\hat{f}(\eta, q) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta)q^m, \quad \hat{\varphi}(\eta, q) = \varphi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\eta)q^m, \quad (13)$$

где

$$f_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{f}(\eta; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}, \quad \varphi_m(\eta) = \frac{1}{m!} \left. \frac{\partial^m \hat{\varphi}(\eta; q)}{\partial q^m} \right|_{q=0}.$$

Уравнения деформации нулевого порядка (12) содержат два вспомогательных параметра h_f и h_φ . Сходимость рядов, заданных соотношениями (13), зависит от этих параметров. Полагая параметры h_f и h_φ выбранными таким образом, что указанные ряды сходятся при $q = 1$, решение можно представить в следующем виде:

$$f(\eta) = f_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} f_m(\eta), \quad \varphi(\eta) = \varphi_0(\eta) + \sum_{m=1}^{\infty} \varphi_m(\eta). \quad (14)$$

Дифференцируя m раз уравнения деформаций нулевого порядка (12) относительно параметра вложения q , а затем полагая $q = 0$, получаем уравнения деформации m -го порядка

$$L_f[f_m(\eta) - \chi_m f_{m-1}(\eta)] = h_f R_m^f(\eta), \quad L_\varphi[\varphi_m(\eta) - \chi_m \varphi_{m-1}(\eta)] = h_\varphi R_m^\varphi(\eta), \quad (15)$$

удовлетворяющие граничным условиям

$$f_m(0) = f'_m(0) = f_m(1) = f'_m(1) = 0, \quad \varphi_m(0) = \varphi_m(1) = 0, \quad (16)$$

где

$$\begin{aligned}
 R_m^f(\eta) &= f_{m-1}^{\text{IV}}(\eta) - M^2 f_{m-1}''(\eta) + \\
 &+ \sum_{k=0}^{m-1} [K \operatorname{Re} (f'_{m-1-k} f_k^{\text{IV}} - f_{m-1-k} f_k^{\text{V}}) - \operatorname{Re} (f'_{m-1-k} f_k'' - f_{m-1-k} f_k''')],
 \end{aligned}$$

$$R_m^\varphi(\eta) = \varphi_{m-1}''(\eta) + \operatorname{Sc} \gamma \varphi_{m-1}(\eta) + \sum_{k=0}^{m-1} \operatorname{Re} \operatorname{Sc} (f_{m-1-k} \varphi_k'),$$

$$\chi_m = \begin{cases} 0, & m \leq 1, \\ 1, & m > 1. \end{cases}$$

Общее решение уравнений (15) имеет вид

$$f_m(\eta) = f'_m(\eta) + C_1 \eta^3 + C_2 \eta^2 + C_3 \eta + C_4, \quad \varphi_m(\eta) = \varphi'_m(\eta) + C_5 \eta + C_6,$$

где постоянные интегрирования C_i ($i = 1, \dots, 6$) определены из граничных условий (16):

$$C_4 = -f'_m(0), \quad C_3 = -\left. \frac{\partial f'_m(\eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=0}, \quad C_1 = -\left. \frac{\partial f'_m(\eta)}{\partial \eta} \right|_{\eta=1} + 2f'_m(1) + 2C_4 + C_3,$$

$$C_2 = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial f'_m(\eta)}{\partial \eta} \Big|_{\eta=1} + 3C_1 + C_3 \right), \quad C_6 = -\varphi'_m(0), \quad C_5 = -\varphi'_m(1) - C_6.$$

Далее линейные неоднородные уравнения (15) решаются с использованием пакета программ символического вычисления Mathematica.

Аналитическое решение системы уравнений (15), (16) может быть представлено в виде

$$f_m(\eta) = \sum_{k=2}^{5m+4} a_{m,k}(\eta)\eta^k, \quad \varphi_m(\eta) = \sum_{k=1}^{5m+1} b_{m,k}(\eta)\eta^k, \quad m \geq 1,$$

при $m = 1, 2, 3, \dots$ коэффициенты $a_{m,k}$ и $b_{m,k}$ могут быть определены рекуррентно с использованием соотношений

$$a_{0,1} = 0, \quad a_{0,2} = 2, \quad a_{0,3} = 0, \quad a_{0,4} = -1, \quad b_{0,0} = 1, \quad b_{0,1} = -1,$$

