

УДК 534

## ПЕРЕСТРОЙКА ГАРМОНИК ПРИ ИЗГИБЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ ВСЛЕДСТВИЕ ДИНАМИЧЕСКОГО СЖАТИЯ

М. А. Ильгамов

Институт механики Уфимского научного центра РАН, 450054 Уфа  
E-mail: ilgamov@anrb.ru

Рассматривается реакция цилиндрической оболочки на внешнее динамическое давление. Задается распределение начального прогиба по гармоникам, от которого зависит развитие выпучивания. Установлено, что в различные моменты выпучивания функция, определяющая прогиб, состоит из разных гармоник, причем выделяется преобладающая гармоника. Рассматриваются случаи длинной оболочки и оболочки конечной длины.

Ключевые слова: цилиндрическая оболочка, динамика, сжатие, гармоники.

**1. Постановка задачи.** Форма тонкостенных оболочек практически всегда имеет некоторое отклонение от заданной идеальной формы, возникающее при их изготовлении, хранении, перевозке, монтаже и т. д. Чем меньше относительная толщина оболочки, тем больше вероятность возникновения начальных прогибов, которые оказывают значительное влияние на ее устойчивость при сжатии [1, 2]. Как правило, амплитуды гармоник прогибов уменьшаются по мере увеличения их номера. Распределение начального прогиба по гармоникам определяется в результате обработки измерений отклонений от заданной формы. В данной работе принимается, что начальный прогиб цилиндрической оболочки имеет  $n$  волн в окружном направлении. Номер волны с наибольшей амплитудой обозначим через  $n_*$ . Амплитуда гармоник убывает как при уменьшении числа волн  $n$  по сравнению с  $n_*$ , так и при его увеличении.

Деформация длинной цилиндрической оболочки, лежащей на горизонтальной поверхности, под действием собственного веса происходит таким образом, что основной является гармоника с  $n_* = 2$  (амплитуды следующих гармоник убывают как  $n^{-4}$ ). В случае короткой оболочки остаточное волнообразование может возникать в результате различных технологических процессов, а также вследствие равномерного статического сжатия оболочки при  $n_* = n_E$  ( $n_E$  — число волн деформации, при котором достигается критическое значение статической нагрузки). В коротких оболочках образуется большое число волн ( $n_* > 2$ ). В частности, это имеет место при контакте оболочки с другими средами, например со сплошным упругим телом [3]. При различных значениях  $n$  амплитуды могут иметь разные знаки, но в данной работе знаки амплитуд всех гармоник начального прогиба полагаются одинаковыми. Изменение амплитуд в зависимости от  $n$  может быть описано разными способами, например зависимостью вида  $n^{-\alpha}$ , распределением Гаусса и т. д.

С учетом сказанного выше выражения для малых начальных прогибов цилиндрической оболочки можно представить в виде

$$w_0 = W_0 F(x) \left( \sum_{n=2}^{n_*} (1 + n_* - n)^{-\alpha} + \sum_{n_*+1}^{\infty} (1 - n_* + n)^{-\alpha} \right) \cos n\theta, \quad (1.1)$$

где  $x, \theta$  — продольная и окружная координаты;  $\alpha$  — мера затухания по гармоникам. Равномерному распределению начального прогиба по гармоникам соответствует значение  $\alpha = 0$ . Десять членов в окрестности  $n_*$  имеют один порядок, если  $\alpha \leq 1/2$ . Амплитуда волны с  $n = n_*$  равна  $W_0$  (поскольку в этом случае  $n < n_* + 1$ , вторая сумма в (1.1) не рассматривается). В указанном выше примере для длинной оболочки, находящейся под действием собственного веса,  $\alpha = 4$ ,  $F(x) = 1$ .

В настоящей работе рассматривается реакция цилиндрической оболочки на внешнее равномерное давление на ее поверхности в виде ступеньки по времени ( $p = 0$  при  $t < 0$ ,  $p = \text{const}$  при  $t \geq 0$ ). На торцевые поверхности оболочки давление не действует. В такой постановке динамическое поведение длинной цилиндрической оболочки с равномерным распределением начального прогиба по гармоникам впервые рассмотрено в работе [4]. В [4] и других работах определялась преобладающая гармоника при динамическом выпучивании. В экспериментах М. А. Лаврентьева [4] и в теоретических исследованиях установлено, что при динамической потере устойчивости число волн больше, чем при статической потере, и оно тем больше, чем больше величина внезапно приложенной нагрузки. В указанных работах существенным является допущение о равномерности распределения гармоник начальных возмущений или об одинаковом порядке их амплитуд, кроме того, в них не прослеживается ускоряющийся процесс выпучивания во времени. Неравномерность распределения начального прогиба по гармоникам приводит к существенному изменению поведения оболочки, в частности к перестройке гармоник в процессе динамического выпучивания.

