

УДК 539.376:539.4.014.13

## ПРЯМОЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РЕЛАКСАЦИИ ОСТАТОЧНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ В УПРОЧНЕННОМ ИЗДЕЛИИ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ФОРМЫ ПРИ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. П. Радченко, М. Н. Саушкин

Самарский государственный технический университет, 443100 Самара  
E-mails: radch@samgtu.ru, msaushkin@gmail.com

Предложен прямой метод решения краевой задачи для поверхностно упрочненного образца цилиндрической формы в условиях ползучести при действии растягивающей нагрузки. Получены соотношения для оценки кинетики напряженно-деформированного состояния в упрочненном слое. Выполнена проверка адекватности решения экспериментальным данным для случая релаксации остаточных напряжений в упрочненном слое цилиндрического образца из стали ЭИ 691 при  $T = 400$  °С. Показано, что расчетные и экспериментальные значения остаточных напряжений хорошо согласуются.

**Ключевые слова:** цилиндрический образец, поверхностное пластическое упрочнение, остаточные напряжения, ползучесть, релаксация.

**Введение.** При эксплуатации детали наиболее сильным механическому, тепловому и другим воздействиям подвергается ее поверхностный слой. В большинстве случаев разрушение детали (возникновение и развитие усталостной трещины, коррозия и т. д.) начинается на поверхностном слое.

Одним из способов повышения долговечности различных изделий является наведение сжимающих остаточных напряжений в поверхностном слое (упрочнение). При этом повышение, например, сопротивления усталости обусловлено, главным образом, сжимающими остаточными напряжениями в поверхностном слое, которые препятствуют выходу различного рода дислокаций и вакансий [1, 2]. Однако в процессе эксплуатации при высоких температурах вследствие ползучести происходит процесс релаксации остаточных напряжений (уменьшение сжимающих напряжений по модулю), сопровождающийся реологическим деформированием самой конструкции.

В работах [3, 4] предложен приближенный метод решения задачи о релаксации остаточных напряжений в растягиваемом упрочненном цилиндрическом образце, основанный на декомпозиции цилиндра на тонкий упрочненный слой, который практически не оказывает влияния на жесткость конструкции в целом, и “тело” конструкции. При этом считается, что тонкий упрочненный слой толщиной 100–200 мкм “наклеен” на поверхность цилиндра и деформируется вместе с ним в режиме “жесткого” нагружения при заданных значениях деформации на поверхности цилиндра.

В настоящей работе предложен иной подход, основанный на прямом решении краевой задачи ползучести с заданным начальным напряженно-деформированным состоянием. Ре-

ализация разрабатываемого подхода включает два этапа. На первом этапе определяется исходное (первоначальное) напряженно-деформированное состояние, возникающее в поверхностном слое цилиндра в результате поверхностного пластического деформирования [3–5]. На втором этапе решается (как правило, численно) краевая задача о ползучести растягиваемого стержня с заданными начальными полями остаточных напряжений и пластических деформаций.

**1. Методика расчета полей остаточных напряжений и пластических деформаций в образце в результате упрочнения.** Введем стандартную цилиндрическую систему координат  $(r, \theta, z)$  и обозначим через  $\sigma_\theta^{res}$ ,  $\sigma_r^{res}$ ,  $\sigma_z^{res}$  соответственно окружную, радиальную и осевую компоненты тензора остаточных напряжений в цилиндрическом образце. Через  $q_\theta$ ,  $q_r$ ,  $q_z$  обозначим пластические деформации, возникающие в цилиндре в результате поверхностного пластического деформирования и инициирующие остаточные напряжения.

Касательные компоненты тензоров остаточных напряжений и деформаций считаются малыми, что справедливо для ряда технологических режимов упрочнения (гидродробеструйная обработка, бомбардировка микрошариками и т. д.), поэтому ими можно пренебречь. Для нормальных компонент пластических деформаций, наведенных в результате упрочнения, выполняется соотношение

$$q_\theta(r) = q_z(r), \quad (1)$$

соответствующее гипотезе о том, что деформации на бесконечно малом участке поверхностного слоя цилиндрического образца наводятся так же, как в слое полупространства. Кроме того, предполагается, что вторичные пластические деформации в сжатом слое отсутствуют.

Будем считать, что окружная компонента  $\sigma_\theta^{res}(r)$  определена экспериментально, поэтому поставленная задача сводится к вычислению напряжений  $\sigma_r^{res}(r)$  и  $\sigma_z^{res}(r)$ , а также остаточных пластических деформаций по измеренным значениям компоненты  $\sigma_\theta^{res}(r)$  [3–5].