и соотношений (11). При $m = 1$ имеем

$$f_1(\eta) = \sum_{k=2}^9 a_{1,k}(\eta)\eta^k, \quad \varphi_1(\eta) = \sum_{k=1}^6 b_{1,k}(\eta)\eta^k,$$

где

$$\begin{aligned} a_{1,2} &= 2 - h_f - \frac{h_f M^2}{15} - \frac{5h_f \text{Re}}{21} - \frac{8h_f K \text{Re}}{7}, \\ a_{1,3} &= 2h_f + \frac{h_f M^2}{5} + \frac{227h_f \text{Re}}{630} + \frac{64h_f K \text{Re}}{35}, \quad a_{1,4} = -1 - h_f - \frac{h_f M^2}{6}, \\ a_{1,5} &= -\frac{2h_f \text{Re}}{15} - \frac{4h_f K \text{Re}}{5}, \quad a_{1,6} = \frac{h_f M^2}{30}, \quad a_{1,7} = \frac{2h_f \text{Re}}{105} + \frac{4h_f K \text{Re}}{35}, \quad a_{1,9} = \frac{h_f \text{Re}}{126}, \\ b_{1,0} &= 1, \quad b_{1,1} = -1 + \frac{2h_\varphi \text{Re Sc}}{15} + \frac{h_\varphi \gamma \text{Sc}}{3}, \quad b_{1,2} = -\frac{h_\varphi \gamma \text{Sc}}{2}, \quad b_{1,3} = \frac{h_\varphi \gamma \text{Sc}}{6}, \\ b_{1,4} &= -\frac{h_\varphi \text{Re Sc}}{6}, \quad b_{1,5} = 0, \quad b_{1,6} = \frac{h_\varphi \text{Re Sc}}{30}, \quad \dots \end{aligned}$$

В [15] показано, что решения для рядов, полученные с помощью МГА, не расходятся и должны сходиться к точному решению исходных исследуемых нелинейных задач. Интервалы значений h_f и h_φ , при которых ряды сходятся, показаны на рис. 2. Видно, что на h -кривых имеются участки постоянных значений $f''(0)$, $\varphi'(0)$ при $-1,8 \leq h_f \leq 0,3$, $-1,7 \leq h_\varphi \leq -0,1$. Данные о сходимости решений приведены в табл. 1. Из табл. 1 следует, что начиная с приближения 10-го порядка ряды решения сходятся.

3. Результаты исследования и их обсуждение. Решая аналитически уравнения (7), (8) с граничными условиями (9) и используя МГА, вычислим компоненты скорости $f'(\eta)$, $f(\eta)$ и концентрацию $\varphi(\eta)$. Для оценки влияния различных параметров задачи (параметра вязкоупругости K , числа Рейнольдса Re , магнитного параметра M , числа Шмидта Sc и параметра химической реакции γ) на рис. 3–8 приведены распределения компонент скорости жидкости $f'(\eta)$, $f(\eta)$, концентрации $\varphi(\eta)$, коэффициента поверхностного трения $f''(0)$ и числа Шервуда $\varphi'(0)$. Значения $f''(0)$ и $-\varphi'(0)$ при различных значениях параметров задачи приведены в табл. 2–4. Результаты расчетов $f''(0)$ хорошо согласуются с данными [10].

На рис. 3 показано изменение скорости жидкости $f'(\eta)$ и $f(\eta)$ при $M = 2$, $\text{Re} = 3$ и различных значениях параметра вязкоупругости K . Из рис. 3,б следует, что с увеличением параметра вязкоупругости K скорость уменьшается во всей области течения. Кроме того, при наличии магнитной силы при малых значениях параметра вязкоупругости возникает течение Пуазейля [10], а при больших значениях параметра K максимум скорости смещается к пористой стенке (см. рис. 3,а).