Решение уравнений динамики оболочки будем искать в виде

$$w = \sum_{n=2} W_n(t) F(x) \cos n\theta. \quad (1.2)$$

Это решение должно удовлетворять условиям закрепления оболочки на ее краях и начальным условиям

$$w = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (x = 0, L), \quad w = w_0, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = 0 \quad (t = 0), \quad (1.3)$$

где  $w_0$  задается выражением (1.1). Предполагается, что величина  $w_0$  существенно меньше толщины стенки оболочки.

**2. Выпучивание длинной цилиндрической оболочки.** Уравнение динамики длинной цилиндрической оболочки (кольца), записанное с учетом инерционных сил в направлениях нормали и касательной, но без учета относительного удлинения срединной поверхности, имеет вид [1, 2]

$$\frac{\partial^6 w}{\partial \theta^6} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} + \frac{pR^3}{D} \left( \frac{\partial^4 w}{\partial \theta^4} + \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\rho h R^4}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} - w \right) = 0, \quad (2.1)$$

где  $R, h$  — радиус и толщина стенки;  $\rho, D$  — плотность материала и жесткость оболочки на изгиб.

Подставляя в (2.1) сумму (1.2) при  $F(x) = 1$ , получаем уравнение

$$\frac{d^2 W_n}{dt^2} - k_n^2 W_n = 0, \quad k_n = \left( \frac{(n^2 - 1)n^2}{\rho h R (n^2 + 1)} \left( p - \frac{n^2 - 1}{3} p_E \right) \right)^{1/2}, \quad (2.2)$$

где  $p_E = 3D/R^3$  — наименьшее значение статического давления, при котором происходит потеря устойчивости ( $n = 2$ ).

Решение  $W_n = A_n \exp(k_n t) + B_n \exp(-k_n t)$  уравнения (2.2) должно удовлетворять начальным условиям (1.1), (1.3). Для этого необходимо задать число  $n_*$ . В настоящей работе принимается одно из возможных значений  $n_* = 2$ . Такой выбор обусловлен тем, что при

многих видах воздействия поперечное сечение длинной оболочки принимает форму эллипса. Это утверждение верно, по крайней мере, в указанных выше случаях нагружения (нагружение собственным весом и внешним давлением), при которых происходит статическое выпучивание. Тогда решение (2.2) принимает вид

$$W_n = W_0(n - 1)^{-\alpha}(e^{k_n t} + e^{-k_n t})/2. \quad (2.3)$$

Из (2.2), (2.3) следует, что в зависимости от  $p_E$ ,  $p$ ,  $n$  имеет место как колебательный режим, так и экспоненциальное возрастание малых начальных прогибов:

$$W_n = \begin{cases} W_0(n - 1)^{-\alpha} \cos k_n t, & 3p < (n^2 - 1)p_E, \\ W_0(n - 1)^{-\alpha} \operatorname{ch} k_n t, & 3p > (n^2 - 1)p_E. \end{cases} \quad (2.4)$$

Более высоким гармоникам (согласно (1.1) число  $n$  задается начальным прогибом) соответствует первое решение в (2.4), а более низким гармоникам — второе решение в (2.4). Число волн  $n_R$ , разделяющее эти режимы, определяется из условия  $k_n = 0$ :

$$n_R = (3p/p_E + 1)^{1/2}. \quad (2.5)$$

Значение  $n_R$  необходимо округлять до ближайшего меньшего целого числа. С учетом сказанного выше решение (1.2), (2.4) можно записать в виде

$$w = W_0 \left( \sum_{n=2}^{n_R} (n - 1)^{-\alpha} \operatorname{ch} k_n t + \sum_{n_R+1}^{\infty} (n - 1)^{-\alpha} \cos k_n t \right) \cos n\theta. \quad (2.6)$$