Из уравнения равновесия

$$r \frac{d\sigma_r^{res}}{dr} + \sigma_r^{res} = \sigma_\theta^{res} \quad (2)$$

следует, что эпюра напряжений  $\sigma_\theta^{res}(r)$  должна быть самоуравновешенной:

$$\int_0^a \sigma_\theta^{res}(r) dr = \int_0^a \frac{d}{dr} (r\sigma_r^{res}(r)) = 0 \quad (3)$$

( $a$  — радиус цилиндрического образца). При выводе (3) использовано условие  $\sigma_r^{res}(a) = 0$ , которое означает, что после упрочнения цилиндрический образец находится в естественном ненагруженном состоянии.

Из уравнения равновесия (2) получаем равенство

$$\sigma_r^{res}(r) = \frac{1}{r} \int_0^r \sigma_\theta^{res}(z) dz, \quad (4)$$

которое позволяет вычислить  $\sigma_r^{res}(r)$  по измеренным значениям функции  $\sigma_\theta^{res}(r)$ . Нетрудно показать, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} \sigma_r^{res}(r) = \sigma_\theta^{res}(0) \stackrel{def}{=} \sigma_0. \quad (5)$$

Из формул (2)–(5) следует, что эпюры напряжений  $\sigma_\theta^{res}(r)$  и  $\sigma_r^{res}(r)$  подобны эпюрам, приведенным на рис. 1.

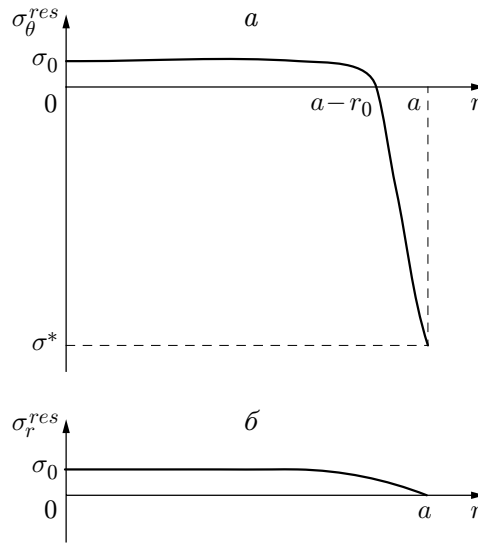


Рис. 1. Эпюры  $\sigma_\theta^{res}(r)$  (а) и  $\sigma_r^{res}(r)$  (б) после упрочнения цилиндрического образца

Распределение компоненты  $\sigma_z^{res}(r)$  может быть вычислено лишь с учетом остаточных пластических деформаций.

Главные компоненты тензора полной деформации цилиндрического образца  $\varepsilon_i^0$  ( $i \equiv r, \theta, z$ ), приобретенной в результате упрочняющей обработки, представим в следующем виде:

$$\varepsilon_i^0(r) = e_i^0(r) + q_i(r). \quad (6)$$

Здесь  $e_i^0$ ,  $q_i$  — компоненты тензоров упругих и пластических деформаций соответственно.

Из условия несжимаемости при пластическом деформировании  $q_z + q_\theta + q_r = 0$ , соотношений (1), (6) и уравнения совместности деформаций

$$r \frac{d\varepsilon_\theta^0}{dr} + \varepsilon_\theta^0 = \varepsilon_r^0 \quad (7)$$

получаем равенство

$$q_\theta = q_z = -q_r/2 \quad (8)$$

и дифференциальное уравнение для окружной компоненты  $q_\theta$

$$r \frac{dq_\theta}{dr} + 3q_\theta = e_r^0 - r \frac{de_\theta^0}{dr} - e_\theta^0. \quad (9)$$

Входящие в (9) упругие деформации нетрудно выразить через остаточные напряжения из закона Гука:

$$e_r^0 = [\sigma_r^{res} - \mu(\sigma_\theta^{res} + \sigma_z^{res})]/E, \quad e_\theta^0 = [\sigma_\theta^{res} - \mu(\sigma_r^{res} + \sigma_z^{res})]/E \quad (10)$$

( $\mu$  — коэффициент Пуассона;  $E$  — модуль Юнга).

В соотношения (10) наряду с известными компонентами  $\sigma_\theta^{res}$  и  $\sigma_r^{res}$  входит неизвестная компонента  $\sigma_z^{res}$ . Для определения  $\sigma_z^{res}$  необходимо ввести дополнительное предположение, в частности гипотезу плоских сечений для цилиндрического образца. Иными словами, считается, что плоские до начала процесса упрочнения поперечные сечения цилиндрического образца остаются плоскими и после его окончания, при этом

$$e_z^0(r) + q_z(r) = \varepsilon_z^* \quad (\varepsilon_z^* = \text{const}, \quad r \in [0; a]). \quad (11)$$

Условие (11) может нарушаться лишь вблизи свободных торцов цилиндра.

