

УДК 531.391.1:532.5.011

## ДВИЖЕНИЕ СТЕРЖНЯ В ПОТОКЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

В. М. Шаповалов, С. В. Лапшина

Волжский политехнический институт Волгоградского государственного  
технического университета, 404121 Волжский

Получены уравнения динамики искривленного стержня конечной длины в потоке вязкой жидкости. Для двух типов течения (чистого и простого сдвига) исследована продольная устойчивость стержня к малым отклонениям от прямолинейной формы. Найдена минимальная изгибная жесткость стержня, обеспечивающая устойчивость при любой ориентации в потоке. Получена оценка эффективной вязкости суспензии, наполненной прямолинейными дискретными волокнами.

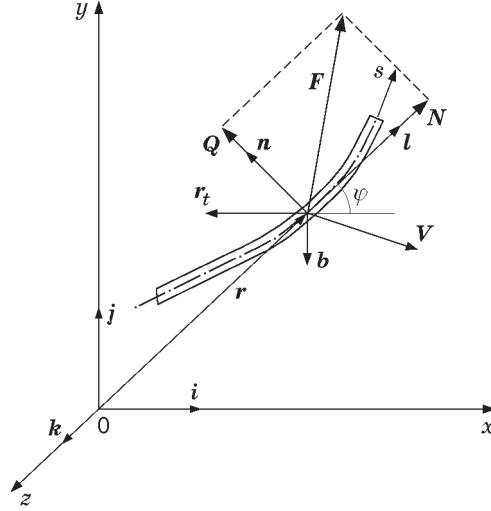
Ключевые слова: стержень, поток вязкой жидкости, устойчивость, полимеры.

В работе [1] показано, что при определенной ориентации нити, находящейся в потоке вязкой жидкости, растягивающее усилие может быть нулевым. По определению гибкая нить способна передавать только растягивающие усилия, поэтому область применимости уравнений [1] ограничена положительными значениями напряжения в нити. Указанное ограничение снимается, если учитывать изгибную упругость волокна, т. е. рассматривать его как стержень.

Результаты решения рассматриваемой задачи можно использовать при анализе течений магнитореологических жидкостей с частицами в форме вытянутых эллипсоидов, а также процессов перемешивания волокнонаполненных полимерных композиций. Наиболее существенными особенностями течения волокнонаполненных композиций являются повышенное давление течения, изменение распределения (ориентации) волокон по направлениям, измельчение волокон. Даже если матрица представляет собой ньютоновскую жидкость, волокнонаполненная композиция всегда обладает неньютоновскими свойствами.

**1. Динамические уравнения.** Для рассматриваемой задачи приняты следующие допущения. Силы тяжести и инерции малы. Стержень механически и гидродинамически изолирован, т. е. отсутствует механический контакт с соседними стержнями. Эффекты аэроупругости не учитываются, считается, что стержень не вносит существенных гидродинамических возмущений в поле скоростей жидкости. Течение ламинарное, изотермическое. Сечение стержня имеет форму круга, поэтому при изгибе кручения не возникает. Ось стержня (упругая линия) остается плоской кривой, и выполняется условие  $\max(d/l, kd) \ll 1$  ( $d$  — диаметр стержня;  $2l$  — его длина;  $k$  — кривизна). Упругие деформации, вызванные растяжением или сжатием стержня, не учитываются. Поперечное сечение принимается малым по сравнению с полной длиной стержня и при деформации не меняется, т. е. отсутствует давление продольных волокон друг на друга. Поперечные (нормальные) сечения стержня после деформации остаются плоскими (гипотеза Бернулли). Сдвиги не учитываются, поперечные силы определяются из условий равновесия, а уравнения деформаций составляются лишь для изгибающих моментов. На стержень действует сила трения, пропорциональная относительной скорости обтекания.

Введем неподвижную в пространстве (или вмороженную в жидкость) систему координат  $(x, y, z)$ . Обозначим через  $x, y$  координаты точек упругой линии стержня  $s$ . Положение



кривой  $s$  описывает вектор-функция  $\mathbf{r}(s, t)$ ,  $-l \leq s \leq l$  ( $t$  — время). Направлениям  $x, y, z$  соответствует правосторонне ориентированный триэдр  $(\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$  (см. рисунок). Обозначим через  $\mathbf{l}$  ( $\mathbf{l} = \mathbf{r}_s$ ,  $|\mathbf{l}| = 1$ ) вектор касательной к упругой линии,  $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \mathbf{l}$  — вектор нормали,  $\mathbf{b}$  — единичный вектор, параллельный оси  $z$ .