Из (2.6) и выражения для  $k_n$  в (2.2) следует, что рост возмущений происходит тем быстрее, чем больше давление  $p$  и меньше плотность и толщина стенки оболочки. Число волн  $n = n_L$ , при котором прогиб возрастает наиболее быстро, определяется из условия  $dw/dn = 0$ . Соответствующее уравнение содержит все входные параметры и время  $t$ . Оценку для числа  $n_L$  нетрудно получить при  $\alpha = 0$ , когда указанное условие равносильно уравнению  $dk_n/dn = 0$ , из которого при допущении  $n^4 \gg 1$ ,  $n_R^4 \gg 1$  находим

$$n_L^2 \approx (n_R^2 - 2 + n_R(n_R^2 + 12)^{1/2})/4 \quad (2.7)$$

или

$$n_L^2 \approx \frac{1}{4} \left( \frac{3p}{p_E} - 1 + \left( \frac{3p}{p_E} + 1 \right)^{1/2} \left( \frac{3p}{p_E} + 13 \right)^{1/2} \right). \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что с увеличением отношения  $p/p_E$  наиболее быстро возрастают более высокие гармоники. Однако согласно (2.7) значение  $n_L$  всегда несколько меньше значения  $n_R$ . Это означает, что наиболее быстро возрастает амплитуда гармоники, соответствующей переходу от экспоненциального роста к колебаниям. Например, при  $p/p_E = 11$   $n_R = 5,8$  и рост возмущений описывается суммой гармоник от  $n = 2$  до  $n = 5$ , а начиная с  $n = 6$  происходят колебания около основного движения с возрастающей частотой и уменьшающейся амплитудой. В этом случае решение имеет вид

$$\frac{w}{W_0} = \left( \sum_{n=2}^5 (n - 1)^{-\alpha} \operatorname{ch} k_n t + \sum_{n=6}^{\infty} (n - 1)^{-\alpha} \cos k_n t \right) \cos n\theta, \quad (2.9)$$

причем аргументы функций  $\operatorname{ch} k_n t$  и  $\cos k_n t$  равны соответственно

$$k_n t = n \left( \frac{n^2 - 1}{n^2 + 1} (5,8^2 - n^2) \right)^{1/2} \tau; \quad (2.10)$$

$$k_n t = n(n^2 - 5,8^2)^{1/2} \tau. \quad (2.11)$$

Здесь  $\tau = (p_E/(3\rho hR))^{1/2}t$ ; для высоких мод учтено, что  $n^2 \gg 1$ . Несмотря на то что число  $n_R$  нужно округлять до целого, при вычислении выражений (2.10), (2.11) необходимо использовать истинное значение  $n_R = 5,8$ .

На рис. 1 показаны зависимости первых четырех членов в скобках в (2.9), обозначенных через  $W_n/W_0$ , от  $\tau$ . В соответствии с (2.7), (2.8)  $n_L \approx 4,2$ . При равномерном распределении начального прогиба по гармоникам (случай Лаврентьева — Ишлинского ( $\alpha = 0$ )) в начале процесса преобладающей гармоникой является гармоника с  $n = 4$ , однако до момента времени  $\tau = 0,5$  амплитуды гармоник с  $n = 3$  и  $n = 5$  остаются величинами одного порядка с амплитудой гармоник с  $n = 4$  (амплитуда гармоник с  $n = 2$  значительно меньше). При  $\alpha = 1$  в начале процесса преобладает гармоника с  $n = 2$ , так как начальной гармоникой является гармоника с  $n_* = n_E = 2$ . При  $\tau = 0,2$  преобладает гармоника с  $n = 4$ . Однако увеличивающийся прогиб определяется всеми четырьмя гармониками (при  $\tau > 0,5$  — лишь одной гармоникой с  $n = 4$ ). При  $\alpha \geq 2$  в начале процесса четко выделяется гармоника с  $n = 2$ , а точкам пересечения кривых зависимостей  $W_n/W_0$  соответствуют значения  $\tau > 0,5$ .

Таким образом, при динамическом выпучивании оболочки с неравномерным распределением малого начального прогиба по гармоникам происходит их перестройка. В начале процесса преобладает гармоника с наибольшей амплитудой в начальном прогибе, в дальнейшем преобладают другие гармоники. При больших значениях времени преобладающей становится гармоника  $n_L$ , определенная в [4].