Выражая  $e_z^0$  через напряжения (аналогично (10)) и выполняя соответствующие преобразования, из (11) получаем

$$\sigma_z^{res}(r) = E(\varepsilon_z^* - q_z(r)) + \mu(\sigma_r^{res}(r) + \sigma_\theta^{res}(r)). \quad (12)$$

С помощью (12) из соотношений (10) можно исключить  $\sigma_z^{res}$ :

$$\begin{aligned} e_r^0 &= (1 + \mu)[(1 - \mu)\sigma_r^{res} - \mu\sigma_\theta^{res}]/E - \mu(\varepsilon_z^* - q_z), \\ e_\theta^0 &= (1 + \mu)[(1 - \mu)\sigma_\theta^{res} - \mu\sigma_r^{res}]/E - \mu(\varepsilon_z^* - q_z). \end{aligned} \quad (13)$$

С учетом (8) и (13) уравнение (9) можно записать в виде

$$r \frac{dq_\theta(r)}{dr} + \frac{3}{1 + \mu} q_\theta(r) = g(r), \quad (14)$$

где

$$g(r) = \frac{\sigma_r^{res}(r) - \sigma_\theta^{res}(r)}{E} - \frac{r}{E} \left( (1 - \mu) \frac{d\sigma_\theta^{res}(r)}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r^{res}(r)}{dr} \right). \quad (15)$$

Общее решение дифференциального уравнения (14) имеет следующий вид:

$$q_\theta(r) = \frac{1}{r^{3/(1+\mu)}} \left( \int_0^r z^{(2-\mu)/(1+\mu)} g(z) dz + C \right). \quad (16)$$

Поскольку при поверхностном упрочнении пластические деформации наводятся лишь на небольшой глубине, можно ввести следующую гипотезу:  $\lim_{r \rightarrow 0} q_\theta(r) = 0$ . Нетрудно показать, что в этом случае в (16)  $C = 0$ . Тогда, подставляя (15) в (16), получаем

$$\begin{aligned} q_\theta(r) &= \frac{1 - 2\mu}{E(1 + \mu)r^{3/(1+\mu)}} \int_0^r z^{(2-\mu)/(1+\mu)} [\sigma_r^{res}(z) + 2\sigma_\theta^{res}(z)] dz - \\ &\quad - \frac{1}{E} [(1 - \mu)\sigma_\theta^{res}(r) - \mu\sigma_r^{res}(r)]. \end{aligned} \quad (17)$$

Теперь можно полностью восстановить поля остаточных пластических деформаций: согласно (17) вычисляется  $q_\theta$ , а затем в соответствии с (8) —  $q_r$  и  $q_z$ .

Согласно (12) для определения компоненты  $\sigma_z^{res}(r)$  достаточно найти  $\varepsilon_z^*$ , используя условие равенства нулю суммарного осевого усилия, действующего на образец:

$$\int_0^a r \sigma_z^{res}(r) dr = 0.$$

Из последнего условия и (12) находим выражение

$$\varepsilon_z^* = \frac{2}{a^2} \int_0^a r \left( q_z(r) - \frac{\mu}{E} [\sigma_r^{res}(r) + \sigma_\theta^{res}(r)] \right) dr. \quad (18)$$

Вычислив согласно (18) величину  $\varepsilon_z^*$ , в соответствии с (12) можно однозначно определить распределение компоненты  $\sigma_z^{res}(r)$ .

Таким образом, полная схема расчета полей остаточных напряжений и пластических деформаций в упрочненном слое цилиндрического образца имеет следующий вид:

$$\sigma_\theta^{res}(r) \xrightarrow{(4)} \sigma_r^{res}(r) \xrightarrow{(17)} q_\theta(r) \xrightarrow{(8)} q_r(r), q_z(r) \xrightarrow{(18)} \varepsilon_z^* \xrightarrow{(12)} \sigma_z^{res}(r). \quad (19)$$

Здесь стрелками показана последовательность определения величин; цифры над стрелками — номера формул, по которым определяются эти величины.

**2. Решение краевой задачи релаксации остаточных напряжений в упрочненном слое изделия цилиндрической формы при ползучести.** Рассмотрим находящийся под действием растягивающей продольной силы  $F(t)$  цилиндрический образец радиусом  $r = a$ , в поверхностном слое которого наведены поля остаточных напряжений и пластических деформаций.