Согласно [2] уравнения равновесия стержня имеют вид

$$\mathbf{F}_s = -\mathbf{K}, \quad \mathbf{M}_s = \mathbf{F} \times \mathbf{l}, \quad (1.1)$$

где  $\mathbf{K} = A\mathbf{l}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{l}) + B\mathbf{n}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{n})$  — линейная плотность внешних сил [1];  $A = 2,1\pi\mu\sqrt{c}/\ln(0,952/\sqrt{c})$  — коэффициент, характеризующий продольную составляющую силы трения;  $\mu$  — вязкость жидкости;  $c$  — объемная концентрация волокнистого наполнителя в жидкости;  $B = 4\pi\mu/\ln(7,4/\text{Re})$  — коэффициент, характеризующий поперечную составляющую силы трения;  $\text{Re} = \langle v \rangle \rho d / \mu$  — число Рейнольдса;  $\rho$  — плотность жидкости;  $\langle v \rangle$  — характерная скорость; нижним индексом отмечены соответствующие производные.

С учетом соотношений  $\mathbf{F} = (F\mathbf{l})\mathbf{l} + (F\mathbf{n})\mathbf{n} = N\mathbf{l} + Q\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{M} = M\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{l}_s = k\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{n}_s = -k\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{b}_s = 0$ ,  $\mathbf{l} \times \mathbf{l} = 0$ ,  $\mathbf{n} \times \mathbf{l} = -\mathbf{b}$  уравнения (1.1) примут вид

$$(N_s - Q\varphi_s)\mathbf{l} + (N\varphi_s + Q_s)\mathbf{n} = -A\mathbf{l}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{l}) - B\mathbf{n}((\mathbf{V} - \mathbf{r}_t)\mathbf{n}), \quad M_s = -Q, \quad (1.2)$$

где  $k = \varphi_s$  — кривизна стержня;  $\varphi$  — угол наклона касательной;  $N$  — продольная сила;  $Q$  — перерезывающая сила;  $M$  — изгибающий момент;  $\mathbf{V} - \mathbf{r}_t = (v_x - x_t)\mathbf{i} + (v_y - y_t)\mathbf{j}$ ;  $\mathbf{l} = \mathbf{i} \cos \varphi + \mathbf{j} \sin \varphi$ ;  $\mathbf{n} = -\mathbf{i} \sin \varphi + \mathbf{j} \cos \varphi$ . Кручение отсутствует.

Для замыкания задачи используем условие пропорциональности кривизны стержня моменту внутренних усилий [2]

$$M = EJ(\varphi_s - \varphi_{0,s}), \quad (1.3)$$

где  $E$  — модуль упругости;  $J = \pi d^4/64$  — момент инерции сечения; значение  $\varphi_{0,s}$  соответствует моменту времени  $t = 0$ ;  $\varphi_0(s)$  — функция, описывающая начальную (естественную) конфигурацию стержня (удовлетворяет условиям  $\varphi_{0,s} = \varphi_{0,ss} = 0$  при  $s = \pm l$ ).

Функции  $x, y, \varphi$  связаны геометрическими соотношениями  $x_s = \cos \varphi$ ,  $y_s = \sin \varphi$ .

В начальный момент напряжения в стержне отсутствуют, на свободных концах стержня отсутствуют силы и моменты, поэтому начальные и граничные условия задачи имеют вид

$$t = 0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_0: \quad \mathbf{M} = \mathbf{F} = 0; \quad t > 0, \quad s = \pm l: \quad \mathbf{F} = \mathbf{M} = 0, \quad (1.4)$$

где  $\mathbf{r}_0 = x_0(s)\mathbf{i} + y_0(s)\mathbf{j}$  — радиус-вектор в начальный момент времени.