Если имеются какие-либо ограничители перемещения по нормали к поверхности оболочки, например контактирующие среды, то гармоника  $n_L$  может и не стать преобладающей. Это может иметь место также при учете нелинейностей.

**3. Выпучивание цилиндрической оболочки конечной длины.** Предположим, что в окружном направлении происходит волнообразование с большим числом волн ( $n^2 \gg 1$ ). При этом будем учитывать инерционные силы, направленные только по нормали к срединной поверхности. Тогда уравнение движения принимает вид [1]

$$\nabla^8 w + \frac{Eh}{DR^2} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \frac{p}{DR} \nabla^4 \left( \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \right) + \frac{\rho h}{D} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (\nabla^4 w) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{R^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}. \quad (3.1)$$

Подставляя в (3.1) выражение (1.2) при  $F(x) = \sin(\pi x/L)$ , получаем уравнение (2.2), где

$$k_n^2 = \left[ \frac{pn^2}{DR} \left( 1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2} \right)^2 - \left( \frac{n}{R} \right)^4 \left( 1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2} \right)^4 - \frac{Eh}{DR^2} \left( \frac{\pi R}{nL} \right)^4 \right] / \left[ \frac{\rho h}{D} \left( 1 + \frac{\pi^2 R^2}{n^2 L^2} \right)^2 \right]. \quad (3.2)$$

При  $R/L \rightarrow 0$  уравнение (3.2) совпадает с выражением (2.2), если в последнем единица пренебрежимо мала по сравнению с  $n^2$ . Ниже для упрощения анализа рассматривается случай, когда параметры оболочки удовлетворяют условию

$$(\pi R/(nL))^2 \ll 1. \quad (3.3)$$

При этом (3.2) принимает вид

$$k_n^2 = \frac{pR^3 n^6 - Dn^8 - \pi^4 EhR^6 L^{-4}}{\rho h R^4 n^4}. \quad (3.4)$$

Из условия  $k_n = 0$  следует связь между параметрами в статической задаче

$$p = \frac{Eh}{R^3} \left( \frac{h^2 n^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{\pi^4 R^6}{L^4 n^6} \right). \quad (3.5)$$

Определяя  $n$  из уравнения  $dp/dn = 0$ , при коэффициенте Пуассона  $\nu = 0,3$  получаем