Постановка краевой задачи в любой момент времени  $t$  включает:

— уравнения равновесия

$$r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \sigma_r(r, t) = \sigma_\theta(r, t); \quad (20)$$

$$\int_0^a \sigma_z(r, t) r dr = \frac{F(t)}{2\pi}, \quad (21)$$

где  $\sigma_r(r, t)$ ,  $\sigma_\theta(r, t)$ ,  $\sigma_z(r, t)$  — радиальная, окружная и осевая компоненты тензора напряжений в цилиндре соответственно;

— уравнение совместности деформаций

$$r \frac{d\varepsilon_\theta(r, t)}{dr} + \varepsilon_\theta(r, t) = \varepsilon_r(r, t), \quad (22)$$

где  $\varepsilon_r(r, t)$ ,  $\varepsilon_\theta(r, t)$  — радиальная и окружная компоненты тензора полных деформаций;

— гипотезу плоских сечений

$$\varepsilon_z(r, t) = \varepsilon_z^*(t), \quad (23)$$

где  $\varepsilon_z(r, t)$  — осевая компонента тензора полных деформаций;

— краевые условия

$$\sigma_r(r, t)|_{r=0} = 0.$$

Сформулируем начальные условия. Непосредственно после упрочнения (в момент времени  $t = 0 - 0$ ) напряженно-деформированное состояние цилиндра описывается напряжениями  $\sigma_i^{res}(r)$  ( $i \equiv r, \theta, z$ ) и соотношениями для деформаций, следующими из (6) и закона Гука:

$$\varepsilon_r^0(r) = [\sigma_r^{res}(r) - \mu(\sigma_\theta^{res}(r) + \sigma_z^{res}(r))]/E + q_r(r),$$

$$\varepsilon_\theta^0(r) = [\sigma_\theta^{res}(r) - \mu(\sigma_r^{res}(r) + \sigma_z^{res}(r))]/E + q_\theta(r),$$

$$\varepsilon_z^0(r) = [\sigma_z^{res}(r) - \mu(\sigma_r^{res}(r) + \sigma_\theta^{res}(r))]/E + q_z(r).$$

Пусть в момент времени  $t = 0 + 0$  к цилиндру приложена продольная растягивающая сила  $F_0 = \sigma_{z0}\pi a^2$  ( $\sigma_{z0}$  — осевое напряжение). В этом случае происходит “упругий” скачок осевых напряжений:

$$\sigma_z(r, 0 + 0) = \sigma_z^{res}(r) + \sigma_{z0} \quad (24)$$

и как следствие скачок деформаций:

$$\varepsilon_r(r, 0 + 0) = [\sigma_r^{res}(r) - \mu(\sigma_\theta^{res}(r) + \sigma_z(r, 0 + 0))]/E + q_r(r),$$

$$\varepsilon_\theta(r, 0 + 0) = [\sigma_\theta^{res}(r) - \mu(\sigma_r^{res}(r) + \sigma_z(r, 0 + 0))]/E + q_\theta(r), \quad (25)$$

$$\varepsilon_z(r, 0 + 0) = [\sigma_z(r, 0 + 0) - \mu(\sigma_r^{res}(r) + \sigma_\theta^{res}(r))]/E + q_z(r).$$

Соотношения (24), (25), задающие исходное напряженно-деформированное состояние цилиндра после поверхностного пластического деформирования и нагружения цилиндра продольной растягивающей силой, являются начальными данными краевой задачи.

Уравнения (20)–(25) замыкаются определяющими соотношениями в дифференциальной форме, связывающими компоненты тензоров деформаций ползучести и напряжений (нагрузка  $F_0$  такова, что дополнительные пластические деформации в сечении цилиндра не возникают).

В цилиндре, в котором наведены поля пластических деформаций, компоненты тензора полной деформации в любой момент времени  $t$  представляются в виде суммы

$$\varepsilon_i(r, t) = e_i(r, t) + q_i(r) + p_i(r, t), \quad i \equiv r, \theta, z, \quad (26)$$

где  $p_i(r, t)$  — деформация ползучести, рассчитываемая по любой теории ползучести, адекватно описывающей соответствующие экспериментальные данные.

При высоких температурах и нагрузке в упрочненном цилиндрическом образце происходит перераспределение (релаксация) наведенных остаточных напряжений за счет деформации ползучести. Для того чтобы описать процесс релаксации, систему уравнений (20)–(26) необходимо разрешить относительно напряжений  $\sigma_i(r, t)$  ( $i \equiv r, \theta, z$ ), что и является целью дальнейшего исследования.