Разрешив первое уравнение в (1.2) относительно  $\mathbf{V} - \mathbf{r}_t$  и продифференцировав обе части полученного выражения по  $s$ , получим уравнение в более удобной для анализа форме

$$\mathbf{V}_s - \mathbf{r}_{ts} = -B^{-1}[(N_s\varphi_s + N\varphi_{ss} + Q_{ss})\mathbf{n} + (N\varphi_s + Q_s)\mathbf{n}_s] - \\ -A^{-1}[(N_{ss} - Q_s\varphi_s - Q\varphi_{ss})\mathbf{l} + (N_s - Q\varphi_s)\mathbf{l}_s], \quad (1.5)$$

где  $\mathbf{V}_s = (\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V} = (((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{n})\mathbf{n} + (((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{l})\mathbf{l}$ ;  $((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{n} = \sin 2\varphi \partial v_y/\partial y - \sin^2 \varphi \partial v_x/\partial y + \cos^2 \varphi \partial v_y/\partial x$ ;  $((\mathbf{l}\nabla)\mathbf{V})\mathbf{l} = 0,5 \sin 2\varphi (\partial v_x/\partial y + \partial v_y/\partial x) + \cos 2\varphi \partial v_x/\partial x$ . Здесь учитывались соотношения  $\mathbf{n}_s = -\varphi_s \mathbf{l}$ ,  $\mathbf{l}_s = \varphi_s \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{r}_{ts} = \varphi_t \mathbf{n}$ ,  $\mathbf{b} \times \mathbf{b} = \mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0$ ,  $\mathbf{l} \times \mathbf{b} = -\mathbf{n}$ ,  $\mathbf{l} = \mathbf{n} \times \mathbf{b}$ ,  $\mathbf{r}_s = \mathbf{l}$ ,  $\nabla = (\partial/\partial x)\mathbf{i} + (\partial/\partial y)\mathbf{j}$ .

Согласно (1.5) изменение ориентации или формы стержня обусловлено градиентом скорости, поскольку постоянная составляющая скорости ( $v_x = \text{const}$ ,  $v_y = \text{const}$ ) вызывает конвективный снос стержня вдоль соответствующей оси координат без изменения его конфигурации. Это позволяет при изучении конформационных превращений поместить начало декартовой системы координат в любую точку стержня, например в середину упругой оси ( $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $s = 0$ ).

Таким образом, для четырех неизвестных функций  $Q$ ,  $N$ ,  $M$ ,  $\varphi$  имеем четыре уравнения: (1.3), (1.5) и второе уравнение в (1.2).

**2. Анализ устойчивости.** Для рассматриваемых плоских ( $v_z = 0$ ) вискозиметрических течений компоненты скорости имеют вид: в случае чистого сдвига  $v_x = g|\gamma|x$ ,  $v_y = -g|\gamma|y$ ,  $g = \text{sign } \gamma$ , в случае простого сдвига  $v_x = g|\gamma_-|y$ ,  $v_y = 0$ ,  $g = \text{sign } \gamma_-$  ( $\gamma = \partial v_x/\partial x$ ,  $\gamma_- = \partial v_x/\partial y$  — скорости деформации). Для упрощения записи введем параметр  $g_1$ , характеризующий тип течения ( $g_1 = 1$  соответствует чистому сдвигу,  $g_1 = 0$  — простому).

Введем следующие безразмерные переменные и параметры:  $\tau = t|\gamma g_1 + (1 - g_1)\gamma_-|$ ,  $S = sl^{-1}$ ,  $e = A/B$ ,  $K = EJ/[Bl^4|\gamma g_1 + (1 - g_1)\gamma_-|]$ . В качестве масштаба осевого усилия  $N$  примем величину  $Al^2|\gamma g_1 + (1 - g_1)\gamma_-|$ .

Исключив из второго уравнения в (1.2) и уравнений (1.3)–(1.5) функции  $M$  и  $Q$ , получим задачу эволюции искривленного стержня в безразмерном виде

$$\varphi_\tau - (e + 1)N_s\varphi_s - eN\varphi_{ss} + K\varphi_{ssss} - e^{-1}K\varphi_{ss}\varphi_s^2 = -g[g_1 \sin 2\varphi + (1 - g_1) \sin^2 \varphi], \\ eN\varphi_s^2 - N_{ss} - K(1 + e^{-1})\varphi_s\varphi_{sss} - Ke^{-1}\varphi_{ss}^2 = g[g_1 \cos 2\varphi + 0,5(1 - g_1) \sin 2\varphi], \quad (2.1) \\ \tau = 0, \varphi = \varphi_0(S): \quad \varphi_s = \varphi_{ss} = N = 0; \quad \tau > 0, S = \pm 1: \quad N = \varphi_s = \varphi_{ss} = 0.$$