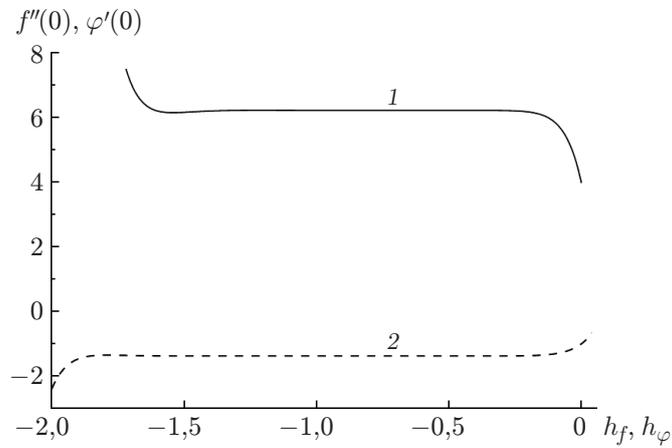


Рис. 2. h -кривые $f''(0)$ (1) и $\varphi'(0)$ (2) в случае приближения 15-го порядка при $K = 1/5$, $Re = 1/2$, $M = 0$

Таблица 1

Сходимость решения для приближений различного порядка при $K = 1/5$, $Re = 1/2$, $M = 0$

Порядок приближения	$f''(0)$	$-\varphi'(0)$	Порядок приближения	$f''(0)$	$-\varphi'(0)$
1	5,388 00	1,224 00	15	6,148 16	1,351 52
5	6,137 81	1,349 20	20	6,148 16	1,351 52
10	6,148 13	1,351 50	25	6,148 16	1,351 52
12	6,148 16	1,351 51	30	6,148 16	1,351 52

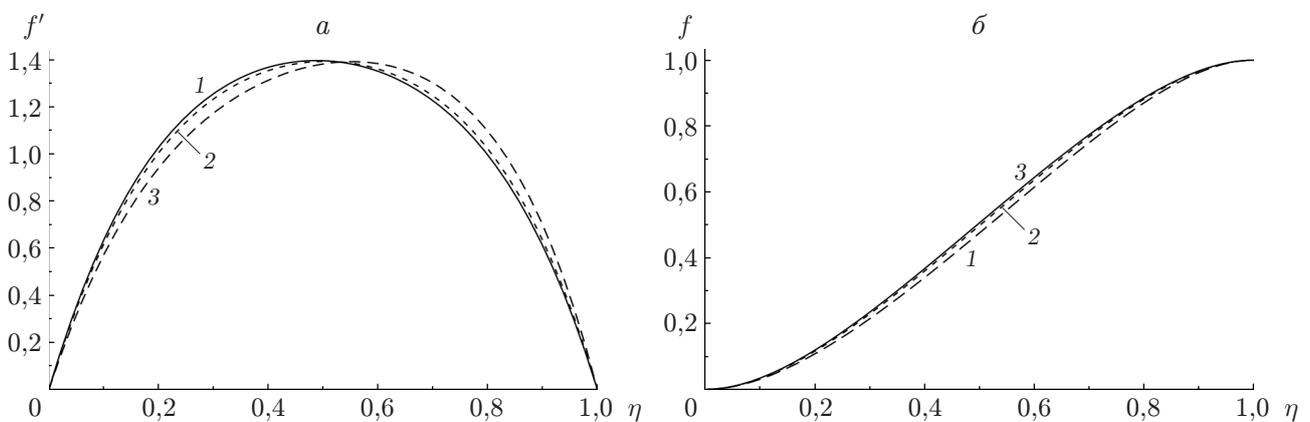


Рис. 3. Влияние параметра вязкоупругости K на компоненты скорости $f'(\eta)$ (а) и $f(\eta)$ (б) при $M = 2$, $Re = 3$:
 1 — $K = 0,01$, 2 — $K = 0,05$, 3 — $K = 0,15$