Для осевой компоненты  $\varepsilon_z$  из (23), (26) получаем

$$e_z(r, t) + q_z(r) + p_r(r, t) = \varepsilon_z^*(t). \quad (27)$$

Запишем закон Гука для упругих деформаций:

$$e_r(r, t) = [\sigma_r(r, t) - \mu(\sigma_\theta(r, t) + \sigma_z(r, t))]/E; \quad (28)$$

$$e_\theta(r, t) = [\sigma_\theta(r, t) - \mu(\sigma_r(r, t) + \sigma_z(r, t))]/E; \quad (29)$$

$$e_z(r, t) = [\sigma_z(r, t) - \mu(\sigma_r(r, t) + \sigma_\theta(r, t))]/E. \quad (30)$$

Учитывая (30), из (27) находим

$$[\sigma_z(r, t) - \mu(\sigma_r(r, t) + \sigma_\theta(r, t))]/E + q_z(r) + p_z(r, t) = \varepsilon_z^*(t),$$

откуда следует

$$\sigma_z(r, t) = [\varepsilon_z^*(t) - q_z(r) - p_z(r, t)]E + \mu(\sigma_r(r, t) + \sigma_\theta(r, t)). \quad (31)$$

Вычитая из (28) уравнение (29), исключим компоненту  $\sigma_z$ :

$$e_r(r, t) - e_\theta(r, t) = (1 + \mu)[\sigma_r(r, t) - \sigma_\theta(r, t)]/E. \quad (32)$$

С учетом уравнения (20) соотношение (32) принимает вид

$$e_r(r, t) - e_\theta(r, t) = -\frac{1 + \mu}{E} \left( r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} \right). \quad (33)$$

Продифференцируем соотношение (29) по  $r$ :

$$\frac{de_\theta(r, t)}{dr} = \frac{1}{E} \left[ \frac{d\sigma_\theta(r, t)}{dr} - \mu \left( \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \frac{d\sigma_z(r, t)}{dr} \right) \right]. \quad (34)$$

Здесь и далее переменная  $t$  является параметром, поэтому в преобразованиях используется оператор полной производной по переменной  $r$ .

Дифференцируя (31) по переменной  $r$  с учетом условия  $d\varepsilon_z^*(t)/dr = 0$  и подставляя полученное соотношение в (34), находим

$$\frac{de_\theta(r, t)}{dr} = \frac{1 + \mu}{E} \left[ (1 - \mu) \frac{d\sigma_\theta(r, t)}{dr} - \mu \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \frac{\mu E}{1 + \mu} \left( \frac{dq_z(r)}{dr} + \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) \right]. \quad (35)$$

Из уравнения (20) следует

$$\frac{d\sigma_\theta(r, t)}{dr} = 2 \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + r \frac{d^2\sigma_r(r, t)}{dr^2}. \quad (36)$$

С использованием (36) исключим из (35) величину  $d\sigma_\theta/dr$ :

$$\frac{de_\theta(r, t)}{dr} = \frac{1 + \mu}{E} \left[ r(1 - \mu) \frac{d^2\sigma_r(r, t)}{dr^2} + (2 - 3\mu) \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} + \frac{\mu E}{1 + \mu} \left( \frac{dq_z(r)}{dr} + \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) \right]. \quad (37)$$

С учетом (26), (33) уравнение (22) преобразуем к виду

$$r \frac{de_\theta(r, t)}{dr} = -\frac{1 + \mu}{E} \left( r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} \right) + (q_r(r) - q_\theta(r)) + (p_r(r, t) - p_\theta(r, t)) - r \left( \frac{dq_\theta(r)}{dr} + \frac{dp_\theta(r, t)}{dr} \right). \quad (38)$$

Подставляя (37) в (38), с учетом (8) получаем обыкновенное дифференциальное уравнение относительно  $\sigma_r$

$$r^2 \frac{d^2\sigma_r(r, t)}{dr^2} + 3r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} = g(r, t) \quad (39)$$

с граничными условиями

$$\sigma_r(r, t)|_{r=a} = 0, \quad \lim_{r \rightarrow 0} \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr} = 0. \quad (40)$$

Здесь

$$g(r, t) = \frac{E}{1 - \mu^2} \left[ \frac{3}{2} q_r(r) + p_r(r, t) - p_\theta(r, t) - r \left( \frac{dp_\theta(r, t)}{dr} + \mu \frac{dp_z(r, t)}{dr} \right) + \frac{r}{2} (1 + \mu) \frac{dq_r(r)}{dr} \right].$$

С учетом (40) решение (39) записывается следующим образом:

$$\sigma_r(r, t) = - \int_r^a \frac{1}{\xi^3} \left( \int_0^\xi g(\eta, t) \eta d\eta \right) d\xi. \quad (41)$$

Зная  $\sigma_r$ , из (20) определяем  $\sigma_\theta$ :

$$\sigma_\theta(r, t) = \sigma_r(r, t) + r \frac{d\sigma_r(r, t)}{dr}. \quad (42)$$