Для прямолинейного стержня ( $d\varphi_0/dS = d\varphi/dS = 0$ ) аналитическое решение задачи (2.1) аналогично решению для прямолинейной нити [1]

$$N_- = 0,5gg_1(1 - S^2) \cos 2\varphi_- + 0,25g(1 - g_1)(1 - S^2) \sin 2\varphi_-, \\ \varphi_- = g_1 \arctg [\text{tg } \varphi_0 \exp(-2g\tau)] + (1 - g_1) \arctg [\text{tg } \varphi_0/(1 + g\tau \text{tg } \varphi_0)], \quad (2.2) \\ \varphi_{-, \tau} = -g_1g \sin 2\varphi_- - (1 - g_1)g \sin^2 \varphi_-.$$

Здесь и ниже индексом “-” отмечены переменные, соответствующие прямолинейному стержню.

В рассматриваемых течениях в стержне в зависимости от его ориентации могут возникать как растягивающие, так и сжимающие усилия, обусловленные распределенной нагрузкой, создаваемой силами вязкого трения [1]. Задав малый начальный изгиб, исследуем устойчивость стержня. Выясним, при каких ориентациях стержня возмущение будет неограниченно возрастать или затухать. Считаем, что возмущения растут настолько быстро, что эволюцию (поворот по направлению течения) можно считать “замороженной”, т. е. угол  $\varphi_-$  в уравнениях будем рассматривать как параметр.

Введем малые возмущения формы стержня  $\alpha$  и осевой силы  $\beta$ :

$$\varphi = \varphi_- + \alpha(S, \tau), \quad N = N_- + \beta(S, \tau), \quad \max(\alpha, \beta) \ll 1.$$

Выполнив линеаризацию уравнений (2.1), получим уравнения для отклонений

$$\begin{aligned} \alpha_\tau + (e + 1)SD\alpha_s - 0,5e(1 - S^2)D\alpha_{ss} + K\alpha_{ssss} &= -2D\alpha, \\ -\beta_{ss} &= g[-2g_1 \sin 2\varphi_- + (1 - g_1) \cos 2\varphi_-]\alpha, \end{aligned}$$

$$\tau = 0, \quad \alpha = \alpha_0(S): \quad \alpha_s = \alpha_{ss} = \beta = 0; \quad \tau > 0, \quad S = \pm 1: \quad \alpha_s = \alpha_{ss} = \beta = 0,$$

где  $D = g[g_1 \cos 2\varphi_- + 0,5(1 - g_1) \sin 2\varphi_-]$ .

При анализе устойчивости можно ограничиться первым уравнением. Представим возмущения в виде  $\alpha = A \exp(\lambda\tau)$ , где  $A(S)$  — собственная функция;  $\lambda$  — собственное значение. Для собственной функции запишем однородную задачу

$$\begin{aligned} \lambda A + (e + 1)SDA_s - 0,5e(1 - S^2)DA_{ss} + KA_{ssss} + 2DA &= 0, \\ S = \pm 1, \quad A_s = A_{ss} &= 0. \end{aligned}$$

Анализ решения в комплексной плоскости показал, что  $\text{Im } \lambda = 0$ , т. е. колебания отсутствуют. Решение задачи о собственных значениях получено методом Галеркина. В качестве координатных функций (аппроксимации первых двух гармоник) взяты многочлены  $15S - 10S^3 + 3S^5$  и  $3S^2 - 3S^4 + S^6$ , удовлетворяющие предельным условиям. Для первых двух собственных чисел получены следующие выражения:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -(0,572e + 1,19)g[2g_1 \cos 2\varphi_- + (1 - g_1) \sin 2\varphi_-] - 34K, \\ \lambda_2 &= -(5,345e + 1,336)g[2g_1 \cos 2\varphi_- + (1 - g_1) \sin 2\varphi_-] - 146,77K. \end{aligned} \tag{2.3}$$

В положении нейтрального равновесия (для простого сдвига  $\varphi_- = 0$ , для чистого  $\varphi_- = \pi/4$ ) отношение собственных чисел  $\lambda_2/\lambda_1 = 4,314$  согласуется с эйлеровой теорией устойчивости, в соответствии с которой  $\lambda_2/\lambda_1 = 4$  [3].