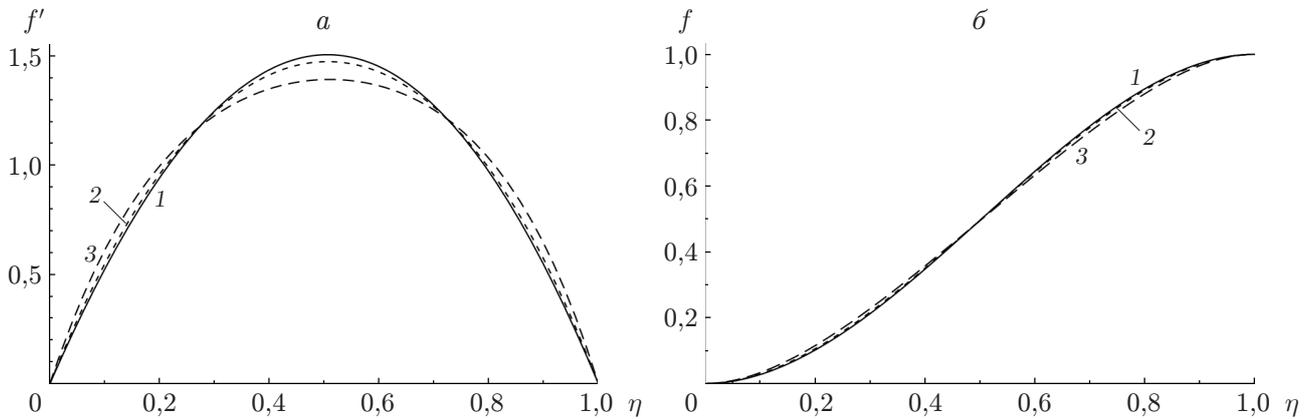


Рис. 4. Влияние магнитного параметра M на компоненты скорости $f'(\eta)$ (а) и $f(\eta)$ (б) при $Re = 3$, $K = 1$:
1 — $M = 0$, 2 — $M = 3$, 3 — $M = 6$

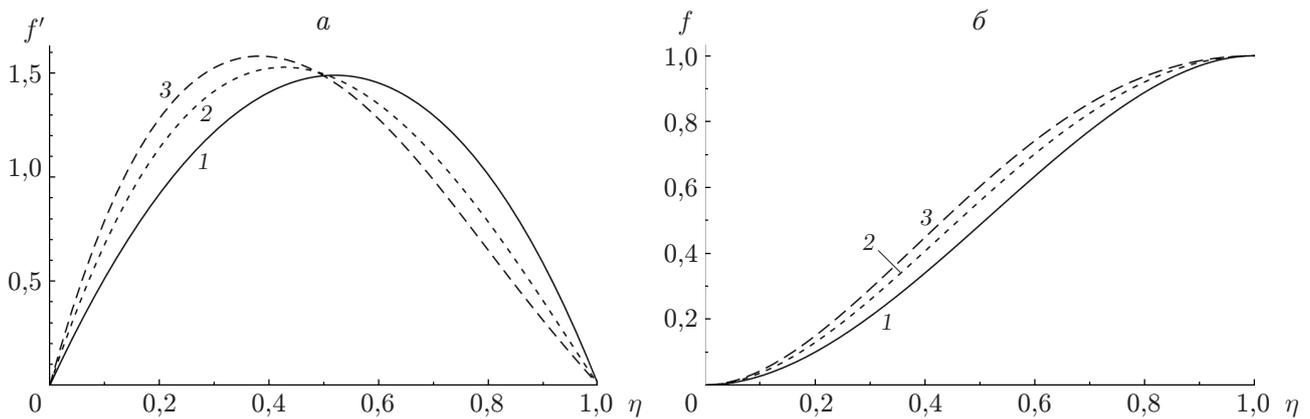


Рис. 5. Влияние числа Рейнольдса Re на компоненты скорости $f'(\eta)$ (а) и $f(\eta)$ (б) при $M = 0$, $K = 0,4$:
1 — $Re = 1$, 2 — $Re = 10$, 3 — $Re = 20$

На рис. 4 показано влияние магнитного параметра M на движение жидкости при $Re = 3$, $K = 1$. Видно, что при небольших значениях M влияние вязкости является более существенным по сравнению с влиянием магнитного поля, поэтому профиль скорости является почти параболическим, а при $M = 0$ (немагнитная жидкость) — параболическим. Кроме того, вблизи стенки толщина пограничного слоя уменьшается. На рис. 5 показано влияние вязкости на касательные $f'(\eta)$ и нормальные $f(\eta)$ компоненты скорости при $K = 0,4$, $M = 0$. На рис. 5,б видно, что с увеличением числа Рейнольдса Re скорость увеличивается.