Для определения  $\sigma_z(r, t)$  по формуле (31) необходимо знать величину  $\varepsilon_z^*(t)$ . Подставляя (31) в (21), получаем уравнение относительно  $\varepsilon_z^*(t)$ , из которого следует

$$\varepsilon_z^*(t) = \frac{1}{E} \sigma_{z0} + \frac{2}{a^2} \int_0^a \left( q_z(r) + p_z(r, t) - \frac{\mu}{E} (\sigma_r(r, t) + \sigma_\theta(r, t)) \right) r dr.$$

Зная  $\varepsilon_z^*(t)$ , из (31) находим  $\sigma_z$ :

$$\sigma_z(r, t) = [\varepsilon_z^* - q_z(r) - p_z(r, t)]E + \mu[\sigma_r(r, t) + \sigma_\theta(r, t)]. \quad (43)$$

Таким образом, соотношения (41)–(43) позволяют определить кинетику напряжений в цилиндрическом образце при ползучести, причем  $\sigma_i(r, 0) = \sigma_i^{res}(r)$ , поскольку  $p_i(r, 0) = 0$  ( $i \equiv r, \theta, z$ ).

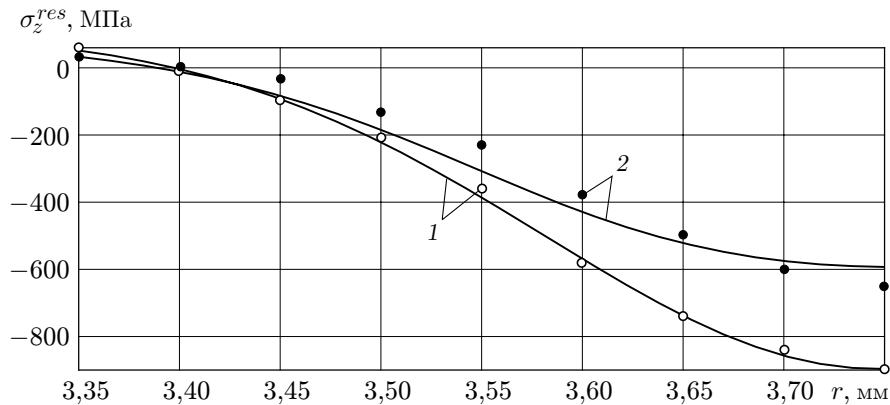


Рис. 2. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные линии) эпюры остаточных напряжений в цилиндрическом образце по окончании термоэкспозиции:

1 —  $t = 0 - 0$ ; 2 —  $t = 100$  ч

При  $t > 0$  деформации ползучести  $p_i(r, t)$  ( $i \equiv r, \theta, z$ ) рассчитываются по напряжениям  $\sigma_i(r, t)$  в соответствии с выбранной теорией ползучести.

**3. Расчет релаксации остаточных напряжений в цилиндрическом образце и проверка адекватности метода экспериментальным данным.** Численная реализация предложенного метода и проверка его адекватности результатам экспериментов проводились с использованием данных работы [1] для цилиндрического образца радиусом  $a = 3,75$  мм из стали ЭИ 691, упрочненного алмазным выглаживанием, а затем подвергнутого термоэкспозиции (выдержка при температуре без нагрузки) в течение 100 ч при температуре  $T = 400$  °С.

На рис. 2 приведены взятые из работы [1] экспериментальные значения осевой компоненты остаточных напряжений  $\sigma_z^{res}(r)$  в образце после упрочнения и по окончании процесса ползучести ( $t = 100$  ч) под действием самоуравновешенных остаточных напряжений, возникающих вследствие термоэкспозиции. Там же приведена расчетная эпюра осевой компоненты.

Отметим, что согласно методу, изложенному в п. 1, исходной информацией для расчета полей остаточных напряжений является окружная компонента  $\sigma_\theta^{res}(r)$ , для которой может быть использована следующая аппроксимация (см. рис. 1) [3, 4]:

$$\sigma_\theta^{res}(r) = \sigma_0 + \sigma_1 \exp(-(a-r)^2/b^2).$$

Здесь  $\sigma_0, \sigma_1, b$  — параметры аппроксимации.

Поскольку экспериментальные данные для компоненты  $\sigma_\theta^{res}(r)$  отсутствуют, варьировались параметры  $\sigma_0, \sigma_1, b$  и для каждой совокупности их значений осуществлялся численный расчет по схеме (19) до достижения минимума функционала среднеквадратичного отклонения расчетных значений  $\sigma_z^{res}(r)$  от экспериментальных. В результате получены следующие значения параметров:  $\sigma_0 = 57,47$  МПа,  $\sigma_1 = 1033,47$  МПа,  $b = 0,235$  мм.