Первое слагаемое в выражении для  $\lambda_1$  в (2.3) характеризует границы устойчивости гибкой нити (стержня нулевой жесткости, для которого  $K = 0$ ) [1]. Второе слагаемое характеризует влияние изгибной жесткости стержня на границы устойчивости. Учет изгибной жесткости расширяет область устойчивости.

Следует отметить, что существует критическая жесткость стержня  $K^*$ , при которой стержень с жесткостью  $K > K^*$  сохраняет устойчивость при любой ориентации. В случае чистого сдвига ( $g_1 = 1$ ) с учетом равенства  $\max(-g \cos 2\varphi_-) = 1$  критическая жесткость  $K^* = 0,0336e + 0,07$ . При простом сдвиге ( $g_1 = 0$ ) с учетом равенства  $\max(-g \sin 2\varphi_-) = 1$  критическая жесткость в два раза меньше:  $K^* = 0,0168e + 0,035$ . Действительно, согласно (2.2) при чистом сдвиге осевое усилие в два раза больше, чем при простом.

Переработка волокнонаполненных полимеров сопровождается интенсивным диспергированием волокон, причем существует предел разрушения наполнителя. Можно предположить, что разрушение высокомодульных волокон (стеклянных, углеродных) происходит по механизму потери устойчивости. Для типичных условий переработки на экструдере композиции, содержащей стеклянные волокна, значения параметров следующие:  $d = 10$  мкм;  $c = 0,05$ ;  $\mu = 10^3$  Па·с;  $\text{Re} = 1,2 \cdot 10^{-7}$ ;  $e = 1,56$ ;  $E = 7,5$  ГПа;  $\gamma = 100$  с $^{-1}$ . При этом значению критической жесткости в условиях чистого сдвига  $K^* = 0,122$  соответствует длина волокна  $2l = 0,3$  мм, что согласуется с экспериментальными данными работ [4–6], в которых средняя длина волокон после интенсивного силового воздействия на систему составляет  $0,1 \div 0,9$  мм. Для указанных условий расчетные (с использованием формулы (2.2) при  $g = 1$ ,  $S = 0$ ,  $\varphi_- = 0$ ) растягивающие напряжения в середине волокна

$4N_-/(\pi d^2) = 59$  МПа, что существенно меньше разрушающих напряжений при растяжении (3,5 ГПа).

**3. Вязкость волокнонаполненной суспензии.** Жидкость, в которой взвешено большое количество волокон, можно рассматривать как однородную среду. Такая среда обладает эффективной вязкостью  $\mu_+$ , отличной от вязкости основной жидкости (матрицы)  $\mu$ . Рассмотрим случай малых концентраций взвешенных волокон, когда суммарный объем волокон мал по сравнению с объемом жидкости, так что контакт и гидродинамическое влияние между волокнами отсутствуют. Упругие оси всех волокон лежат в плоскостях, перпендикулярных оси  $z$ .

Определим затраты энергии потока жидкости, обусловленные присутствием одного волокна (искривленного стержня). Скорость отдельной точки упругой оси стержня  $\mathbf{r}_t$ , поэтому относительная скорость жидкости  $\mathbf{V} - \mathbf{r}_t$ ;  $\mathbf{K}$  — локальный вектор плотности внешних сил. На элемент стержня длиной  $ds$  действует сила  $\mathbf{K} ds$ . Для стержня длиной  $2l$  энергия вязкого трения  $W$  определяется интегралом

$$W = \int_{-l}^l (\mathbf{V} - \mathbf{r}_t) \mathbf{K} ds.$$

Учитывая первое уравнение в (1.1) и соотношения  $\mathbf{V} - \mathbf{r}_t = -B^{-1}(N\varphi_s + Q_s)\mathbf{n} - A^{-1}(N_s - Q\varphi_s)\mathbf{l}$ ,  $\mathbf{F} = N\mathbf{l} + Q\mathbf{n}$ , выполнив скалярное умножение, для искривленного стержня получим

$$W = \int_{-l}^l [B^{-1}(N\varphi_s + Q_s)^2 + A^{-1}(N_s - Q\varphi_s)^2] ds.$$