На рис. 6 показано влияние параметра вязкоупругости K на концентрацию $\varphi(\eta)$ при $Sc = 1$, $\gamma = 2$, $M = 6$. Видно, что с увеличением значения K концентрация увеличивается. На рис. 7 показано изменение концентрации $\varphi(\eta)$ при $Sc = 1$, $\gamma = 2$, $M = 6$, $K = 0$ и различных значениях Re . Видно, что при уменьшении вязкости вследствие увеличения числа Рейнольдса концентрация уменьшается. Изменение концентрации $\varphi(\eta)$ при $Re = 5$, $\gamma = 2$, $K = 0$, $M = 6$ и различных значениях числа Шмидта Sc показано на рис. 8. Видно, что с увеличением значений Sc , т. е. с уменьшением вязкости, концентрация уменьшается. На рис. 9 показано изменение концентрации $\varphi(\eta)$ в зависимости от параметра химической ре-

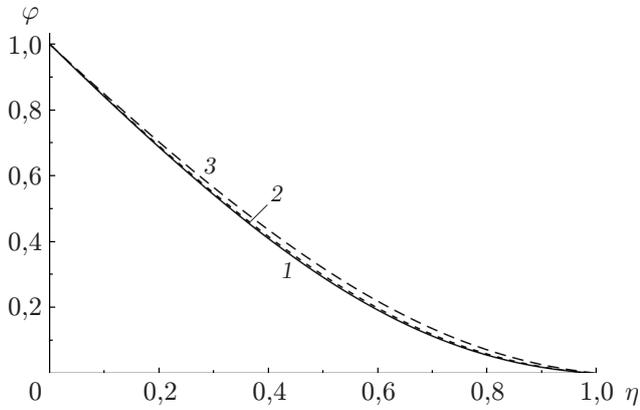


Рис. 6

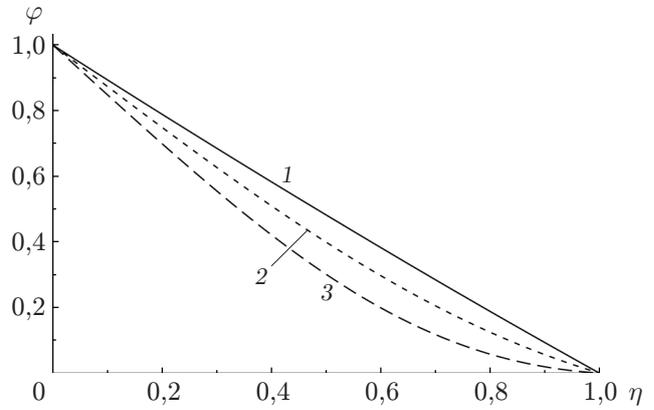


Рис. 7

Рис. 6. Влияние параметра K на концентрацию $\varphi(\eta)$ при $Sc = 1$, $\gamma = 2$, $M = 6$:
 1 — $K = 0$, 2 — $K = 0,2$, 3 — $K = 0,4$

Рис. 7. Влияние числа Рейнольдса Re на концентрацию $\varphi(\eta)$ при $Sc = 1$, $\gamma = 2$, $K = 0$,
 $M = 6$:
 1 — $Re = 1$, 2 — $Re = 10$, 3 — $Re = 20$