Для расчета релаксации остаточных напряжений в процессе термоэкспозиции при  $T = 400$  °С необходимо иметь экспериментальные данные о ползучести при этой температуре. Однако в справочной литературе такие данные имеются только для  $T = 500, 550$  °С (рис. 3, 4). Значения модуля Юнга для стали ЭИ 691 при этих температурах равны  $E = 142\,100, 122\,500$  МПа соответственно. Так как на кривых ползучести, представленных на рис. 3, 4, отсутствует третья стадия ползучести, в качестве расчетной модели



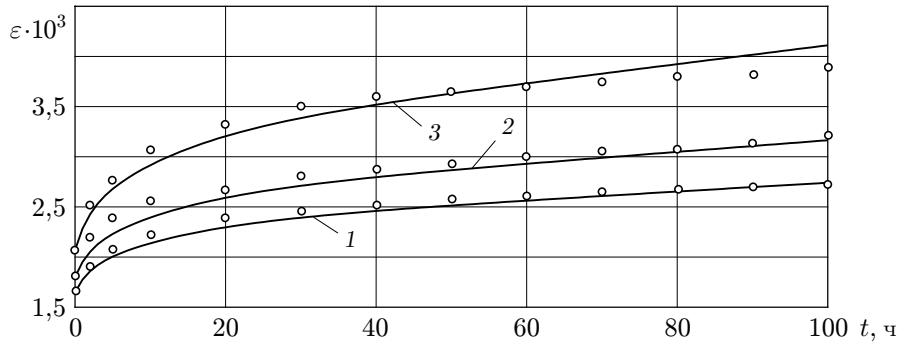


Рис. 3. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные линии) зависимости неупругого реологического деформирования цилиндрического образца из стали ЭИ 691 от времени при  $T = 500$  °С:

1 —  $\sigma = 240$  МПа; 2 —  $\sigma = 260$  МПа; 3 —  $\sigma = 300$  МПа

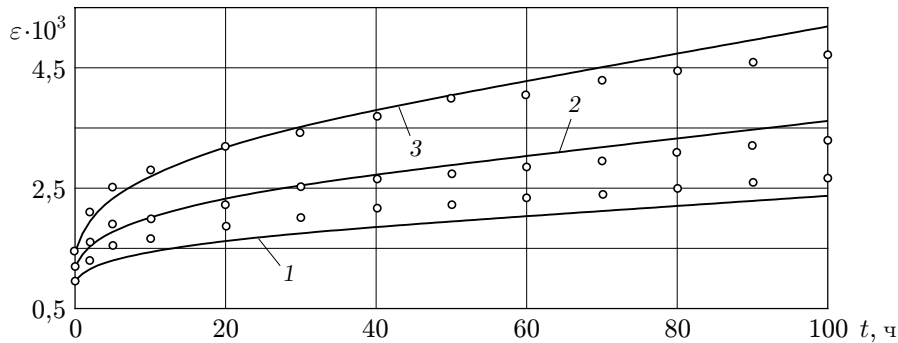


Рис. 4. Экспериментальные (точки) и расчетные (сплошные линии) зависимости реологического деформирования цилиндрического образца из стали ЭИ 691 от времени при  $T = 550$  °С:

1 —  $\sigma = 120$  МПа; 2 —  $\sigma = 150$  МПа; 3 —  $\sigma = 180$  МПа

использовалась реологическая модель [6] вида

$$p_{ij}(t) = v_{ij}(t) + w_{ij}(t), \quad \dot{w}_{ij} = (3/2)cS^{m-1}(\sigma_{ij} - \sigma_I \delta_{ij}/3); \quad (44)$$

$$v_{\omega\omega}(t) = \sum_{k=1}^N v_{\omega\omega}^k(t);$$

$$v_{\omega\omega}^k(t) = (1 + \mu')\beta_{\omega\omega}^k(t) - \mu'(\beta_{11}^k(t) + \beta_{22}^k(t) + \beta_{33}^k(t)); \quad (45)$$

$$\dot{\beta}_{\omega\omega}^k = \begin{cases} \lambda_k \Lambda_k, & \Lambda_k \sigma_{\omega\omega} > 0, \\ 0, & \Lambda_k \sigma_{\omega\omega} \leq 0, \end{cases}$$

где  $\Lambda_k = b_k S^{n-1} \sigma_{\omega\omega} - \beta_{\omega\omega}^k$ ;  $w_{ij}$ ,  $v_{ij}$  — вязкая и вязкопластическая составляющие деформации ползучести  $p_{ij}$ ;  $\lambda_k$ ,  $c$ ,  $b_k$ ,  $n$ ,  $N$  — константы модели, с помощью которых описываются первая и вторая стадии ползучести;  $\mu'$  — коэффициент Пуассона для вязкопластической компоненты;  $\sigma_I = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}$ ;  $S$  — интенсивность напряжений; расчет компоненты  $v_{ij}$  ведется в главных осях.