$$n = n_E = 2,74(R^3/(L^2 h))^{1/4}. \quad (3.6)$$

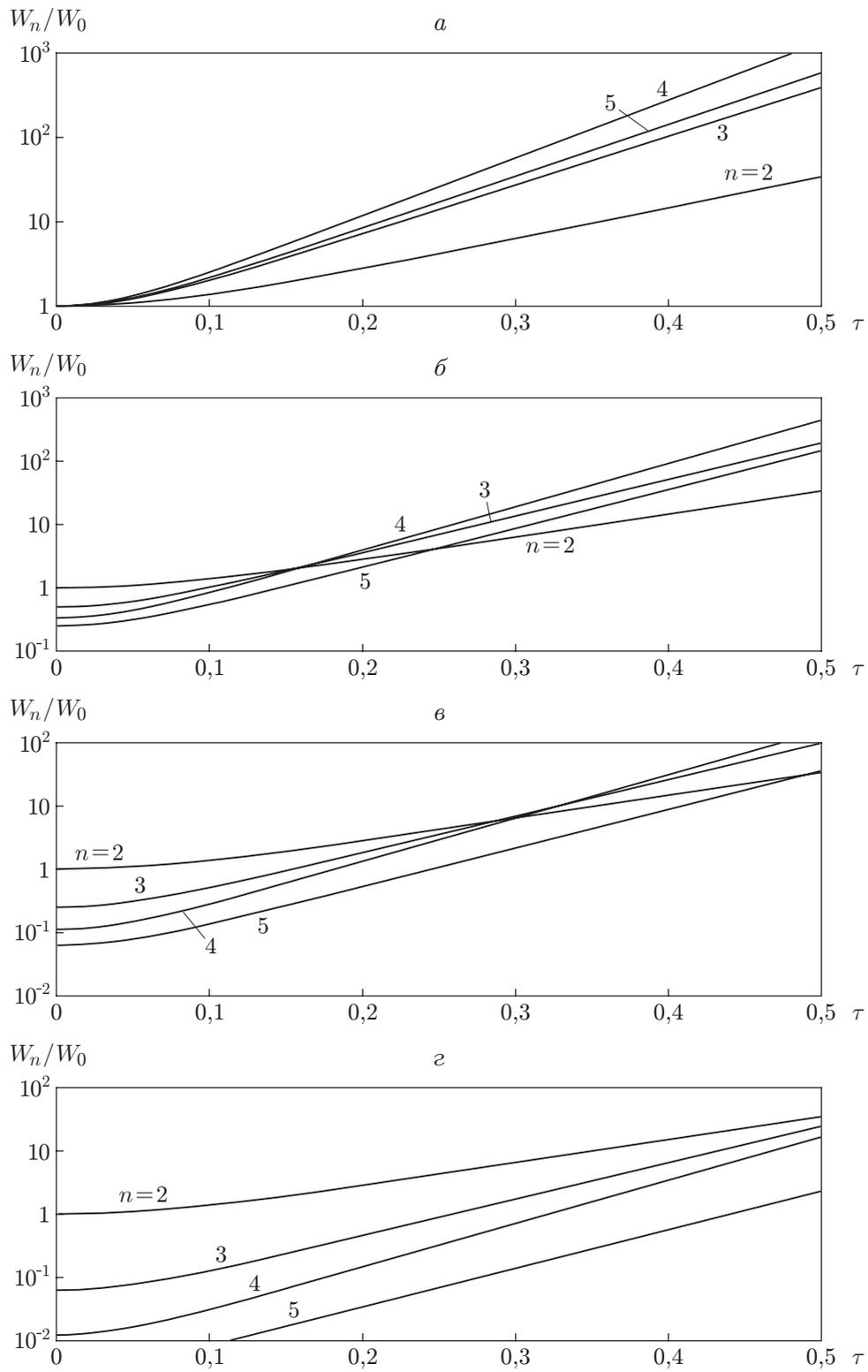


Рис. 1. Зависимости отношений максимальных значений гармоник прогиба в окружном направлении ( $\theta = 0$ ) длинной оболочки к максимальному значению начального прогиба от безразмерного времени, полученные по соотношениям (2.9)–(2.11) при  $p/p_E = 11$ :  
*a* —  $\alpha = 0$ ; *б* —  $\alpha = 1$ ; *в* —  $\alpha = 2$ ; *г* —  $\alpha = 4$

Подставляя (3.6) в (3.5), находим критическое значение давления

$$p_E = 0,92(ER/L)(h/R)^{5/2}.$$

Для оболочек с параметрами  $R/L = 0,5$ ,  $R/h = 500$  в соответствии с (3.6)  $n_E \approx 8,5$ . Округляя это значение до целого числа, получаем  $n_E = 9$ . При этом условие (3.3) выполняется. В соответствии с (3.5) уменьшение и увеличение  $n$  по сравнению с  $n_E$  приводит к росту значения  $p$ . В отличие от случая длинной оболочки в данном случае не удается исключить параметры  $D$ ,  $E$  в выражении (3.4) с помощью выражения для  $p_E$ .

Для того чтобы решение уравнения (2.2) удовлетворяло заданным выше начальным условиям, необходимо задать число  $n_*$ . Так же как в случае длинной оболочки, принимаем одно из возможных значений  $n_* = n_E$ . Тогда вместо (2.3) имеем

$$W_n = \begin{cases} W_0(1 + n_E - n)^{-\alpha}(e^{knt} + e^{-knt})/2, & 2 \leq n \leq n_E, \\ W_0(1 - n_E + n)^{-\alpha}(e^{knt} + e^{-knt})/2, & n_E + 1 \leq n < \infty. \end{cases}$$

Значение  $n_R$ , разделяющее режимы экспоненциального роста прогиба и колебаний, определяется из условия  $k_n = 0$  или из (3.5). Полагая  $n_R > n_E$ , как и в случае длинной оболочки, можно сделать вывод, что по мере увеличения  $n$  вклад последнего члена в (3.5) быстро уменьшается. Тогда, используя два приближения, получаем

$$n_R^2 \approx \frac{pR^3}{D} \left( 1 - \frac{\pi^4 D^3 E h}{p^4 R^6 L^4} \right)^{1/4}. \quad (3.7)$$

В случае  $L \rightarrow \infty$  (3.7) совпадает с выражением (2.5), если в (2.5) пренебречь последним членом и учесть, что  $p_E = 3D/R^3$ .