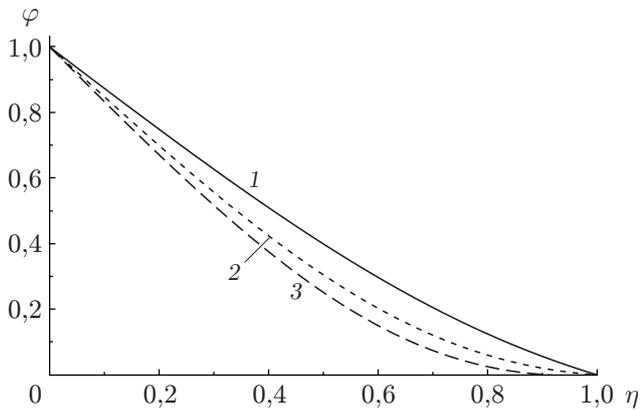


Рис. 8

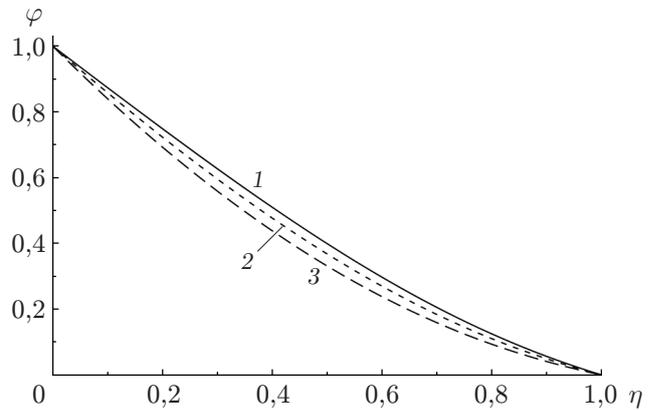


Рис. 9

Рис. 8. Влияние числа Шмидта Sc на концентрацию $\varphi(\eta)$ при $Re = 5$, $\gamma = 2$, $K = 0$,
 $M = 6$:
 1 — $Sc = 1$, 2 — $Sc = 2$, 3 — $Sc = 4$

Рис. 9. Влияние параметра скорости химической реакции γ на концентрацию $\varphi(\eta)$
 при $Re = 5$, $Sc = 1$, $K = 0$, $M = 6$:
 1 — $\gamma = 0$, 2 — $\gamma = 5$, 3 — $\gamma = 10$

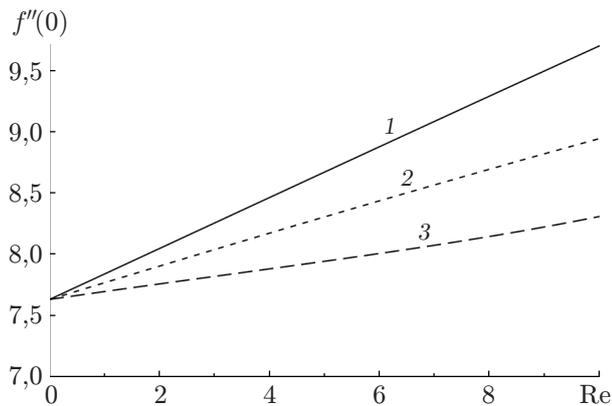


Рис. 10

Рис. 10. Влияние параметра вязкоупругости K на сдвиговое напряжение на поверхности стенки $f''(0)$ при $Sc = 1$, $M = 3$:

1 — $K = 0$, 2 — $K = 0,03$, 3 — $K = 0,06$

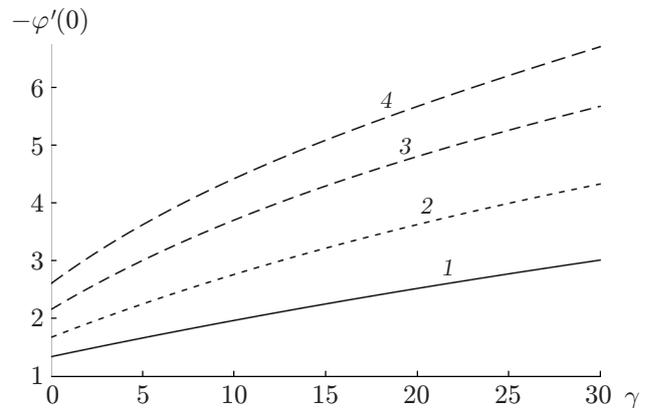


Рис. 11

Рис. 11. Влияние числа Шмидта на скорость массообмена на стенке $-\varphi'(0)$ при $Re = 10$, $K = 0,5$, $M = 3$:

1 — $Sc = 1$, 2 — $Sc = 2$, 3 — $Sc = 3,5$, 4 — $Sc = 5$

акции при $Re = 5$, $K = 0$, $M = 6$. Видно, что с увеличением значения γ , т. е. с увеличением скорости химической реакции, концентрация уменьшается.

На рис. 10 представлена зависимость сдвигового напряжения на поверхности стенки $f''(0)$ от числа Рейнольдса Re при различных значениях параметра вязкоупругости K . Видно, что при постоянном значении K с увеличением значения Re значения $f''(0)$ увеличиваются, в то время как при постоянном значении Re с увеличением значения K значение $f''(0)$ уменьшается. На рис. 11 представлена зависимость скорости массообмена на стенке $-\varphi'(0)$ от параметра химической реакции γ при различных значениях числа Шмидта Sc . Установлено, что с увеличением числа Шмидта Sc и параметра химической реакции γ значение $-\varphi'(0)$ увеличивается.