В случае прямолинейного достаточно жесткого стержня ( $K > K^*$ ,  $\varphi_s = 0$ ,  $Q = 0$ ) имеем

$$W = A^{-1} \int_{-l}^l N_{-,s}^2 ds.$$

Общее количество волокон в суспензии составляет  $2Vc/(\pi d^2 l)$  ( $V$  — объем суспензии), поэтому суммарные затраты энергии  $W_\Sigma$ , связанные с обтеканием всех волокон, определяются соотношением

$$W_\Sigma = 2WVc/(\pi d^2 l). \quad (3.1)$$

В случае простого сдвига ( $g_1 = 0$ ) с учетом (2.2) получим

$$W = (1/6)A\gamma_-^2 l^3 \sin^2 2\varphi_-. \quad (3.2)$$

Выражение для эффективной вязкости в условиях простого сдвига с учетом дополнительных затрат энергии на обтекание дисперсной фазы имеет вид

$$\mu_+ = (\tau_{xy}\gamma_- V + W_\Sigma)/(\gamma_-^2 V), \quad (3.3)$$

где  $\tau_{xy} = \mu\gamma_-$  — касательное напряжение.

Для суспензии, наполненной прямолинейными волокнами одинаковой длины, диаметра и ориентации, из (3.1)–(3.3) следует

$$\mu_+ = \mu \left( 1 + \frac{2,1}{3} \frac{l^2 c \sqrt{c}}{d^2 \ln(0,952/\sqrt{c})} \sin^2 2\varphi_- \right).$$

Из полученного выражения следует, что при  $\varphi_- = 0$  вязкость системы минимальна, а при  $\varphi_- = \pm\pi/4$  максимальна. Ориентация волокон  $\varphi_-$  изменяется во времени в соответствии с (2.2) (синхронный поворот), поэтому эффективная вязкость также будет изменяться.

В случае полидисперсных волокон, все фракции которых равномерно распределены по объему среды, вязкость определяется выражением

$$\mu_+ = \mu \left( 1 + \frac{2,1c\sqrt{c}}{3 \ln(0,952/\sqrt{c})} \sum_{i=1}^m \frac{l_i^2}{d_i^2} \psi_i \sin^2 2\varphi_i \right), \quad (3.4)$$

где  $\varphi_i = \arctg [\operatorname{tg} \varphi_{0i} / (1 + g\tau \operatorname{tg} \varphi_{0i})]$ ;  $d_i$ ,  $2l_i$ ,  $\varphi_{0i}$  — диаметр, длина и начальная ориентация волокон  $i$ -й фракции;  $m$  — число фракций;  $\psi_i$  — относительное количество волокон  $i$ -й фракции  $\left( \sum_{i=1}^m \psi_i = 1 \right)$ .

При простом сдвиге положение нейтрального равновесия неустойчиво, поэтому волокна вращаются с неравномерной скоростью [1]. Причиной неустойчивости могут являться изогнутость волокна, гидродинамические возмущения, создаваемые соседними волокнами, и т. п. Если в начальный момент все волокна имели одинаковую ориентацию, то эффективная вязкость приближается к постоянному значению, соответствующему изотропной (хаотической) ориентации, по закону затухающих колебаний. Область нейтрального равновесия можно расширить, если на основное течение дополнительно наложить деформацию растяжения, что реализуется, например, на вальцах.

Найдем эффективную вязкость системы при изотропной (хаотической) ориентации волокон. Согласно (3.2) волокнам с ориентацией  $+\varphi_-$  и  $-\varphi_-$  в силу четности функции  $\sin^2 2\varphi_-$  соответствует одно значение  $W$ , поэтому ограничимся сектором  $0 < \varphi_- < \pi/2$ . В окрестности направления  $\varphi_i$  выделим сектор с углом  $\Delta\varphi = \pi/(2m)$  и будем рассматривать  $l$  и  $d$  как функции угла  $l(\varphi_i)$ ,  $d(\varphi_i)$ . С учетом изотропности  $\psi = 2\Delta\varphi/\pi$  можно записать равенство

$$\lim_{\substack{\Delta\varphi \rightarrow 0, \\ m \rightarrow \infty}} \sum_{i=1}^m \frac{l^2(\varphi_i)}{d^2(\varphi_i)} \frac{2\Delta\varphi}{\pi} \sin^2 2\varphi_i = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{l^2(\varphi)}{d^2(\varphi)} \sin^2 2\varphi d\varphi.$$