В случае оболочки конечной длины решение задачи имеет вид

$$\frac{w}{W_0} = \left[ \left( \sum_{n=2}^{n_E} (1 + n_E - n)^{-\alpha} + \sum_{n_E+1}^{n_R} (1 - n_E + n)^{-\alpha} \right) \operatorname{ch} k_n t + \sum_{n_R+1}^{\infty} (1 - n_E + n)^{-\alpha} \cos k_n t \right] \cos n\theta. \quad (3.8)$$

Как указано выше, на разных стадиях динамического выпучивания преобладают разные гармоники. Число волн  $n_L$  определим при  $\alpha = 0$ , когда на протяжении всего процесса выпучивания преобладает одна гармоника. Тогда условие  $dk_n/dn = 0$  равносильно условию максимума функции (3.8):

$$3pR^3 n^6 - 5Dn^8 + 3\pi^4 E h R^6 L^{-4} = 0. \quad (3.9)$$

Как и в случае длинной оболочки, на основе оценки  $n_E < n_L < n_R$  можно сделать вывод, что последний член в (3.9) меньше второго члена. Поэтому два последовательных приближения дают следующее выражение для  $n_L$ :

$$n_L^2 \approx \frac{3pR^3}{5D} \left( 1 + \frac{4,6\pi^4 D^3 E h}{p^4 R^6 L^4} \right)^{1/4}. \quad (3.10)$$

Справедливо приближенное соотношение  $(n_L/n_R)^2 = 3/5$ . Число  $n_E$  зависит только от отношений размеров оболочки  $R/L$  и  $h/R$ , а числа  $n_R$ ,  $n_L$  — и от отношения динамического давления к модулю упругости материала оболочки  $p/E$ .

При  $R/L = 0,5$ ,  $R/h = 500$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $E/p = 5 \cdot 10^6$  (при этом  $p/p_E = 2,43$ ) согласно (3.7), (3.10)  $n_R = 16$ ,  $n_L = 13$ , согласно (3.6)  $n_E = 9$ . В соответствии с (3.4) при  $8 \leq n \leq 14$  значение  $k_n$  изменяется медленно, поэтому в данном примере наибольшие амплитуды