В табл. 2 приведены значения сдвигового напряжения $f''(0)$ и скорости массообмена $-\varphi'(0)$ на стенке при $Sc = 1$, $\gamma = 1$ и различных значениях M , Re , K . Из табл. 2 следует, что значения сдвигового напряжения $f''(0)$ увеличиваются с увеличением Re и K (см. рис. 10). Кроме того, значение $\varphi'(0)$ увеличивается с увеличением значения Re и уменьшается с увеличением M и K . В табл. 3, 4 приведены значения сдвигового напряжения и числа Шервуда (скорость массообмена на стенке) при $Re = 5$, $K = 0,1$ и различных значениях M , Sc и γ . Из табл. 4 следует, что значение $\varphi'(0)$ увеличивается с увеличением γ (см. рис. 11).

Закключение. В работе проведено исследование массообмена ламинарного МГД-течения жидкости второго класса при наличии химической реакции. С использованием метода гомотопического анализа получена система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и найдено ее приближенное аналитическое решение. Исследовано влияние различных физических параметров задачи на поля скорости и концентрации. Результаты исследования позволяют сделать следующие выводы: с увеличением числа Рейнольдса Re увеличиваются напряжения сдвига; с увеличением параметра M скорость жидкости в центре канала уменьшается; с увеличением значений K концентрация увеличивается, в то

Таблица 2

Значения $f''(0)$ и $\varphi'(0)$ при $Sc = 1$, $\gamma = 1$ и различных значениях параметров Re , M и K

Re	M = 0					M = 3			
	K = 0			K = 0,01		K = 0		K = 0,01	
	$f''(0)$ (см. [10])	$f''(0)$	$-\varphi'(0)$	$f''(0)$	$-\varphi'(0)$	$f''(0)$	$-\varphi'(0)$	$f''(0)$	$-\varphi'(0)$
0	—	6,000 00	1,313 04	6,000 000	1,313 04	6,847 37	1,313 04	6,847 35	1,313 03
0,5	6,2266	6,227 92	1,377 54	6,226 740	1,377 53	7,032 89	1,377 94	7,032 70	1,377 93
1,0	6,4539	6,454 26	1,443 52	6,449 205	1,443 48	7,218 10	1,443 98	7,217 72	1,443 97
3,0	—	7,337 35	1,714 29	7,282 325	1,713 03	7,951 44	1,712 45	7,950 13	1,712 42
5,0	8,1662	8,173 87	1,980 61	8,010 667	1,975 01	8,664 49	1,974 42	8,661 83	1,974 33
10,0	10,0307	10,036 77	2,569 22	9,424 240	2,538 65	6,847 37	1,313 04	10,314 00	2,552 94
15,0	—	11,620 81	3,053 42	10,438 050	2,984 81	11,796 80	3,032 30	11,780 80	3,031 46

Таблица 3

Значения $f''(0)$ при $\gamma = 1$ и различных значениях параметров Sc , M

Sc	$f''(0)$		
	M = 1	M = 3	M = 5
0	1,000 00	1,000 00	1,000 00
0,5	1,289 42	1,024 51	1,024 53
1,0	1,711 83	1,048 92	1,048 96
1,5	1,816 71	1,073 23	1,073 29
2,0	2,053 50	1,097 43	1,097 52

Таблица 4

Значения $\varphi'(0)$ при $Sc = 0,5$ и различных значениях параметров γ , M

γ	$\varphi'(0)$	
	M = 3	M = 5
0	1,016 42	1,016 44
0,5	1,020 47	1,020 49
1,0	1,024 51	1,040 92
1,5	1,028 55	1,061 30
2,0	1,032 59	1,081 62