В случае однофракционного наполнителя ( $l = \text{const}$ ,  $d = \text{const}$ ) последний интеграл равен  $0,5l^2/d^2$ , а выражение (3.4) принимает вид

$$\mu_+ = \mu \left( 1 + \frac{2,1}{6} \frac{l^2}{d^2} \frac{c\sqrt{c}}{\ln(0,952/\sqrt{c})} \right).$$

В условиях чистого сдвига ( $g_1 = 1$ ) суммарные затраты энергии обтекания всех волокон найдем по формуле (3.1) с учетом (2.2):

$$W_\Sigma = [4Vcl^2/(3\pi d^2)] A\gamma^2 \cos^2 2\varphi_-. \quad (3.5)$$

Растягивающее напряжение при чистом сдвиге  $\sigma_{xx} = 4\mu\gamma$  [7], поэтому формула для эффективной вязкости с учетом затрат энергии на обтекание частиц имеет вид

$$\mu_+ = (\sigma_{xx}\gamma V + W_\Sigma)/(4\gamma^2 V).$$

С учетом (3.5) можно записать

$$\mu_+ = \mu \left( 1 + \frac{2,1}{3} \frac{l^2 c\sqrt{c}}{d^2 \ln(0,952/\sqrt{c})} \cos^2 2\varphi_- \right) \quad (3.6)$$

(функция  $\varphi_-(\tau)$  определена в (2.2)). Все волокна имеют одинаковую длину, диаметр и ориентацию.

В случае  $m$  фракций выражение для эффективной вязкости имеет вид

$$\mu_+ = \mu \left( 1 + \frac{2,1c\sqrt{c}}{3 \ln(0,952/\sqrt{c})} \sum_{i=1}^m \psi_i \frac{l_i^2}{d_i^2} \cos^2 2\varphi_i \right), \quad (3.7)$$

где  $\varphi_i = \arctg [\operatorname{tg} \varphi_{0i} \exp(-2g\tau)]$ .

Независимо от начальной ориентации волокон формулы (3.6), (3.7) предполагают асимптотическое увеличение вязкости во времени, поскольку  $\varphi \rightarrow 0$ ,  $\varphi_i \rightarrow 0$ ,  $\cos^2 2\varphi \rightarrow 1$ ,  $\cos^2 2\varphi_i \rightarrow 1$  при  $\tau \rightarrow \infty$ . Положение статического равновесия устойчиво. Максимальная вязкость системы определяется концентрацией волокон и отношением  $(l/d)^2$ .

### ЛИТЕРАТУРА

1. Шаповалов В. М. Движение гибкой нити конечной длины в потоке вязкой жидкости // ПМТФ. 2000. Т. 41, № 2. С. 144–153.
2. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория упругости. М.: Наука, 1965.
3. Карман Т., Био М. Математические методы в инженерном деле. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1948.
4. Ким В. С., Скачков В. В. Диспергирование и смешение в процессах производства и переработки пластмасс. М.: Химия, 1988.
5. Катыхков Ю. В., Скачков В. В., Салазкин К. А., Макаров М. С. Исследование процесса разрушения стекловолнокистого наполнителя при переработке полимерных композиций на одношнековом экструдере // Процессы и аппараты производства полимеров, методы и оборудование для переработки их в изделия: Тез. докл. Всесоюз. науч.-техн. конф., Москва, 11–13 окт. 1977 г. М.: Моск. ин-т хим. машиностроения, 1977. Вып. 1. С. 64–67.
6. Боровикова С. М., Лурье В. В., Скачков В. В. Процесс изготовления изделий из стеклонаполненных термопластов одностадийным методом литья под давлением // Там же. С. 101–104.
7. Шаповалов В. М. О нанесении высоковязкой жидкости на движущуюся подложку // ПМТФ. 1997. Т. 38, № 2. С. 170–175.

*Поступила в редакцию 2/VII 2002 г.*