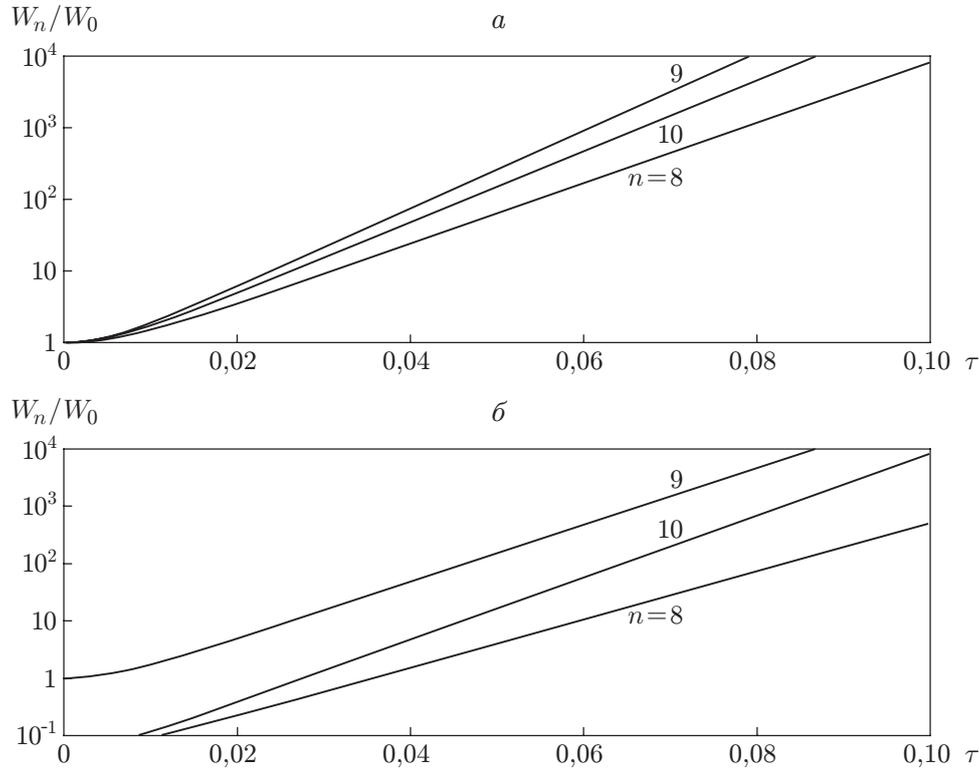


Рис. 2. Зависимости отношений максимальных значений гармоник прогиба в окружном направлении ( $\theta = 0$ ) оболочки к максимальному значению гармоники начального прогиба от безразмерного времени, полученные по соотношениям (3.11) при  $R/L = 0,5$ ,  $R/h = 500$ ,  $\nu = 0,3$ ,  $E/p = 5 \cdot 10^6$ :  
 а —  $\alpha = 0$ ; б —  $\alpha = 4$

гармоник близки к  $n_E = 9$ . Полагая  $\alpha = 4$  и не учитывая в (3.8) гармоники с амплитудами порядка  $3^{-4}$  и меньше, решение можно записать в виде

$$\frac{w}{W_0} = \frac{1}{16} \operatorname{ch} 97\tau \cos 8\theta + \operatorname{ch} 114\tau \cos 9\theta + \frac{1}{16} \operatorname{ch} 125\tau \cos 10\theta, \tag{3.11}$$

$$\tau = (D/(\rho h R^4))^{1/2} t.$$

В (3.11) учтено, что при больших значениях  $n$  члены в третьей сумме в правой части (3.8) малы по сравнению с членами в первых двух суммах. Таким образом, колебательные составляющие движения пренебрежимо малы. При более равномерном распределении по гармоникам в начальном отклонении ( $\alpha < 4$ ) в (3.11) появляются также другие члены. Предполагается также ограничение по времени и величине прогиба, что обусловлено применимостью линейной теории.

Таким образом, при  $\alpha = 4$  гармоника с числом волн  $n_L$  не возрастает. Гармоника с максимальной скоростью возрастания появляется при меньших значениях  $\alpha$ . При этом, так же как и в случае длинной оболочки, происходит перестройка гармоник в процессе динамического выпучивания оболочки конечной длины. На рис. 2 приведены зависимости  $W_n/W_0$  от  $\tau$  ( $\theta = 0$ ).

**Заключение.** В работе рассмотрено неравномерное распределение малого начального прогиба оболочки по гармоникам. В качестве гармоники с наибольшей амплитудой принимается гармоника, при которой достигается критическое статическое давление (для

длинной оболочки — две волны в окружном направлении, для оболочки конечной длины — большее число волн). Начальная скорость полагается равной нулю. Рассматривается случай ступенчатого возрастания давления, которое в дальнейшем остается постоянным.

Прогиб представляет собой сумму двух составляющих, описывающих экспоненциальный рост во времени и колебательный режим. Реализация этих режимов зависит от параметров оболочки и величины приложенного давления. Определяется преобладающая гармоника в различные моменты динамического выпучивания. В начале процесса преобладает гармоника с наибольшей амплитудой в начальном прогибе, в дальнейшем быстрее возрастают другие гармоники и происходит их перестройка. При использовании линейной теории в процессе динамического выпучивания при больших значениях времени преобладающей становится гармоника с номером, зависящим от отношения приложенного давления к статическому критическому давлению. При ограничении времени процесса (или величины прогиба) указанная гармоника может быть не преобладающей. Для того чтобы это установить, необходимо учитывать нелинейность и наличие возможных физических ограничителей прогиба.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Вольмир А. С.** Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967.
2. **Прочность, устойчивость, колебания:** Справ. В 3 т. / Под ред. И. А. Биргера, Я. Г. Пановко. М.: Машиностроение, 1968.
3. **Ильгамов М. А.** Прочность, устойчивость и динамика оболочек с упругим наполнителем / М. А. Ильгамов, В. А. Иванов, Б. В. Гулин. М.: Наука, 1977.
4. **Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем // Докл. АН СССР. 1949. Т. 64, № 6. С. 779–782.

*Поступила в редакцию 25/III 2010 г.*

---