время как с увеличением Re она уменьшается; с увеличением значений Sc и γ скорость массообмена на стенке уменьшается.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Berman A. S.** Laminar flow in channels with porous walls // J. Appl. Phys. 1953. V. 24. P. 1232–1235.
2. **Skalak F. M., Wang C. Y.** Fluid dynamics of a long porous slider // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1975. V. 42. P. 893–894.
3. **Osterle J. F., Young F. J.** Natural convection between heated vertical plates in a horizontal magnetic field // J. Fluid Mech. 1961. V. 1. P. 512–518.
4. **Umavathi J. C.** A note on magnetoconvection in a vertical enclosure // Intern. J. Non-Linear Mech. 1996. V. 31. P. 371–376.
5. **Desseaux A.** Influence of a magnetic field over a laminar viscous flow in a semi-porous channel // Intern. J. Engng Sci. 1991. V. 37. P. 1781–1794.
6. **Hayat T., Ahmed N., Sajid M., Asghar S.** On the MHD flow of a second grade fluid in a porous channel // Comput. Math. Appl. 2007. V. 54. P. 407–414.
7. **Hayat T., Abbas Z.** Heat transfer analysis on the MHD flow of a second grade fluid in a channel with porous medium // Chaos Solution Fractals. 2008. V. 38. P. 556–567.
8. **Hayat T., Sajid R., Abbas Z., et al.** Radiations effects on MHD flow of Maxwell fluid in a channel with porous medium // Intern. J. Heat Mass Transfer. 2011. V. 54. P. 854–862.

9. **Ziabakhsh Z., Domairry G.** Solution of the laminar viscous flow in a semi-porous channel in the presence of a uniform magnetic field by using the homotopy analysis method // *Comm. Nonlinear Sci. Numer. Simulation*. 2009. V. 14. P. 1284–1294.
10. **Parida S. K., Panda S., Acharya M.** Magnetohydrodynamic (MHD) flow of a second grade fluid in a channel with porous wall // *Meccanica*. 2011. V. 46. P. 1093–1102.
11. **Petrov A. G.** Exact solution of the Navier — Stokes equations in a fluid layer between the moving parallel plates // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53, N 5. P. 642–646.
12. **Kharlamov A. A.** Modeling of transverse self-oscillations of a circular cylinder in an incompressible fluid flow in a plane channel with circulation // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2012. V. 53, N 1. P. 38–42.
13. **Petrov A. G.** Constructing solutions of the Navier — Stokes equations for a fluid layer between moving parallel plates at low and moderate Reynolds numbers // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 1. P. 44–48.
14. **Medvedev A. E.** Unsteady motion of a viscous incompressible fluid in a tube with a deformable wall // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* 2013. V. 54, N 4. P. 552–560.
15. **Liao S. J.** Beyond perturbation: introduction to homotopy analysis method. Boca Raton: Chapman and Hall: CRC Press, 2003.
16. **Liao S. J.** The proposed homotopy analysis technique for the solution of nonlinear problems: PhD diss. Shanghai, 1992.
17. **Abbasbandy S.** The application of homotopy analysis method to nonlinear equations arising in heat transfer // *Phys. Lett. A*. 2006. V. 360. P. 109–113.
18. **Abbasbandy S.** Homotopy analysis method for radiation equations // *Intern. Comm. Heat Mass Transfer*. 2007. V. 34. P. 380–387.
19. **Abbasbandy S., Parkes E. J.** Solitary smooth hump solutions of the Camassa-Holm equation by means of the homotopy analysis method // *Chaos, Solutions Fractals*. 2008. V. 36. P. 581–591.
20. **Hayat T., Abbas Z., Javed T.** Mixed convection flow of a micropolar fluid over a non-linearly stretching sheet // *Phys. Lett. A*. 2008. V. 372. P. 637–647.
21. **Abbas Z., Hayat T., Sajid M., Asghar S.** Unsteady flow of a second grade fluid film over an unsteady shrinking sheet // *Math. Comput. Modelling*. 2008. V. 48. P. 518–526.
22. **Abbas Z., Wang Y., Hayat T., Oberlack M.** Hydromagnetic flow in a viscoelastic fluid due to the oscillatory stretching surface // *Intern. J. Nonlinear Mech.* 2008. V. 43. P. 783–793.
23. **Abbas Z., Wang Y., Hayat T., Oberlack M.** Mixed convection in the stagnation point flow of a Maxwell fluid towards a vertical stretching surface // *Nonlinear Anal. Real World Appl.* 2010. V. 11. P. 3218–3228.
24. **Abbas Z., Hayat T.** Stagnation slip flow and heat transfer over a non linear stretching sheet // *Numer. Mech. PDE's*. 2011. V. 27. P. 302–314.
25. **Wang C. Y., Skalak F.** Fluid injection through one side of a long vertical channel // *AIChE J.* 1974. V. 20. P. 603–605.

*Поступила в редакцию 31/VII 2013 г.,
в окончательном варианте — 15/I 2014 г.*