В одноосном случае при  $\sigma = \text{const}$  решение (44), (45) дает следующую зависимость:

$$p(t) = \sum_{k=1}^N b_k (1 - e^{-\lambda_k t}) \sigma^m + c \sigma^n t. \quad (46)$$

С использованием (46) по методике, предложенной в работе [7], получены аппроксимации кривых ползучести при  $T = 500, 550$  °С, а затем температурная аппроксимация в виде

$$p(t, \sigma, T) = [0,9 \cdot 10^{-12}(1 - e^{-0,6t}) + 2,1 \cdot 10^{-12}(1 - e^{-0,08t})] e^{0,0242T} \sigma^{2,37} + 5,55 \cdot 10^{-34} e^{0,107T} \sigma^{(644-0,95T)/50} t \quad (47)$$

( $T = 500 \div 550$  °С). На рис. 3, 4 сплошными линиями показаны кривые ползучести, рассчитанные по зависимости (47).

На основе экстраполяции из (47) получена следующая зависимость для  $T = 400$  °С:

$$p_z(t, \sigma) = [1,44 \cdot 10^{-8}(1 - e^{-0,6t}) + 3,36 \cdot 10^{-8}(1 - e^{-0,08t})] \sigma^{2,37} + 2,148 \cdot 10^{-15} \sigma^{5,28} t. \quad (48)$$

Таким образом, соотношения (48) позволяют определить все параметры модели (44), (45) при  $T = 400$  °С:  $\lambda_1 = 0,6$ ;  $\lambda_2 = 0,08$ ;  $m = 2,37$ ;  $b_1 = 1,44 \cdot 10^{-8}$ ;  $b_2 = 3,36 \cdot 10^{-8}$ ;  $c = 2,148 \cdot 10^{-15}$ ;  $n = 5,28$ ; величина  $\mu'$  полагалась равной 0,42. Кроме того,  $E = 161\,700$  МПа,  $\mu = 0,3$ .

В соответствии с моделью (44), (45) реализована методика расчета процесса ползучести цилиндрического образца с самоуравновешенными полями остаточных напряжений при  $T = 400$  °С. Задача решалась численно. При этом вводилась дискретизация области  $0 \leq r \leq a$ , а промежуток времени, в течение которого наблюдалась деформация ползучести, разбивался точками  $t_0 = 0, t_1, t_2, \dots$  на интервалы  $[t_j, t_{j+1}]$ , в каждом из которых система дифференциальных уравнений (44), (45) решалась численно (например, методом Эйлера). В процессе решения все интегралы вычислялись по соответствующим квадратным формулам, а производные аппроксимировались конечно-разностными соотношениями.

Результаты расчета кинетики напряжения  $\sigma_z(r, t)$  в конечный момент времени  $t = 100$  ч для стали ЭИ 691 приведены на рис. 2, из которого следует, что результаты расчетов хорошо согласуются с экспериментальными данными.

## ЛИТЕРАТУРА

1. **Павлов В. Ф.** Остаточные напряжения и сопротивление усталости упрочненных деталей с концентраторами напряжений / В. Ф. Павлов, В. А. Кирпичев, В. Б. Иванов. Самара: Сам. науч. центр РАН, 2008.
2. **Павлов В. Ф.** Влияние характера распределения остаточных напряжений по толщине поверхностного слоя детали на сопротивление усталости // Изв. вузов. Машиностроение. 1987. № 7. С. 3–6.
3. **Радченко В. П., Саушкин М. Н.** Математические модели восстановления и релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое цилиндрических элементов конструкций при ползучести // Изв. вузов. Машиностроение. 2004. № 11. С. 3–17.
4. **Радченко В. П., Саушкин М. Н.** Расчет релаксации остаточных напряжений в поверхностно упрочненном слое цилиндрического изделия в условиях ползучести // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. 2001. № 12. С. 61–73.
5. **Радченко В. П.** Ползучесть и релаксация остаточных напряжений в упрочненных конструкциях / В. П. Радченко, М. Н. Саушкин. М.: Машиностроение-1, 2005.
6. **Радченко В. П.** Реологическое деформирование и разрушение материалов и элементов конструкций / В. П. Радченко, Ю. А. Еремин. М.: Машиностроение-1, 2004.
7. **Самарин Ю. П.** Уравнения состояния материалов со сложными реологическими свойствами. Куйбышев: Куйбышев. гос. ун-т, 1979.